Eine endliche Präsentation der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
»Doktor der Naturwissenschaften«
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Peter Bender
geboren in Worms

Mainz 1976

Berichterstatter:
Professor Gottschling, Mainz
Assistenzprofessor Suckow, Mainz

Mündliche Prüfung am 12. Mai 1976

Ergebnis

Obwohl durch [Klingen 1961] das Problem der expliziten endlichen Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp(2n, \mathbb{Z})$ auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt worden war und in [Klingen 1974] ein einfaches, allerdings unendliches, System erzeugender Relationen für $Sp(4, \mathbb{Z})$ angegeben worden war, wurde erst in [Behr 1975] eine endliche Präsentation explizit angegeben, für die gewisse von Milnor angegebene Methoden variiert worden waren.

Im folgenden wird gezeigt, daß eine endliche Präsentation auch angegeben werden kann unter Ausnutzung der Tatsache, daß die $Sp(4, \mathbb{Z})$ (als Siegelsche Modulgruppe 2. Grades) auf der verallgemeinerten oberen Halbebene $\mathfrak{H}_2$ als Gruppe von Homöomorphismen eigentlich diskontinuierlich und fast effektiv operiert, und der Eigenschaften eines zugehörigen Fundamentalbereichs, die in [Gottschling 1959] und [1961] ausführlich diskutiert wurden.

Herr Gottschling hat mich zu dieser Arbeit angeregt und mir wesentliche Impulse gegeben.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine 2nx2n-Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ($A = A(M)$, $B = B(M)$, $C = C(M)$, $D = D(M)$ nxn-Matrizen; es werden grundsätzlich ganzrationale Einträge angenommen) symplektisch, falls

(1) $AB' = BA' \qquad CD' = DC' \qquad AD' - BC' = E$

($E = E_n$ ist die nxn-Einheitsmatrix, und $'$ bedeutet Transponieren). Die Menge der symplektischen 2nx2n-Matrizen bildet die symplektische Gruppe $Sp(2n, \mathbb{Z})$. Die Menge der symmetrischen nxn-Matrizen mit komplexzahligen Einträgen $Z = X + iY$ (X, Y reell) mit positiv definitem Imaginärteil Y bildet die verallgemeinerte obere Halbebene $\mathcal{H}_n$, die als eine offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ aufgefaßt werden kann.

Auf $\mathcal{H}_n$ operiert $Sp(2n, \mathbb{Z})$ folgendermaßen: Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{Z})$, so ist

(2) $$M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \qquad Z \in \mathcal{H}_n,\ M \in Sp(2n, \mathbb{Z}) .$$

In [Siegel] wird gezeigt, daß $Sp(2n, \mathbb{Z})$ so als eigentlich diskontinuierliche Gruppe homöomorpher Abbildungen auf $\mathcal{H}_n$ operiert, und zwar effektiv, falls M und $-M \in Sp(2n, \mathbb{Z})$ identifiziert werden. Ist I_n die 2nx2n-Einheitsmatrix, so operiert also die sogenannte inhomogene Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades $\Delta_n := Sp(2n, \mathbb{Z}) / \{\pm I_n\}$ effektiv auf $\mathcal{H}_n$. Die symplektischen Matrizen werden als ihre Elemente aufgefaßt unter Beachtung der Tatsache, daß zwei solche Matrizen (in Δ_n) gleich sind, wenn sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Sei $(\Psi_n, +)$ die (additive) Gruppe der symmetrischen ganzzahligen nxn-Matrizen, Φ_n die (multiplikative) Gruppe der unimodularen nxn-Matrizen, $\Gamma_n < \Delta_n$ die Untergruppe der ganzen Modulsubstitutionen, d. h. derjenigen $M \in \Delta_n$, für die $C(M) = 0$ und damit $A(M) = D(M)'^{-1} \in \Phi_n$ ist, $\Sigma_n \trianglelefteq \Gamma_n$ der Normalteiler der Translationen (für die $C(M) = 0$, $A(M) = D(M) = E_n$ und damit

$B(M) \in \Psi_n$ ist) und $\Omega_n < \Gamma_n$ die Untergruppe der Transformationen, für die $C(M) = B(M) = 0$ ist. Γ_n ist das semidirekte Produkt von Σ_n und Ω_n.

Speziell für $n = 2$ wird $\Sigma := \Sigma_2$ von den

(3) $$G_i = \begin{pmatrix} E & S_i \\ 0 & E \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3, \quad \text{mit} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und $\Omega := \Omega_2$ von den

(4) $$G_{i+3} = \begin{pmatrix} U_i & 0 \\ 0 & U_i'^{-1} \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3, \quad \text{mit} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

erzeugt (siehe unten bei (25)), so daß $\Gamma := \Gamma_2$ von $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ erzeugt wird. Es ergibt sich, daß $\Delta := \Delta_2$ von Γ und

(5) $$P := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \Delta$$

erzeugt wird. Dann ist eine endliche Präsentation der (inhomogenen) Siegelschen Modulgruppe 2. Grades Δ: Die Erzeugendenmenge für Δ ist $\{P, G_1, G_4, G_6\}$, und ein System erzeugender Relationen ist

(6)

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & G_4^2 = I \\
\text{II.} & G_6^2 = I \\
\text{III.} & (G_1G_4)^2 = (G_4G_1)^2 \\
\text{IV.} & P^4 = I \\
\text{V.} & P^2G_1P^2 = G_1 \\
\text{VI.} & (PG_1)^3 = P^2 \\
\text{VII.} & (G_4P)^2 = (PG_4)^2 \\
\text{VIII.} & P(G_4G_1G_4) = (G_4G_1G_4)P \\
\text{IX.} & G_1(PG_6P) = (PG_6P)G_1 \\
\text{X.} & G_4(PG_6P) = (PG_6P)G_4 \\
\text{XI.} & G_1(G_4G_6)^2 = (G_6P)^2G_1G_4G_1 \\
\text{XII.} & (G_4P)^4 = (G_4G_6)^3 \\
\text{(XIII.} & (G_4P)^4 = I \qquad).
\end{array}
$$

Entfernt man aus dem System noch die Relation XIII., so hat man - mit derselben Erzeugendenmenge für die Gruppe - eine Präsentation für $Sp(4, \mathbb{Z})$, die homogene Siegelsche Modulgruppe 2. Grades.

Beweis:

Ein Fundamentalbereich für Γ_n ist

(7) $\mathcal{G}_n := \{Z = X + iY \in \mathcal{H}_n \mid$ mit $X = (x_{jk})_{j,k}$ ist für alle j, k mit $1 \leq j, k \leq n$ $|x_{jk}| \leq \frac{1}{2}$, und Y ist nach Minkowski reduziert$\}$.

(Auf

(8) $\mathcal{Y}_n := \{Z \in \mathcal{H}_n \mid X = 0\} \subset \mathcal{H}_n$

operiert Ω_n. In [Minkowski] ist dafür ein Fundamentalbereich durch endlich viele lineare Ungleichungen angegeben, dessen Elemente "reduziert" heißen.) Mit

(9) $\mathcal{L}_n := \{Z \in \mathcal{H}_n \mid$ für alle $M \in \Delta_n$ ist $\operatorname{abs}(C(M)Z + D(M)) \geq 1\}$

(dabei ist $\operatorname{abs} Z := |\det Z|$ für $Z \in \mathcal{H}_n$) ist nach [Siegel]

$\mathcal{F}_n := \mathcal{G}_n \cap \mathcal{L}_n$

ein zusammenhängender Fundamentalbereich für Δ_n. Ein Bild $M^{-1}(\mathcal{F}_n)$, $M \in \Delta_n$, heißt Nachbar von $\mathcal{F}_n$, wenn $M^{-1}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{F}_n \neq \emptyset$; es wird dann auch M Nachbar (für $\mathcal{F}_n$) genannt; mit M ist auch M^{-1} Nachbar. Nach [Siegel] gibt es in Δ_n nur endlich viele Nachbarn.

Dann gelten folgende Aussagen aus [Behr 1962] : Sind für ein $l \in \mathbb{N}$ für $i = 1, 2, \ldots, l$ N_i, $N_i^{-1} \in \Delta_n$ alle Nachbarn $\neq I_n$, dann wird die Gruppe Δ_n von ihnen erzeugt, und der Normalteiler der Relationen von Δ_n in der freien Gruppe über ihnen wird von den lokalen Relationen erzeugt (das sind alle

(10) $N_iN_jN_k^{-1}$ $\quad$ N_i, N_j, N_k Nachbarn für $\mathfrak{g}_n$ und $N_iN_j = N_k$ in Δ_n).

Es müssen also sämtliche Nachbarn bestimmt werden, und für jedes Paar von Nachbarn muß überprüft werden, ob das Produkt wieder ein Nachbar ist. Die Menge dieser Produkte ist dann ein Erzeugendensystem für die Relationen.

Definiert man noch $I := I_2$ und

(11) $$Q := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \Delta ,$$

so gilt Satz 1: Für jeden Nachbarn $N \in \Delta$ gibt es $H \in \Gamma$ mit $H^{-1}N \in \Xi := \bigcup_{i=0}^{3} \Xi_i$, wobei gilt (vgl. (3) - (5)):

(12) $$\Xi_0 := \{I\} ,$$

$$\Xi_1 := \{Q, QG_1, QG_1^{-1}, QG_2, QG_2^{-1}, QG_3, QG_3^{-1}, QG_1G_2, QG_1^{-1}G_2^{-1}, QG_1G_2^{-1}, QG_1^{-1}G_2, QG_1G_3, QG_1^{-1}G_3^{-1}, QG_2G_3, QG_2^{-1}G_3^{-1}, QG_1G_2G_3, QG_1^{-1}G_2^{-1}G_3^{-1}\} ,$$

$$\Xi_2 := \{P, PG_1, PG_1^{-1}, PG_4, PG_1G_4, PG_1^{-1}G_4\} ,$$

$$\Xi_3 := \{PG_5G_4G_6G_4, PG_1G_5G_4G_6G_4, PG_1^{-1}G_5G_4G_6G_4\} .$$

Also wird Δ von Γ , P und Q erzeugt.

Dies wird benutzt beim Beweis von Satz 2: Δ wird erzeugt von $\{P, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$, und ein Erzeugendensystem für die Relationenmenge von Δ ist

(13)

(i)	$G_1G_2 = G_2G_1$	(ix)	$G_6G_1G_6 = G_1G_2G_3$
(ii)	$G_1G_3 = G_3G_1$	(x)	$G_4G_1G_4 = G_2$
(iii)	$G_4^2 = I$	(xi)	$G_4G_3G_4 = G_3$
(iv)	$G_5^2 = I$	(xii)	$PG_6P = G_3$
(v)	$(G_4G_5)^2 = I$	(xiii)	$PG_2 = G_2P$
(vi)	$(G_4G_6)^3 = I$	(xiv)	$P^2 = G_5$
(vii)	$G_5G_1G_5 = G_1$	(xv)	$(PG_1)^3 = G_5$
(viii)	$(G_3G_5)^2 = I$	(xvi)	$(G_4P)^2 = (PG_4)^2$.

Daraus ergibt sich die Folgerung: Δ und $Sp(4, \mathbb{Z})$ werden von $\{P, G_1, G_4, G_6\}$ erzeugt und die Relationenmenge in Δ vom System (6), die in $Sp(4, \mathbb{Z})$ vom System (6 ohne XIII.).

<u>Beweis von Satz 1</u>:

Es ist $\mathcal{B}_n = \Gamma_n(\mathcal{F}_n)$ [Gottschling 1961], und zwei Bilder von $\mathcal{B}_n$ sind identisch oder haben höchstens Randpunkte gemeinsam. Liegt $N^{-1}(\mathcal{F}_n)$ in $M^{-1}(\mathcal{B}_n)$ ($M, N \in \Delta_n$), so gibt es $G \in \Gamma_n$, so daß $N = GM$.

(14) $$\Gamma_n M \longleftrightarrow M^{-1}(\mathcal{B}_n) \qquad M \in \Delta_n$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsnebenklassen von Γ_n in Δ_n und der Bilder von $\mathcal{B}_n$ unter Δ_n. $\Gamma_n M$ wird Nachbar (für $\mathcal{B}_n$) genannt, falls $M^{-1}(\mathcal{B}_n) \cap \mathcal{B}_n \neq \emptyset$. Jeder Nachbar $M \in \Delta_n$ (für $\mathcal{F}_n$) liegt in einem solchen Nachbarn $\Gamma_n M$ (für $\mathcal{B}_n$), für den sogar gilt, daß $M^{-1}(\mathcal{B}_n) \cap \mathcal{F}_n \neq \emptyset$ ist. Diese Nachbarn (für $\mathcal{B}_n$) werden jetzt gesucht:

Zwei Modulsubstitutionen $M, N \in \Delta_n$ liegen genau dann in derselben Rechtsnebenklasse von Γ_n in Δ_n, wenn es ein $U \in \Phi_n$ gibt, so daß für die zweiten Zeilen $(C(M) \ \ D(M))$ und $(C(N) \ \ D(N))$ gilt:

$$C(M) = UC(N) \quad , \quad D(M) = UD(N) \quad ,$$

und dies ist äquivalent dazu, daß für alle $Z \in \mathfrak{H}_n$

$$\operatorname{abs}(C(M)Z + D(M)) = \operatorname{abs}(C(N)Z + D(N)) \qquad Z \in \mathfrak{H}_n$$

gilt [Siegel].

Sei Π_n die Menge aller solcher Äquivalenzklassen $\{C \ \ D\}$ von zweiten Zeilen von Modulsubstitutionen und $\Pi_n' := \Pi_n - \{\{0 \ \ E\}\}$. Dann ist (in Ergänzung zu (14))

(15) $$\Gamma_n M \longleftrightarrow \{C(M) \ \ D(M)\} \qquad M \in \Delta_n$$

eine Bijektion von der Menge der Rechtsnebenklassen von Γ_n in Δ_n auf Π_n, und (9) wird zu

(16) $$\mathcal{B}_n = \{ Z \in \mathcal{F}_n \mid \text{für alle } \{C \ \ D\} \in \Pi_n' \text{ ist } \operatorname{abs}(CZ + D) \geq 1 \} .$$

Ist für ein $\{C \ \ D\} \in \Pi_n'$ $0 < \operatorname{Rang} C = r \leq n$, so gibt es $M \in \Delta_n$ mit $(C(M) \ \ D(M)) \in \{C \ \ D\}$, $L \in \Omega_n$ (mit $A(L)^{-1} =: V \in \Phi_n$ und damit $D(L) = V'$), $\{C_r \ \ D_r\} \in \Pi_r$, so daß (vgl. [Maaß])

(17) $$(C(ML) \ \ D(ML)) = (C(M)V^{-1} \ \ D(M)V') = \left(\begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0^r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0^r & E_{n-r} \end{pmatrix}\right) .$$

Definiert man für jede nichtganze Modulsubstitution M ($\in \Delta_n \setminus \Gamma_n$) das charakterisierende Paar als $(\operatorname{Rang} C(M), \operatorname{abs} C_{\operatorname{Rang} C(M)}(M))$, für jede ganze ($\in \Gamma_n$) als $(0,1)$, so gilt

<u>Lemma 1</u>: Für jedes $M \in \Delta_n$ ist das charakterisierende Paar wohldefiniert und invariant unter Multiplikation mit ganzen Modulsubstitutionen von links und rechts.

Für $M \in \Delta_n$ wird der Rechtsnebenklasse $\Gamma_n M$, dem Bild $M^{-1}(\mathcal{L}_n)$ und der Klasse $\{C(M)\ D(M)\} \in \Pi_n$ das charakterisierende Paar von M zugeordnet, und es ist unter den Bijektionen (14) und (15) invariant.

Lemma 2: Definiert man für $\{C\ D\} \in \Pi_n'$ die Fläche

(18) $$\mathcal{R}_{CD} := \{ Z \in \mathcal{L}_n \mid \operatorname{abs}(CZ + D) = 1 \} ,$$

so ist für $M \in \Delta_n \setminus \Gamma_n$ $\quad M^{-1}(\mathcal{L}_n) \cap \mathcal{L}_n = \mathcal{R}_{C(M)D(M)}$.

Beweis: Sei für $Z \in \mathcal{H}_n$ $\det Y$ als die Höhe von Z bezeichnet. In [Siegel] wird gezeigt, daß Z genau dann in $\mathcal{L}_n$ liegt, wenn es unter allen seinen Bildern unter Δ_n maximale Höhe hat (das Maximum existiert), und daß folgende Gleichung gilt:

$$\det(\operatorname{Im}(M(Z))) = \det Y \cdot \operatorname{abs}(C(M)Z + D(M))^{-2} \qquad M \in \Delta_n .$$

Ist nun $Z \in \mathcal{R}_{C(M)D(M)} \subset \mathcal{L}_n$, so sind die Höhen von $M(Z)$ und Z gleich; die von Z ist maximal; also liegt auch $M(Z)$ in $\mathcal{L}_n$. Da $M(\mathcal{R}_{C(M)D(M)}) \subset \mathcal{L}_n$, gilt $\mathcal{R}_{C(M)D(M)} \subset M^{-1}(\mathcal{L}_n)$.

Ist umgekehrt $Z \in M^{-1}(\mathcal{L}_n) \cap \mathcal{L}_n$, so gilt $M(Z) \in \mathcal{L}_n$, d. h. die Höhen von Z und $M(Z)$ sind maximal, also gleich. Also ist $\operatorname{abs}(C(M)Z + D(M)) = 1$ und damit $Z \in \mathcal{R}_{C(M)D(M)}$. qed

Genau dann hat man also einen Nachbarn $\Gamma_n M$ ($\neq \Gamma_n$) für $\mathcal{L}_n$, wenn $\mathcal{R}_{C(M)D(M)} \neq \emptyset$ ist. Es sind nur diejenigen von

Interesse, für die $\mathcal{R}_{C(M)D(M)} \cap \mathcal{F}_n \neq \emptyset$ ist, da ja Nachbarn für $\mathcal{F}_n$ gesucht werden - und zwar für den Fall $n = 2$, und man kann daher die Untersuchungen über die Randflächen von $\mathcal{F} := \mathcal{F}_2$ in [Gottschling 1959, 1961] heranziehen. Ab jetzt ist bei fehlendem Index $n = 2$ zu setzen.

Zur Definition von $\mathcal{F}$ werden zunächst für $\mathcal{G} := \mathcal{G}_2$ folgende Ungleichungen gemäß (7) gebraucht: Ist $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} := \mathcal{H}_2$ mit $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$, so ist

(19) $$|x_i| \leq \frac{1}{2} , \quad i = 1, 2, 3, \qquad 0 \leq 2y_3 \leq y_1 \leq y_2 .$$

Dazu kommen noch nach [Gottschling 1959] 19 notwendige Ungleichungen, wie sie in (16) verwendet werden (man vergleiche auch (17) und (18)), davon 15 mit dem charakterisierenden Paar (2,1) :

(20) $$\operatorname{abs}(Z + S) \geq 1 \quad \text{mit} \quad S \in \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \} \qquad Z \in \mathcal{G} ,$$

und 4 mit dem charakterisierenden Paar (1,1) :

(21) $$\operatorname{abs}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VZ + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V'^{-1}) \geq 1 \quad \text{mit} \quad (V,d) \in \{ (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0), (\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm 1) \} \qquad Z \in \mathcal{G} .$$

Lemma 3: **Außer den 19 Flächen $\mathcal{R}_{CD}$ der Form (18), für die $\{C\ D\}$ in (20) und (21) definiert ist, enthalten noch genau folgende 7 Flächen der Form (18) Punkte aus $\mathcal{F}$:**

(22) $\mathcal{R}_{ES}$ mit $S = \pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

(23) $\mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)V\left(\begin{smallmatrix}d & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)V^{-1}}$ mit $(V,d) \in \left\{ \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \pm 1\right), \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \pm 1\right), \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 0\right) \right\}$.

<u>Beweis</u>: Die beiden Punkte $Z_1^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & y\\ y & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ (wo $y \approx 0{,}172356$ Lösung der Gleichung $y^4 - \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{3}y + \frac{5}{16} = 0$ ist) liegen in $\mathcal{F}$, wie man durch Einsetzen in die Ungleichungen (19) - (21) überprüft. Z_1^+ liegt auf den drei Flächen in (22) und (23), für die S bzw. d negativ ist, Z_1^- auf den drei, für die S bzw. d positiv ist.

Entsprechend liegen die beiden Punkte $Z_2^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$ in $\mathcal{F}$ und auf der Fläche (23), für die $d = 0$ ist.

Für alle $\{C\ \ D\} \in \Pi' := \Pi_2'$, die in (20) - (23) nicht vorkommen, gilt

(24) $\operatorname{abs}(CZ + D) \geq 1$ für alle $Z \in \mathcal{F}$.

Dies ist in [Gottschling 1959] nachgewiesen, meist explizit: Aus (21) folgt für $i = 1, 2$ $|z_i| \geq 1$, und wegen (19) ist $y_i \geq \sqrt{3}/2$ für alle $Z \in \mathcal{F}$.

Sei $\operatorname{Rang} C = 1$ und in (17) sei $C_1 = (c)$, $D_1 = (d)$ und die erste Zeile von $V = A(L)^{-1}$ das Paar $(p\ \ q)$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$. Setzt man $u = c(p^2x_1 + q^2x_2 + 2pqx_3) + d$ und $v = c(p^2y_1 + q^2y_2 + 2pqy_3)$, so ist $\operatorname{abs}^2(CZ + D) = u^2 + v^2$.

Ist $|c|$, $|p|$ oder $|q| > 1$ oder $p = q = \pm 1$, so ist $v^2 > 1$; sei $|c| = 1$: für $p = 0$ oder $q = 0$ und $|d| > 1$ ist $u^2 > 1$. Für $p = -q = \pm 1$ ist $v^2 \geq 3/4$; für $|d| > 2$ ist $u^2 \geq 1$. In all diesen Fällen ist die Ungleichung (24) erfüllt. Dies gilt auch für $p = -q = \pm 1$ und $|d| = 2$, allerdings ist der Beweis etwas umständlicher:

Man setze $e = -cd/2$, $S = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Es kann wegen $v^2 \geq 3/4$ angenommen werden, daß $u^2 \leq 1/4$ und damit $1/4 \leq -ex_3 \leq 1/2$. In [Gottschling 1959] wird gezeigt, daß $F_e(Z) := |z_1 + z_2 - 2z_3 - 2e|^2 - \operatorname{abs}^2(Z + eS) \geq 0$ für $Z \in \mathcal{F}^e := \{Z \in \mathcal{F} \mid 1/4 \leq -ex_3 \leq 1/2\}$ und daß aus $F_e(Z) = 0$ folgt, daß $x_3 + e = 0$ ist [S. 111, Z. 6, 16] . Also gilt in ganz $\mathcal{F}^e$ $|z_1 + z_2 - 2z_3 - 2e|^2 > \operatorname{abs}^2(Z + eS) \geq 1$, und auch hier ist (24) erfüllt.

Ist $\operatorname{Rang} C = 2$, so folgt aus $\operatorname{abs} C > 1$ sofort (24). Also kann $\operatorname{abs} C = 1$ angenommen werden, und ein Repräsentant von $\{C\ \ D\}$ ist $(E\ \ S) = (C^{-1}C\ \ C^{-1}D)$ mit $S = \begin{pmatrix}s_1 & s_3\\ s_3 & s_2\end{pmatrix} \in \Psi := \Psi_2$ wegen $CD' = DC'$ nach (1). Für die Matrizen S , die nicht in (20) oder (22) aufgezählt sind, ist in [Gottschling 1959] die Ungleichung (24) explizit nachgewiesen, außer für $S = e\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ mit $e = \pm 1$: Sei $e = 1$ (für $e = -1$ analog); für die $Z \in \mathcal{F}$, für die $x_1 + x_2 > 2\sqrt{3} - 2$ ist, ist $\operatorname{abs}^2(Z + S) \geq \frac{3}{4}(x_1 + x_2 + 2)^2 > 1$ nach [S. 113, Z. 8] , und sonst ist (24) erfüllt, weil die Ungleichung auf [S. 113, Z. 15] in Verbindung mit der echten Ungleichung auf [S. 113, Z. 13] eine echte Ungleichung ist.

<u>qed</u>

Also enthalten genau diejenigen Nachbarn ΓN (für $\mathcal{L} := \mathcal{L}_2$) Punkte aus $\mathcal{F}$, für die ein Repräsentant in der in (12) definierten Menge Ξ liegt, und es ergibt sich direkt die Aussage von Satz 1.

Es folgt schließlich noch Lemma 4: Für jeden Nachbarn ΓN (für $\mathcal{L}$) gilt: ΓN^{-1} ist Nachbar; für $N \notin \Gamma$ gibt es $G, H \in \Gamma$, so daß (vgl. (5), (11)) $N = HPG$ oder $N = HQG$; umgekehrt definiert jedes solche N einen Nachbarn (für $\mathcal{L}$); die charakterisierenden Paare von N und N^{-1} sind gleich und liegen in $\{(0,1), (1,1), (2,1)\}$.

Beweis: Ist ΓN Nachbar, dann gibt es $Z \in N^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$. Dann ist $N(Z) \in N(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$, und ΓN^{-1} ist Nachbar. Weiterhin gibt es $F \in \Gamma$, so daß $F(Z) \in \mathcal{F}$. Also ist $FN^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, und es gibt $H \in \Gamma$, so daß $H^{-1}NF^{-1} \in \Xi$, und damit ist $N \in \Gamma$, oder es gibt $G \in \Gamma$, so daß $N = HPG$ oder $N = HQG$. Daraus, aus Lemma 1 und $P^{-1} = PG_5$ und $Q^{-1} = Q$ folgt die Aussage über die charakterisierenden Paare. Jedes $H \in \Gamma$ definiert einen Nachbarn (für $\mathcal{L}$). Für $N = HRG$, $H, G \in \Gamma$, $R \in \{P, Q\}$, gibt es $Z \in R^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$, und es ist $HR(Z) \in \mathcal{L} \cap HR(\mathcal{L})$, $Z \in R^{-1}H^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$, $G^{-1}(Z) \in G^{-1}R^{-1}H^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}$, also definiert HRG einen Nachbarn (für $\mathcal{L}$).

qed

Beweis von Satz 2:

Alle vorkommenden Gleichungen gelten in Δ. Wird von einem Element von Δ angenommen, daß es in einer Untergruppe liegt, so soll es ein Wort in den Erzeugenden dieser Untergruppe sein. In den Relationen (10) $N_i = N_k N_j^{-1}$ ($N_i, N_j, N_k \in \Delta$ Nachbarn) gibt es für N_j, N_k drei Möglichkeiten: Beide, genau einer oder keiner liegt in Γ.

1. Beide Nachbarn in Γ

Dann ist auch $N_i \in \Gamma$, und es handelt sich um alle Relationen, die in Γ liegen.

Die Translationen $K \in \Sigma_n$ operieren auf $\mathcal{H}_n$ (vgl. (2)) durch $K(Z) = Z + B(K)$, so daß $\Sigma_n \cong (\Psi_n,+)$. Es ist $(\Psi,+) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit den drei Erzeugenden G_1, G_2, G_3 (vgl. (3)), und die Relationenmenge wird von

(i) $G_1G_2 = G_2G_1$
(ii) $G_1G_3 = G_3G_1$
(xvii) $G_2G_3 = G_3G_2$

erzeugt. Die Substitutionen $L \in \Omega_n$ operieren auf $\mathcal{H}_n$ (vgl. (2)) und auch auf dem unter (8) definierten Raum $\mathcal{Y}_n$ der positiven, reellen, symmetrischen nxn-Matrizen durch $L(Z) = A(L)ZA(L)'$, und damit ist $\Omega_n \cong \Phi_n/\{\pm E_n\}$. Ein Fundamentalbereich für die Operation von Ω auf $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_2$

ist $\mathfrak{U} := \{iY \in \mathfrak{Y} \mid 0 \leq 2y_3 \leq y_1 \leq y_2\}$ (vgl. (19)) mit den Nachbarn $I := I_2$, $G_4, G_5, G_6, G_4G_5, G_4G_6, G_6G_4, G_4G_6G_4$ (für $\mathfrak{U}$) (vgl. (4)). Auf das Tripel $(\mathfrak{Y}, \Omega, \mathfrak{U})$ können die Ergebnisse aus [Behr 1962] angewandt werden: Ein Erzeugendensystem für Ω ist

(25) $\quad \{G_4, G_5, G_6\}$,

und die Relationen werden erzeugt von

$$
\begin{array}{rl}
\text{(iii)} & G_4^2 = I \\
\text{(iv)} & G_5^2 = I \\
\text{(v)} & (G_4G_5)^2 = I \\
\text{(vi)} & (G_4G_6)^3 = I \\
\text{(xviii)} & G_6^2 = I \quad .
\end{array}
$$

Für jede ganze Substitution $G \in \Gamma_n$ gibt es Translationen $H, K \in \Sigma_n$ und eine Substitution $L \in \Omega_n$, so daß

$$
G = KL = LH = \begin{pmatrix} A(L) & B(K)A(L)'^{-1} \\ 0 & A(L)'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(L) & A(L)B(H) \\ 0 & A(L)'^{-1} \end{pmatrix}
$$
$$
G \in \Gamma_n \text{ , } H, K \in \Sigma_n, \; L \in \Omega_n \quad ,
$$

und für jedes $H \in \Sigma_n$ und $G \in \Gamma_n$ ist $G^{-1}HG \in \Sigma_n$. Also ist Γ_n das semidirekte Produkt von Σ_n und Ω_n , und Γ wird von $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ erzeugt, und alle Relationen in Γ , die nicht in Σ oder Ω liegen, werden von den folgenden erzeugt:

$$
\begin{array}{rl}
\text{(vii)} & G_5G_1G_5 = G_1 \\
\text{(viii)} & G_5G_3G_5 = G_3^{-1} \\
\text{(ix)} & G_6G_1G_6 = G_1G_2G_3 \\
\text{(x)} & G_4G_1G_4 = G_2 \\
\text{(xi)} & G_4G_3G_4 = G_3 \\
\text{(xix)} & G_5G_2G_5 = G_2 \\
\text{(xx)} & G_4G_2G_4 = G_1 \\
\text{(xxi)} & G_6G_2G_6 = G_2 \\
\text{(xxii)} & G_6G_3G_6 = G_2^{-2}G_3^{-1} \quad .
\end{array}
$$

Die Relationen (xvii) und (xix) - (xxii) ergeben sich aus den Relationen (i) - (xi) und (xviii) folgendermaßen:

$$
\begin{array}{rl}
\text{(xvii)} & G_2G_3 = G_2G_4G_3G_4 = G_4G_1G_3G_4 = G_4G_3G_4G_2 = G_3G_2 \\
\text{(xix)} & G_5G_2 = G_5G_4G_1G_4 = G_4G_1G_4G_5 = G_2G_5 \\
\text{(xx)} & G_4G_2 = G_4G_4G_1G_4 = G_1G_4 \\
\text{(xxi)} & G_6G_2 = G_6G_4G_1G_4 = G_4G_6G_4G_6G_1G_4 = G_4G_6G_4G_1G_2G_3G_6G_4 = \\
 & G_4G_6G_1G_2G_3G_4G_6G_4 = G_4G_1G_6G_4G_6G_4 = G_2G_4G_6G_4G_6G_4 = G_2G_6 \\
\text{(xxii)} & G_6G_3G_2G_6G_3G_2 = G_1G_6G_1^{-1}G_1G_6G_1^{-1} = I \Rightarrow G_6G_3 = G_3^{-1}G_2^{-2}G_6 \quad .
\end{array}
$$

Also werden die Relationen in Γ von den Relationen (i) - (xi) und (xviii) erzeugt.

2. Genau ein Nachbar in Γ

Für alle Nachbarn $K \in \Gamma$ und $M \in \Delta - \Gamma$ ist zu untersuchen, ob KM oder MK wieder Nachbar ist. Nach Satz 1 gibt es für jeden Nachbarn $M \in \Delta - \Gamma$ ganze Modulsubstitutionen $H, G \in \Gamma$, so daß mit $R \in \{P, Q\}$ $M = HRG$ ist (vgl. (5), (11)); und ist KM oder MK ein Nachbar, so gibt es $J, L \in \Gamma$, so daß $KM = JRL$ (analog MK) ist (nach Lemma 1). Es sind also alle Gleichungen der Form $J^{-1}KHR = RLG^{-1}$ oder $J^{-1}HR = RLK^{-1}G^{-1}$ bzw.

(26) $\quad GQ = QH$

(27) $\quad GP = PH \qquad\qquad G, H \in \Gamma$ (in neuer Bedeutung)

zu untersuchen. Für alle $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Delta$ ist

$$MQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -D & C \\ B & -A \end{pmatrix} = QM'^{-1} .$$

Mit $M = G \in \Gamma$ und $M'^{-1} = H \in \Gamma$ folgt in (26) $C = B(H) = 0$ und $B = C(H) = 0$ und damit $G, H \in \Omega$, d. h. (26) liefert nur dann Relationen, wenn $G, H \in \Omega$. Nun ist

(xxiii) $\quad G_4Q = QG_4$

(xxiv) $\quad G_5Q = QG_5$

(xxv) $\quad G_6Q = QG_4G_5G_6G_5G_4$

(xxvi) $\quad Q = Q^{-1}$ (ergibt sich eigentlich erst in 3.),

und diese Relationen erzeugen mit denen aus Γ alle Relationen der Form (26).

Jede Relation (27) kann von den Relationen aus Γ und $FJP = PKL$ mit $J = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Sigma$, $F = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix} \in \Omega$, also

$$FJP = \begin{pmatrix} U\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & U\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ U'^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & U'^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V & \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) V'^{-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) V'^{-1} \end{pmatrix} = PKL ,$$

erzeugt werden.

Wäre nun in $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$ oder $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix}$ $s_1 \neq 0$ oder $t_1 \neq 0$, so wäre Rang $A(FJP) = 2 \neq 1 =$ Rang $A(PKL)$ oder Rang $D(FJP) = 1 \neq 2 =$ Rang $D(PKL)$, also kann eine Relation (27) von Relationen aus Γ und einer Relation $FJP = PKL$, $J, K \in \Sigma$, $F, L \in \Omega$ erzeugt werden, wo in den Wörtern J, K, F, L das Erzeugende G_1 nicht vorkommt.

Weiterhin ist immer $c_{12}(FJP) = c_{22}(FJP) = c_{21}(PKL) = c_{22}(PKL) = 0$, woraus wegen $C(FJP) = \pm C(PKL)$ folgt, daß immer nur $c_{11}(FJP) = \pm c_{11}(PKL)$ von 0 verschieden sein darf (und zwar nach Lemma 1 dem Betrag nach 1 sein muß). Daraus folgt, daß V, U gleich $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \pm 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{Z}$ sein müssen. Dann lassen sich F und L mit Hilfe der Relationen aus Ω als Produkte allein in G_5 und G_6 schreiben, denn es ist

$$A((G_5G_6)^{-b}) = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A((G_5G_6)^{-b}G_5) = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & -1\end{pmatrix} \quad .$$

Also werden die Relationen (27) von denen aus Γ und solchen erzeugt, wo $GP = PH$, G, H Wörter in G_2, G_3, G_5, G_6 , ist, nämlich

(xii) $G_6P = PG_5G_3$
(xiii) $G_2P = PG_2$
(xxvii) $G_5P = PG_5$
(xxviii) $P^{-1} = PG_5$ (ergibt sich eigentlich erst in 3.) ,

mit denen (und denen aus Γ) noch folgen: $G_3P = PG_6P^2 = PG_6G_5$, $G_2^{-1}P = PG_2^{-1}$, $G_3^{-1}P = PG_5G_6$ und die Relation (xviii) erzeugt wird: $G_6^2 = PG_5G_3PG_5PG_5G_3PG_5 = PG_5G_3G_5G_3PG_5 = P^2G_5 = I$.

3. Beide Nachbarn nicht in Γ

Jetzt ist für zwei Nachbarn $N_2, N_3 \in \Delta - \Gamma$ zu untersuchen, ob $N_1 := N_3N_2$ wieder Nachbar ist. Für $j = 1, 2, 3$ ist N_j höchstens dann Nachbar, wenn es $H_j \in \Gamma$, $M_j \in \Xi$ gibt, so daß $N_j = H_jM_j$ (vgl. (12)). Man erhält alle solche Gleichungen, indem man alle Gleichungen $M_1M_2^{-1} = H_1^{-1}H_3M_3H_2$ betrachtet, und diese erhält man, indem man alle Gleichungen

(28) $M_1M_2^{-1} = N$ $\quad M_1, M_2 \in \Xi$, $N \in \Delta$ mit ΓN Nachbar für $\mathcal{B}$

bildet. Mit $M_1 = P$ und $M_2 = PG_4$ ergibt sich

$Q = PG_4PG_4$,

und damit wird Δ bereits von $\{P, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ erzeugt. Mit den Relationen

(xiv) $P^2 = G_5$
(xv) $(PG_1)^3 = G_5$
(xvi) $(PG_4)^2 = (G_4P)^2$

werden die Relationen (xxiii) - (xxviii) von dem Relationensystem (13) erzeugt:

(xxiii) $G_4Q = G_4PG_4PG_4 = G_4G_4PG_4P = PG_4PG_4G_4 = QG_4$
(xxiv) $G_5Q = G_5PG_4PG_4 = PG_4PG_4G_5 = QG_5$ (mit (xxvii))

(xxv) $G_6Q = G_6PG_4PG_4 = PG_5G_3G_4PG_4 = G_5PG_4G_3PG_4 =$
$= G_5PG_4PG_6G_5G_4 = PG_4PG_4G_4G_5G_6G_5G_4 =$
$= QG_4G_5G_6G_5G_4$

(xxvi) $Q = PG_4PG_4 = G_4PG_4PG_5G_5 = G_4PG_5G_4PG_5 = G_4^{-1}P^{-1}G_4^{-1}P^{-1} =$
$(PG_4PG_4)^{-1} = Q^{-1}$ (mit (xxvii) und (xxviii))

(xxvii) $G_5P = P^3 = PG_5$

(xxviii) $G_5PP = G_5G_5 = I \Rightarrow G_5P = P^{-1}$.

Nun gilt zum Schluß: Alle in (28) noch möglichen Relationen werden von dem Relationensystem (13) erzeugt: Jede Relation (28) läßt sich nämlich zurückführen auf eine der Form $QGQ = N$, $PGP = N$ oder $QGP = N$ $(G \in \Gamma$, ΓN Nachbar für $\mathcal{L}$), wenn man beachtet, daß $P^{-1} = G_5P$ und mit jeder Relation auch ihre Inverse eine Relation ist und z. B. $(PGQ)^{-1} = QG^{-1}G_5P$ gilt.

3.1. Relationen der Form $QGQ = N$

Es seien in (28) M_1 , $M_2 \in \Xi_1$ (vgl. (12)), d. h. (28) hat die Form $QGQ = N$ $(G \in \Gamma$, ΓN Nachbar für $\mathcal{L}$).

Dann gilt Lemma 5: Diese Relationen werden erzeugt von dem Relationensystem (13) und Relationen der Form

(29) $QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}Q = N$ G_k definiert wie in (3), $s_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, 3,$ $2 \geq s_2 \geq 0$, $s_2 \geq |s_1|$, $2 \geq s_3 \geq 0$, ΓN Nachbar für $\mathcal{L}$.

Beweis: Durch Überprüfen von Ξ_1 stellt man fest, daß Lemma 5 jedenfalls richtig ist, wenn man in (29) lediglich $|s_k| \leq 2$, $k = 1, 2, 3,$ verlangt. Mit ΓN sind auch ΓN^{-1} , ΓG_4NG_4 und ΓG_5NG_5 Nachbarn für $\mathcal{L}$ (Lemma 4). Ist $QG_1^{t_1}G_2^{t_2}G_3^{t_3}Q = M$ eine Relation mit $|t_k| \leq 2$, $k = 1, 2, 3,$ entsteht sie mit geeigneten s_1 , s_2 , s_3 , die den Bedingungen in (29) genügen, aus einer Relation (29) $QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}Q = N$ durch $G_5^c(G_4^dQG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}QG_4^d)^eG_5^c = G_5^c(G_4^dNG_4^d)^eG_5^c$, wo $e \in \{\pm 1\}$, $c, d \in \{0, 1\}$, und zwar $d = 1 \Leftrightarrow |t_1| > |t_2|$, danach $e = -1 \Leftrightarrow (d = 0 \wedge t_2 < 0) \vee (d = 1 \wedge t_1 < 0)$, danach $c = 1 \Leftrightarrow et_3 < 0$, weil mit den Relationen aus Γ und (xxiii) - (xxvi) gilt: $(QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}Q)^{-1} = QG_1^{-s_1}G_2^{-s_2}G_3^{-s_3}Q$, $G_4QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}QG_4 = QG_1^{s_2}G_2^{s_1}G_3^{s_3}Q$ und $G_5QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{s_3}QG_5 = QG_1^{s_1}G_2^{s_2}G_3^{-s_3}Q$, und jede Relation $G_5^cG_4^dN^eG_4^dG_5^c = M$ (mit ΓM , ΓN Nachbarn für $\mathcal{L}$) nach Lemma 4 und den beiden ersten Teilen des Beweises von Satz 2 vom Relationensystem (13) erzeugt wird. <u>qed</u>

Allgemein ist $QGQ = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ S & -E \end{pmatrix} = N$ mit $B(G) = S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$ mit $\text{abs } S = |s_1s_2 - s_3^2|$. Nur dann ist ΓN Nachbar für $\mathcal{L}$, wenn im charakterisierenden Paar (r,a) von N $a = 1$ ist. Für $s_3 = 2$ oder $s_2 = |s_1| = 2$ ist $\text{abs } S > 1$ oder $r = 1$ und $\text{abs } S_1 > 1$ (vgl. (17)); also kann sogar $1 \geq s_3, |s_1|$ angenommen werden. Genau für $(s_1, s_2, s_3) \in \{(1,2,1), (0,2,1), (1,1,1), (0,1,1), (1,1,0), (0,1,0), (-1,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$ ergibt sich $a = 1$; d. h. jede Relation kann mit dem Relationensystem (13) auf eine Relation $QGQ = N$ (ΓN Nachbar) mit $G \in \Xi_4 \cup \Xi_5$, wo $\Xi_4 := \{G_1G_2G_2G_3,\ G_2G_2G_3,\ G_1G_2G_3,\ G_1^{-1}G_2\}$ und $\Xi_5 := \{G_2,\ G_1G_2,\ G_2G_3,\ G_3, I\}$ ist, zurückgeführt werden. Mit den Rechnungen

a) $QG_1G_2G_3Q = QG_6G_1G_6Q = G_4G_5G_6G_5G_4QG_1QG_4G_5G_6G_5G_4 =$
$G_4G_5G_6G_5\underline{QG_2Q}G_5G_6G_5G_4$

b) $QG_1G_2G_2G_3Q = QG_6G_1G_2G_6Q = G_4G_5G_6G_5\underline{QG_1G_2Q}G_5G_6G_5G_4$

c) $QG_2G_2G_3Q = QG_6G_3^{-1}G_6Q = G_4G_5G_6QG_5G_4G_3^{-1}G_4G_5QG_6G_5G_4 =$
$G_4G_5G_6\underline{QG_3Q}G_6G_5G_4$

d) $(QG_2G_1^{-1}Q)^{-1} = QG_1G_2^{-1}Q = QG_6G_1G_3G_6Q = G_4G_5G_6G_5QG_4G_1G_3G_4QG_5G_6G_5G_4$
$= G_4G_5G_6G_5\underline{QG_2G_3Q}G_5G_6G_5G_4$

folgt, daß G sogar in Ξ_5 angenommen werden kann. Und für solche Relationen (29) wird im folgenden gezeigt, daß sie vom Relationensystem (13) erzeugt werden:

a) $Q^2 = (PG_4)^2(G_4P)^2 = PG_4PPG_4P = PG_4G_5G_4P = G_5PG_4G_4P = G_5PP = I$

b) $QG_2Q = G_4PG_4PG_2PG_4PG_4 = G_4PG_4G_2PPG_4PG_4 = G_5G_4PG_1PG_4 =$
$G_5G_4G_1^{-1}PG_1^{-1}G_4$

c) $QG_1G_2Q = G_4PG_4PG_1G_2PG_4PG_4 = G_4PG_4G_2PG_1PG_4PG_4 =$
$G_4PG_4G_2G_1^{-1}PG_1^{-1}G_4PG_4 = G_1^{-1}G_4PG_4G_2PG_4PG_4G_1^{-1} =$
$G_1^{-1}G_4PG_4G_2G_4PG_4PG_1^{-1} = G_1^{-1}G_4PG_1PG_4PG_1^{-1} =$
$G_1^{-1}G_4G_1^{-1}PG_1^{-1}G_4PG_1^{-1} = G_1^{-1}G_2^{-1}G_4PG_4PG_2^{-1}G_1^{-1} = G_2^{-1}G_1^{-1}QG_1^{-1}G_2^{-1}$

d) $QG_3Q = G_4PG_4PG_3PG_4PG_4 = G_4PG_4G_5G_6G_5G_4PG_4 = G_5G_4PG_4G_6G_4PG_4G_5 =$
$G_5G_4PG_6G_4G_6PG_4G_5 = G_5G_4G_3PG_5G_4G_5PG_3G_4G_5 =$
$G_5G_3G_4PG_4PG_4G_3G_5 = G_3^{-1}G_5G_4QG_5G_3^{-1} = G_3^{-1}G_4QG_3^{-1}$

e) $QG_2G_3Q = G_4PG_1G_4PG_3PG_4PG_4 = G_4PG_1G_4G_5G_6G_5G_4PG_4 =$
$G_5G_4PG_1G_4G_6G_4PG_4G_5 = G_5G_4PG_1G_6G_4G_6PG_4G_5 =$
$G_5G_4PG_6G_1G_2G_3G_4G_6PG_4G_5 = G_5G_4G_3G_5PG_3G_2G_4G_2PG_5G_3G_4G_5 =$
$G_5G_4G_3G_6G_2PG_4PG_2G_3^{-1}G_4 = G_1G_3^{-1}G_5G_4G_6QG_3^{-1}G_1$,

3.2. Relationen der Form $PGP = N$

Es seien in (28) M_1, $M_2 \in \Xi_2 \cup \Xi_3$ (vgl. (12)), d. h. (28) hat die Form

(30) $PGP = N$ $\qquad G \in \Gamma$, ΓN Nachbar für $\mathfrak{L}$.

Sind M_1 und M_2 beide in Ξ_2 (oder beide in Ξ_3), so ist GG_5 oder $G^{-1}G_5$ in $\{I, G_1^{-1}, G_2^{-1}G_4, G_2^{-1}G_4G_2, G_2G_4G_2^{-1}, G_1^{-2}, G_4, G_2G_4, G_2G_4G_2\}$ (vgl. (12)), und jede solche Relation $PGP = N$ wird von den Relationen $PG_5P = I$, $PG_4G_5P = QG_4G_5$, $PG_1^{-1}G_5P = G_1PG_1$ und denen aus den Fällen 1. und 2. erzeugt, weil G_5 mit G_1 , G_2 , G_4 , P kommutiert und G_2 mit P ; bzw. für $G = G_1^{-2}G_5$ ist $C(N) = \pm\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, N ist kein Nachbar, und es liegt keine lokale Relation vor.

In den Fällen, wo $M_1 \in \Xi_2$ und $M_2 \in \Xi_3$ (oder umgekehrt) ist, ist $G \in \Xi_6 \cup \Xi_7 \cup \Xi_8$ mit $\Xi_6 := \{G_1^kG_6G_4 \mid k = -1, 0, 1\}$, $\Xi_7 := \{G_2^kH \mid k = \pm 1 , H \in \Xi_6\}$, $\Xi_8 := \{G_1^kG_4G_6G_4 \mid k = 0, 1, 2\}$ (oder $G^{-1} \in \Xi_6 \cup \Xi_7 \cup \Xi_8$). Ist $G \in \Xi_7$, so wird eine Relation (30) von dem Relationensystem (13), insbesondere $G_2P = PG_2$, und denjenigen erzeugt, für die $G \in \Xi_6$ ist. Ist $G \in \Xi_8$, dann ist $PGP = PG_1^kG_4G_6G_4P = PG_1^kG_6G_4G_6P = PG_1^kG_6G_4PG_5G_3$, und die Relationen (30) mit $G \in \Xi_8$ können vom Relationensystem (13) und Relationen $PG_1^kG_6G_4P = M$ (ΓM Nachbar für $\mathfrak{L}$) erzeugt werden. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$PG_1^kG_6G_4P = PG_6G_1^kG_2^kG_3^kG_4P = G_2^kG_3G_5PG_3^kG_4PG_2^k = G_2^kG_3G_5(G_5G_6)^kG_4QG_2^k ,$$

Und damit ist nachgewiesen, daß auch im Fall 3.2. die Gleichungen (28) keine neuen Relationen liefern.

3.3. Relationen der Form $QGP = N$

Es seien in (28) $M_1 \in \Xi_1$, $M_2 \in \Xi_2 \cup \Xi_3$ (oder umgekehrt) (vgl. (12)), d. h. (28) hat die Form

(31) $$QGP = N \qquad G \in \Gamma, \ \Gamma N \text{ Nachbar für } \mathcal{B} .$$

Es existieren $L \in \Omega$ und $K \in \Sigma$, so daß $G = LK$, und wegen der Relationen (xxiii) - (xxvi) gibt es $J \in \Omega$, so daß $N = QGP = QLKP = JQKP$. Daher sind alle Relationen (31) von dem Relationensystem (13) und solchen Relationen erzeugt, in denen

$$G = G_1^{s_1} G_2^{s_2} G_3^{s_3} \in \Sigma \qquad s_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, 2, 3$$

ist, die sich ihrerseits noch (mit vor allem den Relationen (xii), (xiii), (xxvii) und (xxviii)) auf Relationen der Form $N = QG_1^{s_1}PH$ ($H \in \Gamma$) zurückführen lassen. Nun ist $C(QG_1^{s}P) = \pm\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{Z}$. Für $|s| \geq 2$ kann N kein Nachbar sein, für $s = 0$ ist $QP = G_4PG_4PP = G_4PG_4G_5$, für $|s| = 1$ ist

a) $QG_1P = G_4PG_4PG_1P = G_4PG_4G_1^{-1}PG_1^{-1} = G_1^{-1}G_4PG_4PG_1^{-1} = G_1^{-1}QG_1^{-1}$

b) $QG_1^{-1}P = G_4PG_4PG_1^{-1}P = G_4PG_4G_1PG_1G_5 = G_1G_4PG_4PG_1G_5 = G_1QG_1G_5$,

so daß also auch im Fall 3.3. die Gleichungen (28) keine neuen Relationen liefern.

Beweis der Folgerung

Mit den Relationen (x), (xii) und (xiv) aus dem System (13) ergeben sich $G_2 = G_4G_1G_4$, $G_3 = PG_5P$, $G_5 = P^2$, so daß damit erneut bewiesen ist, daß Δ von einer vierelementigen Menge, nämlich $\{P, G_1, G_4, G_6\}$ erzeugt werden kann (vgl. [Maaß]). Dann ergeben sich die Relationen (13) aus dem System (6) meist direkt, bzw. durch:

(v) $$(G_4G_5)^2 = (G_4P^2)^2 = G_4PG_4G_4PG_4P^2 = G_4PG_4PG_4PG_4P = I$$

(viii) $$(G_3G_5)^2 = PG_6PG_5PG_6PG_5 = PG_6P^4G_6P^3 = I$$

(ix) $$G_6G_1G_6 = G_6G_1(G_4G_6)^2G_6(G_4G_6)^2 = G_6(G_6P)^2G_1G_4G_1G_6(G_4G_6)^2 = G_1G_4G_1G_4PG_6P(G_4G_6)^3 = G_1G_2G_3 .$$

Die Gleichungen (6) sind in Δ alle richtig, in $Sp(4, \mathbb{Z})$ ist genau XIII. nicht richtig; es ist nämlich $(G_4P)^4 = -I$, also ist $\{P, G_1, G_4, G_6\}$ auch für $Sp(4, \mathbb{Z})$ ein Erzeugendensystem.

Sei Θ die von $\{P, G_1, G_4, G_6\}$ erzeugte freie Gruppe; jede Gleichung in (6) definiert ein Element in Θ. Das Erzeugnis Λ_1 aller Elemente I. - XIII. aus (6) ist der Normalteiler der Relationen von Δ. Das Erzeugnis Λ_2 der Elemente I. - XII. liegt im Normalteiler der Relationen von $Sp(4, \mathbb{Z})$. Λ_1 wird von Λ_2 und $(G_4P)^4$ erzeugt, und $(G_4P)^4$ liegt im Zentrum von $Sp(4, \mathbb{Z})$. Für $M \in \Theta$, $N \in \Lambda_2 \subset \Lambda_1$ ist $MNM^{-1} \in \Lambda_1$ (und $MNM^{-1} = +I$ in $Sp(4, \mathbb{Z})$).

In $Sp(4, \mathbb{Z})$ sind folgende Rechnungen richtig, in denen nur die Relationen I. - XII. verwendet werden:

a) $(G_4P)^8 = PG_4PG_4G_4PG_4PG_4PPG_4PG_4G_4P = PG_4P^2G_4PG_4P^2G_4P^2 =$
$PG_4P^3G_4PG_4PG_4P^2 = PG_4P^4G_4P^3 = I$

b) $(G_6G_4)^3 = (G_4G_6)^{-3} = (G_4G_6)^3(G_4G_6)^{-6} = (G_4G_6)^3(G_4P)^{-8} = (G_4G_6)^3$

c) $G_1(G_4P)^4 = G_4G_4G_1G_4P(G_4P)^3 = G_4PG_4G_1(G_4P)^2P = G_4P^2G_4G_1P^2 =$
$G_4P^2G_4P^2G_1 = G_4PG_4G_4PG_4P^2G_1 = (G_4P)^4G_1$

d) $G_4(G_4P)^4 = P(G_4P)^3G_4G_4 = (PG_4)^4G_4 = (G_4P)^4G_4$

e) $G_6(G_4P)^4 = G_6(G_6G_4)^3 = (G_4G_6)^2G_4G_6G_6 = (G_4G_6)^3G_6 = (G_4P)^4G_6$

f) $P(G_4P)^4 = (PG_4)^4P = (G_4P)^4P$.

Also liegen $(G_4P)^8$ und die Vertauschungsrelationen von $(G_4P)^4$ mit G_1, G_4, G_6, P in Λ_2. Daher gibt es $k \in \mathbb{Z}$ und $L \in \Lambda_2$, so daß $MNM^{-1} = L((G_4P)^4)^{2k} \in \Lambda_2$, und Λ_2 ist ein Normalteiler in Θ. Mit Hilfe der natürlichen Projektion von Θ auf $Sp(4, \mathbb{Z})$ stellt man fest, daß $\Lambda_1/\Lambda_2 \cong \{\pm I\}$ ist, und es folgt $\Theta/\Lambda_2 \big/ \Lambda_1/\Lambda_2 \cong \Theta/\Lambda_1 \cong \Delta = Sp(4, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$ und damit, daß Λ_2 der Normalteiler der Relationen von $Sp(4, \mathbb{Z})$ ist.

Für das System in [Behr 1975] gilt mit den dortigen Bezeichnungen: $x_\alpha = G_4G_6G_4P^2$, $x_\beta = G_4G_1G_4$, $x_{\alpha+\beta} = PG_6P(G_4G_6)^3$, $x_{2\alpha+\beta} = G_1$, $w_\alpha = P^2G_4$, $w_\beta = G_4PG_4$. Beachtet man, daß $(G_4G_6)^3 = (G_4P)^4 = -I$ ist, im Zentrum liegt und daß gilt $G_6G_4G_1G_4G_6 = G_4G_6G_4G_6G_1(G_4G_6)^4 = G_4G_6G_4PG_6PG_1G_4G_1(G_4G_6)^2 = G_4G_6PG_6PG_1G_4G_1G_6G_4G_6 = G_4G_1(G_4G_6)^2G_6G_4G_6 = G_4G_1G_4$, dann werden die dort angegebenen Relationen von dem System (6 ohne XIII.) erzeugt:

(1) $x_\alpha x_\beta x_\alpha^{-1} x_\beta^{-1} = G_4G_6G_4P^2G_4G_1G_4P^2G_4G_6G_4G_4G_1^{-1}G_4 =$
$G_4G_6G_4P^4G_4G_1G_4G_4G_6G_1^{-1}G_4 = G_4G_6G_1G_6G_1^{-1}G_4 =$
$G_4PG_6PG_1G_4G_1G_6G_4G_6G_4G_6G_1^{-1}G_4 = PG_6PG_1G_4G_1(G_4G_6)^3G_1^{-1}G_4 =$
$PG_6P(G_4G_6)^3G_1 = x_{\alpha+\beta}\, x_{2\alpha+\beta}$

(2) $x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = G_4G_6G_4P^2PG_6P(G_4G_6)^3P^2G_4G_6G_4(G_6G_4)^3P^{-1}G_6P^{-1}$
$= (G_4G_6P^{-1}G_6P^{-1}G_4)^2 = (G_4PG_6PG_6PG_6PG_6G_4)^{-1} =$
$(PG_6PG_4G_6PG_6PG_6G_4)^{-1} = (G_1^{-1}G_4G_1^{-1}G_6G_1(G_4G_6)^3G_1^{-1}G_4G_1^{-1}G_6G_1G_4G_6)^{-1} =$
$(G_1^{-1}G_4G_1^{-1}G_6G_4G_1^{-1}G_4G_6G_4G_6G_4G_1G_4G_6)^{-1} = (G_1^{-1}G_4G_1^{-1}G_4G_1^{-1}G_4G_1G_4)^{-1}$
$= G_4G_1^{-1}G_4G_1G_4G_1G_4G_1 = G_4G_1^{-1}G_1G_4G_1G_4G_4G_1 = G_1^2 = x_{2\alpha+\beta}^2$

(3) $x_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = G_4G_6G_4P^2G_1P^2G_4G_6G_4G_1^{-1} = G_4G_6G_4G_1G_4G_6G_4G_1^{-1}$
$= G_4G_4G_1G_4G_4G_1^{-1} = I$

(4) $x_\beta x_{\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = G_4G_1G_4PG_6P(G_4G_6)^3G_4G_1^{-1}G_4(G_6G_4)^3P^{-1}G_6P^{-1} = I$

(5) $x_\beta x_{2\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = G_4G_1G_4G_1G_4G_1^{-1}G_4G_1^{-1} = I$

(6) $x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_{\alpha+\beta}^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = PG_6P(G_4G_6)^3G_1(G_6G_4)^3P^{-1}G_6P^{-1}G_1^{-1} = I$

(7) $w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha = P^2G_4G_4PG_4G_4PG_4P^2G_4 = G_4P^2G_4 = w_\beta^2$

(8) $w_\beta w_\alpha^2 w_\beta^{-1} = G_4PG_4P^2G_4P^2G_4G_4P^{-1}G_4 = G_4PG_4P^2G_4P\,G_4 =$
$PG_4PG_4PG_4PG_4 = PPG_4PG_4G_4PG_4 = (P^2G_4)^2 = w_\alpha^2$

(9) $(w_\alpha w_\beta)^2 = (P^2G_4G_4PG_4)^2 = (P^3G_4)^2 = P^2G_4PG_4PG_4P^2G_4 =$
$PG_4PG_4P^2G_4P^2G_4 = PG_4PG_4PG_4G_4PG_4P^2G_4 = G_4PG_4P^2G_4G_4PG_4P^2G_4$
$= (w_\beta w_\alpha)^2$

(10) $w_\beta^4 = (G_4PG_4)^4 = G_4P^4G_4 = I$

(11) $w_\alpha x_\beta w_\alpha^{-1} = P^2G_4G_4G_1G_4G_4P^2 = G_1 = x_{2\alpha+\beta}$

(12) $w_\alpha x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} = P^2G_4G_1G_4P^2 = G_4G_1G_4P^4 = x_\beta$

(13) $w_\alpha x_{\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} = P^2G_4PG_6P(G_4G_6)^3G_4P^2 = P^3G_6P^3(G_4G_6)^3 = x_{\alpha+\beta}^{-1}$

(14) $w_\beta x_\alpha w_\beta^{-1} = G_4PG_4G_4G_6G_4P^2G_4P^{-1}G_4 = G_4PG_6G_4P^2G_4P^3G_4 =$
$G_4PG_6G_4PG_4PG_4PG_4P^2G_4 = G_4PG_6PG_4PG_4G_4PG_4P^2G_4 =$
$PG_6PP^2G_4P^2G_4 = PG_6P(PG_4)^4 = PG_6P(G_4G_6)^3 = x_{\alpha+\beta}$

(15) $w_\beta x_{\alpha+\beta} w_\beta^{-1} = G_4PG_4PG_6P(G_4G_6)^3GP^{-1}G_4 = G_4P^2G_6P^4G_4(G_4G_6)^3 =$
$G_4P^2(G_4G_6)^2 = (G_4P)^4P^2G_4(G_4G_6)^2 = P^2(G_4G_6)^3G_6G_4G_6 = P^2G_4G_6G_4$
$= x_\alpha^{-1}$

(16) $w_\beta x_{2\alpha+\beta} w_\beta^{-1} = G_4PG_4G_1G_4P^{-1}G_4 = G_1 = x_{2\alpha+\beta}$

(17) $w_\alpha x_\alpha w_\alpha^{-1} = P^2G_4G_4G_6G_4P^2G_4P^2 = P^2G_6G_4P^2G_4P^2 = P^2G_6(G_4P)^4 =$
$P^2G_6(G_6G_4)^3 = P^2G_4G_6G_4G_4P^2P^2G_4G_6G_4 = x_\alpha^{-1}w_\alpha^{-1}x_\alpha^{-1}$

(18) $w_\beta x_\beta w_\beta^{-1} = G_4PG_4G_4G_1G_4G_4P^{-1}G_4 = G_4PG_1P^3G_4 = G_4P^2G_1^{-1}P^3G_1^{-1}P^2G_4$
$= G_4G_1^{-1}PG_1^{-1}P^2G_4 = G_4G_1^{-1}P^3G_1^{-1}G_4 = G_4G_1^{-1}G_4G_4P^{-1}G_4G_4G_1^{-1}G_4 =$
$x_\beta^{-1}w_\beta^{-1}x_\beta^{-1}$.

Umgekehrt ist $G_1 = x_{2\alpha+\beta}$, $G_4 = w_\alpha w_\beta^2$, $G_6 = w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha$, $P = w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2$. In der Behrschen Präsentation werden x_β und $x_{\alpha+\beta}$ von den vier anderen Erzeugenden erzeugt. Weiterhin ergeben sich folgende Aussagen:

a) w_α^2 liegt im Zentrum (wegen der Relationen (8), (11) - (14))

b) $w_\alpha^4 = w_\alpha^3 w_\beta^4 w_\alpha = w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha^2 w_\beta^2 w_\alpha = (w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha)^2 = w_\beta^4 = I$

c) $w_\beta^2 x_\beta = w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha x_\beta = x_\beta w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha = x_\beta w_\beta^2$

d) $P^2 = w_\alpha^2 w_\beta^2$

e) $PG_6P = w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 = w_\alpha w_\beta^3 x_\alpha w_\beta^3 w_\alpha^3 w_\beta^2 = w_\alpha x_{\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^2 w_\alpha^3 w_\beta^2 =$
$w_\alpha x_{\alpha+\beta}^{-1} w_\alpha = w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta}$.

Die Relationen (2) - (4) werden von den anderen Relationen erzeugt:

(2) $x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = x_\alpha^2 x_\beta x_\alpha^{-1} x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_{\alpha+\beta} w_\beta^{-1} x_\beta w_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta} w_3 x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_{\alpha+\beta} x_\beta^{-1} w_\beta^{-1} x_\beta^{-1} w_\beta^2 x_{\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} w_\beta^{-1} x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta^2 x_{\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} w_\beta x_\beta^{-1} w_\beta x_{\alpha+\beta} x_\alpha w_\beta x_{2\alpha+\beta} x_{\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\beta^2 x_\beta x_{\alpha+\beta} x_\alpha w_\beta x_{2\alpha+\beta} x_{\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_\beta w_\beta^3 x_\alpha x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_\beta w_\beta^4 x_{\alpha+\beta}^{-1} x_{2\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} =$
$x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_\beta x_{\alpha+\beta}^{-1} x_{2\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_\alpha^{-1} = x_{2\alpha+\beta}^2$

(3) $x_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = w_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta} w_\beta x_{2\alpha+\beta} w_\beta x_{\alpha+\beta} w_\beta^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} =$
$w_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta} w_\beta^2 x_{\alpha+\beta} w_\beta^{-1} = I$

(4) $x_\beta x_{\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = w_\alpha x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta} w_\alpha x_{2\alpha+\beta}^{-1} w_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = I$.

Das Relationensystem (6 ohne XIII.) wird vom Relationensystem aus [Behr 1975] erzeugt:

I. $G_4^2 = (w_\alpha w_\beta^2)^2 = w_\beta^4 = I$

II. $G_6^2 = (w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha)^2 = w_\alpha^3 x_\alpha^{-1} w_\beta^4 x_\alpha w_\alpha = I$

III. $(G_1G_4)^2 = (x_{2\alpha+\beta} w_\alpha w_\beta^2)^2 = x_{2\alpha+\beta} w_\beta^2 x_\beta w_\beta^2 = w_\beta^2 x_\beta w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta} = (w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta})^2 = (G_4G_1)^2$

IV. $P^4 = (w_\alpha^2 w_\beta^2)^2 = (w_\alpha w_\beta^2)^2 = w_\beta^4 = I$

V. $P^2G_1P^2 = w_\alpha^2 w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^2 w_\beta^2 = x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^2 w_\beta^2 w_\alpha^2 w_\beta^2 = x_{2\alpha+\beta} = G_1$

VI. $(PG_1)^3 = (w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta})^3 = w_\alpha (w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha x_\beta)^3 w_\alpha^{-1} =$
$w_\alpha (w_\beta x_\beta)^3 w_\alpha^{-1} = w_\alpha w_\beta^2 (w_\beta x_\beta w_\beta^{-1} x_\beta w_\beta x_\beta) w_\alpha^{-1} =$
$w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha^{-1} = w_\alpha^2 w_\beta^2 = P^2$

VII. $(G_4P)^2 = (w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2)^2 = w_\beta w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 = w_\beta^3 w_\alpha^{-1} w_\beta w_\alpha w_\beta^2 =$
$w_\beta^3 w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta = w_\alpha w_\beta w_\alpha^3 w_\beta = w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^3 =$
$(w_\alpha w_\beta^3 w_\beta^2 w_\beta^2)^2 = (w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^2)^2 = (PG_4)^2$

VIII. $PG_4G_1G_4 = w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta} w_\alpha w_\beta^2 = w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 x_\beta =$
$w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} x_\beta = x_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} = w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta} w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 =$
$G_4G_1G_4P$

IX. $G_1PG_6P = x_{2\alpha+\beta} w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta} = w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} = PG_6PG_1$

X. $G_4PG_6P = w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta} = w_\alpha^3 x_{\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^2 = w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta} w_\alpha w_\beta^2 = PG_6PG_4$

XI. $G_1(G_4G_6)^2 = x_{2\alpha+\beta}(w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha)^2 = x_{2\alpha+\beta}(x_\alpha w_\alpha)^2 =$
$x_{2\alpha+\beta} w_\alpha x_\alpha^{-1} = w_\alpha x_\beta x_\alpha^{-1} = w_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta} x_\beta =$
$w_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta} w_\beta^2 x_\beta w_\beta^2 = w_\alpha x_{2\alpha+\beta} w_\beta^2 x_\alpha x_{\alpha+\beta}^{-1} x_\beta w_\beta^2 =$
$w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta} x_\alpha w_\alpha^3 x_{\alpha+\beta} w_\alpha x_\beta w_\beta^2 =$
$w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha w_\alpha^2 x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} w_\alpha w_\beta^2 x_{2\alpha+\beta}$
$= (G_6P)^2 G_1G_4G_1$

XII. $(G_4P)^4 = (w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2)^4 = (w_\beta w_\alpha w_\beta^2)^4 = (w_\beta^3 w_\alpha^{-1})^4 =$
$w_\beta w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha = w_\beta w_\alpha w_\beta^3 w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha^2 =$
$w_\beta w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta w_\alpha^2 = w_\beta^4 w_\alpha^2 = w_\alpha^2 = (x_\alpha w_\alpha)^3 = (w_\alpha w_\beta^2 w_\alpha w_\beta^2 x_\alpha w_\alpha)^3$
$= (G_4G_6)^3$

Literatur

Behr, H.: Über die endliche Definierbarkeit von Gruppen. J. reine angew. Math. 211, 116 - 122 (1962)

Behr, H.: Eine endliche Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp_4(\mathbb{Z})$. Math. Z. 141, 47 - 56 (1975)

Gottschling, E.: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereichs der Modulgruppe zweiten Grades. Math. Ann. 138, 103 - 124 (1959)

Gottschling, E.: Über die Fixpunktuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann. 143, 399 - 430 (1961)

Klingen, H.: Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen. Math. Ann. 144, 64 - 72 (1961)

Klingen, H.: Zur Struktur der Siegelschen Modulgruppe. Math. Z. 136, 169 - 178 (1974)

Maaß, H.: Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series. Lecture Notes in Mathematics No. 216. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1971

Minkowski, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. reine angew. Math. 129, 220 - 274 (1905)

Siegel, C. L.: Symplectic Geometry. Am. J. Math. 65, 1 - 86 (1943)