Peter Bender

Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung

In: Der Mathematikunterricht 24 (1978), Heft 5, 25-87

Inhalt

Es empfiehlt sich, zuerst den Aufsatz „Die operative Genese der Geometrie . . . " von *A. Schreiber* (1978b, in diesem Heft) zu lesen. Herrn Dr. A. Schreiber und Herrn Dr. H. Winter danke ich für Verbesserungsvorschläge.

1. Zur Aufgabe des Geometrieunterrichts (GU)

Die Forderung nach Umwelterschließung im Mathematikunterricht (MU) wird in den letzten Jahren zunehmend erhoben. Diese Entwicklung mag man daran ablesen, wie allgemeine Lernziele für den MU von (*Winter* 1972) über (Winter 1975) bis (*Wittmann* 1978) formuliert werden:

1972: Kognitive Strategien: 1. Argumentieren, 2. Kreatives Verhalten, 3. Mathematisieren; intellektuelle Techniken: 4. Klassifizieren, 5. Ordnen, 6. Generalisieren, 7. Analogisieren, 8. Formalisieren.

1975: „Mathematisieren" wird ersetzt durch „die praktische Nutzbarkeit der Mathematik erfahren", und die fünf intellektuellen Techniken werden unter dem Lernziel „formale Fertigkeiten erwerben" subsumiert.

1978: „Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) mathematisieren" rückt an die erste Stelle, und statt „formale Fertigkeiten erwerben" sollen die Schüler „Grundkenntnisse und Grundtechniken zur Verarbeitung mathematischer Informationen und deren Anwendung erlernen".

Über die Rechtfertigung solcher Listen und die Akzentuierung ihrer Posten ist bestimmt noch zu diskutieren; und mancher wird im MU andere Ziele oder mindestens die Ziele in anderer Gewichtung angestrebt sehen wollen. Jedenfalls findet der oben zitierte Katalog in seinen einzelnen Ausformungen verbreitet Zustimmung, und Alternativen, die einerseits wesentlich verschieden und andererseits vergleichbar wären, sind mir nicht bekannt.

In dem Katalog ist „Mathematisieren" dasjenige Lernziel, das, deutlicher als die anderen, ein Kriterium enthält, mit dem die Relevanz eines Stoffs für den MU festgestellt werden kann, nämlich den möglichen Beitrag zur Umwelterschließung der Schüler.

Diesen kann der GU bis hinauf in die Sekundarstufe II leisten, wenn man Geometrie zuallererst als Lehre von der räumlichen Wirklichkeit versteht: Der reale Raum ist ein fundamentaler Aspekt der Umwelt eines jeden Individuums, den es zuvörderst zu erschließen gilt. Für diese *Aufgabe* ist in der Schule der GU und vor allem er zuständig, und zwar nicht nur auf einer nullten Stufe, sozusagen als Anlauf zur „eigentlichen" Geometrie, wie *H. Freudenthal* (1973, S. 375ff, besonders S. 379, 381) in dem sehr lesenswerten Kapitel „Der Fall der Geometrie" ausführt. Vielmehr kann und soll auf jeder Stufe des Geometrietreibens in der Schule das geschaffene System geometrischer Begriffe dauernd auf die Wirklichkeit bezogen sein.
Dabei ist es nicht damit getan, mit Hilfe geometrischer Begriffsbildung die Struktur des realen Raums zu entdecken bzw. zu konstruieren. Raumerschließung als Teil der Umwelterschließung bedeutet auch und vor allem, diese Struktur sich nutzbar zu machen bzw. mindestens, ihre Nutzbarkeit zu erforschen.

Man könnte ein allgemeines Lernziel für den GU so formulieren: *Der Geometrieunterricht soll den Schüler befähigen, den wirklichen Raum zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen.*

Dies ist gleichzeitig Rechtfertigung für das Schulfach Geometrie, Lehr- und Lernziel. Der GU hat die Tendenz, sich von der Wirklichkeit abzulösen und sich z. B. zum Kalkül mit Punktmengen in der Ebene zu verengen, hinter dem die räumliche Wirklichkeit kaum zu erkennen ist und der auch gar nicht mehr als eine Darstellung dieser Wirklichkeit gedacht ist. Dieser Tendenz kann nicht allein dadurch entgegengewirkt werden, daß man Wirklichkeitsbezug fordert (etwa in einem allgemeinen Lernziel). Denn ein solcher wird ja scheinbar oft geleistet, nämlich zwecks Motivation in Form eines Einstiegs, der dann aber im Verlauf des weiteren Unterrichts auf Nimmerwiedersehen verlassen wird, oder in Form einer „Anwendung", die als mehr oder weniger erfreuliche Zugabe nebenbei abfällt; – und trotzdem ist die Ablösungstendenz da.

Das Beispiel „Dreieckslehre"
Zum Einstieg werden die Schüler vielleicht aufgefordert, dreieckige Umweltphänomene zu nennen, sodann wird über Jahre hinweg Dreieckslehre ohne irgendeinen Bezug zu diesem Einstieg getrieben, eventuell mit Neunpunktekreis, Konstruktion eines Dreiecks aus drei Höhen, allerlei trigonometrischen Formeln usw., und ab und zu wird eine „Anwendungs"aufgabe eingestreut, wie: „Eine dreieckige Seitenfläche eines Werkstücks hat die Seitenlängen 6 cm, 8 cm und 9 cm. Ermittle die Winkel."
Ein solcher aufgesetzter Wirklichkeitsbezug wird der Auffassung von Geometrie als der Lehre von der räumlichen Wirklichkeit nicht gerecht. Für die dreieckigen Formen aus der Umwelt müßten vielmehr im Unterricht die von ihnen zu erfüllenden Zwecke, Funktionen, die Entsprechung von Zwecken, Funktionen und geometrischem Begriff untersucht und während der fortschreitenden Knüpfung des geometrischen Begriffsnetzes in jedem Stadium immer wieder Anwendungen entdeckt oder entwickelt werden:

a) Zum *Stabilisieren von Baukonstruktionen* werden dreieckige Teile eingefügt (an Regalen, Fachwerkhäusern, Eisenbahnbrücken, Masten usw.).

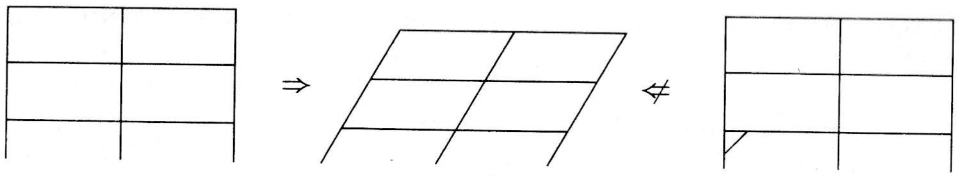

Abb. 1

Den begrifflichen Hintergrund stellen die *Kongruenzsätze* dar, speziell die eindeutige Bestimmtheit eines Dreiecks bis auf Kongruenz durch die Längen der drei Seiten. Beim Bauen mit Metallbaukästen lernen Schüler schon auf der Primarstufe diesen Stabilisierungseffekt kennen. Mit Strohhalmen und Bindfäden läßt sich möglicherweise ein Tetraeder-, aber kein Würfelkantenmodell bauen. Wie kann man diese Stabilität mit Hilfe der Kongruenzsätze begründen? – Ein aus starren Teilen zusammengesetzter Körper ist instabil, wenn diese Teile gegeneinander beweglich sind (Zollstock, Drehstuhl, Klappfenster). Wenn die Verbindungen der Teile (Gelenke, Lager, Schrauben, Leim, Schweißnähte) nicht ganz gelöst werden, müssen sich Winkel ändern. Sind drei starre Teile in einem Dreieck miteinander verbunden, so sind keine Winkeländerungen möglich. Hierin „zeigen" sich die Kongruenzsätze.
Daß bei dem in Abb. 1 skizzierten Regal der Einbau bereits eines Dreiecks (theoretisch) die Stabilität erzwingt, beruht auf dem Satz, daß ein Viereck, bei dem einander gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, ein Parallelogramm ist, d. h. die entsprechenden Seiten auch parallel sind. Bei jeder Verformung (im obigen Sinn) des Regals bleiben also die senkrechten Stützen untereinander und die waagerechten Auflagebretter untereinander parallel; die Richtung aller Stützen und die Richtung aller Auflagen ist durch je eine beliebige unter ihnen bereits festgelegt, und das eingebaute Dreieck verbindet ja eine Stütze mit einer Auflage starr (hier wurde mit Äquivalenzklassen und Repräsentanten argumentiert).

b) Ein wichtiger Aspekt der *Kongruenzsätze* für Dreiecke ist, daß sie *für n-Ecke mit größerer Eckenzahl nicht* gelten (d. h. nicht in der Form, daß mit n Seitenlängen das n-Eck festliege; man braucht vielmehr $2n-3$ bestimmende Stücke, und $n=3$ ist die einzige Lösung der Gleichung $2n-3 = n$). Die Instabilität von n-Ecken für $n \geqslant 4$ ist jedoch nicht nur ein Mangel, dem durch geeignete Konstruktionen abgeholfen werden müßte; sie wird auch genutzt: Mit Parallelogrammen bei der Geradführung an Ablagekästen, Parallelenlineal, Tafelwaage, Briefwaage, Nürnberger Schere (vgl. *Winter/Ziegler* 1972, S. 140f)), mit allgemeinen Gelenkvierecken zum Umwandeln einer Kreisbewegung in (geradlinige) Schwingungen und umgekehrt (bei Pumpen, bei der Dampflokomotive, wenigstens noch bei der Modelleisenbahn, beim Ottomotor) oder in kreisförmige Schwingungen (der Bau eines Scheibenwischers ist in (*Stührmann/Wessels* 1970/1972) ausführlich mit einem Unterrichtsbeispiel dargestellt, siehe Abb. 2 und 3).

c) Die Ecken eines Dreiecks bilden eine *affine Basis* für die Ebene, d. h. eine Ebene ist durch ein Dreieck eindeutig festgelegt: Eine gut geölte Tür kann man nicht in ihrer Drehachse festhalten; man muß einen Punkt außerhalb der Achse fixieren, z. B. am Griff. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein vierbeiniger durchaus; in manchen

Lokalen ist das sogar die Regel. – Wie könnte dieses *Tischwackeln* mathematisiert werden?

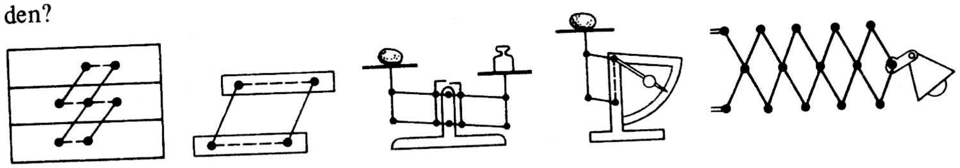

Abb. 2

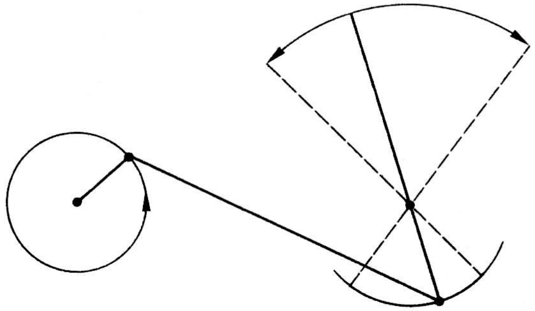

Abb. 3

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß die Beine alle senkrecht zur ebenen Tischplatte stehen, also untereinander parallel sind, wie es sich für einen „ordentlichen" Tisch gehört und wie es sich auch mit einiger Genauigkeit realisieren läßt. Weiterhin sei der Fußboden eben (und waagerecht). Für das Wackeln von Tischen sind zwar oft auch Bodenunebenheiten verantwortlich, diese können aber beim Mathematisieren durch Variation der Beinlängen erfaßt werden. Schließlich seien die Tischbeine als Strecken a, b, c, d angenommen, die mit der Platte die Punkte A, B, C, D gemeinsam haben und deren Fußpunkte A', B', C', D' sind.

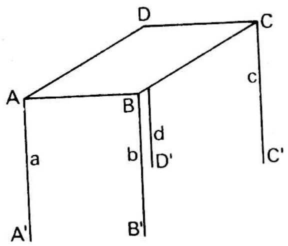

Abb. 4

Sind alle Beine gleich lang, so steht der Tisch fest, die Platte ist parallel zum Boden. Unterschiedliche Länge der Beine ruft nun nicht notwendig ein Wackeln hervor: Es könnte sein, daß bei einer Anordnung der Ecken A, B, C, D in einem nicht entarteten Parallelogramm die Gleichung $|a| + |c| = |b| + |d|$ gilt, und dann wackelt der Tisch nicht, weil die vier Fußpunkte in einer Ebene liegen und wenn drei davon den Boden berühren, dann auch der vierte wegen der eindeutigen Bestimmtheit einer Ebene durch drei nichtkollineare Punkte. Daß diese Gleichung notwendig und hinreichend für stabilen Stand (wenn auch mit schiefer Tischplatte, falls nicht $|a| = |b| = |c| = |d|$) ist, sieht man: Wenn ein Bein fehlt, so ist durch die drei anderen die Position des Tischs im Raum und damit auch die Länge des vierten eindeutig bestimmt, und diese läßt sich folgendermaßen

berechnen: Auf der Tischplatte wird im Diagonalenschnittpunkt E des Parallelogramms ABCD (= Schwerpunkt) ein Hilfsbein e parallel zu den anderen eingesetzt.

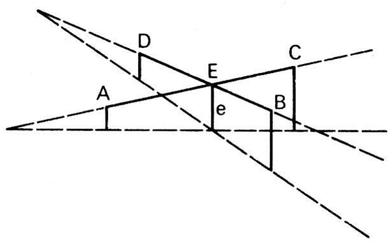

Abb. 5

Nach dem Strahlensatz ist

$$\frac{|e| - |d|}{|b| - |d|} = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{BD}|} \quad \text{und} \quad \frac{|e| - |a|}{|c| - |a|} = \frac{|\overline{EA}|}{|\overline{CA}|}$$

Da sich im Parallelogramm die Diagonalen halbieren, ist

$$\frac{|e| - |d|}{|b| - |d|} = \frac{1}{2} = \frac{|e| - |a|}{|c| - |a|}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2}(|a| + |c|) = |e| = \frac{1}{2}(|d| + |b|).$$

Die Konstruktion mit dem fünften Bein ist so für beliebige nicht entartete Anordnungen der Beine möglich, nur ergeben sich i. a. etwas kompliziertere Gleichgewichtsformeln. Wenn nun aber die vier Fußpunkte nicht komplanar sind (nicht in einer Ebene liegen), wie wackelt dann der Tisch? Es gilt jedenfalls, daß von den vier Fußpunkten je drei eine Ebene, sie also insgesamt vier (nicht notwendig verschiedene) Ebenen A'B'C', A'B'D', A'C'D', B'C'D', eindeutig festlegen. Der Tisch wackelt genau dann, wenn mehr als eine dieser vier Ebenen mit dem Boden zusammenfallen kann. Da die Fußpunkte nicht komplanar sein sollen, können die Ecken auf der Tischplatte nicht kollinear sein, und es sind drei Fälle zu unterscheiden:

(1) Das Viereck ABCD auf der Tischplatte ist nicht konvex. Dann ist eine Ecke ausgezeichnet, die im Innern des von den drei anderen definierten Dreiecks liegt. Ist das zugehörige Bein kurz genug, dann steht der Tisch stabil auf den anderen drei Beinen; andernfalls können alle drei Ebenen, die die mittlere Ecke mit je zwei äußeren festlegt, mit dem Boden inzidieren; der Tisch kann um den inneren Fußpunkt rotieren. (Ist das innere Bein zu lang, fällt der Tisch um, weil er Lagen annimmt, bei denen sein Schwerpunkt nicht mehr über der konvexen Hülle der Fußpunkte liegt.)

(2) Das Viereck ABCD ist ein echtes, konvexes Viereck. Man stellt den Tisch auf (die) zwei längste(n) Beine und bewegt ihn so, bis er auch noch auf einem dritten steht. Der Fußpunkt B_4' des vierten Beines befindet sich dann über dem Boden. Die Fußpunkte B_1' und B_3' seiner beiden Nachbarn legen eine Gerade fest, die die Drehachse des wackelnden Tisches darstellt (Abb. 6).

Mit dem Boden inzidieren abwechselnd die Ebenen $B_1' B_3' B_4'$, $B_1' B_2' B_3'$ und die bei der Drehung dazwischen liegenden. Andere Stellungen sind nicht möglich, weil das Bein b_1 die Ebene $B_2' B_3' B_4'$ und b_3 die Ebene $B_1' B_2' B_4'$ durchstößt. Auch hier dürfen die Längenunterschiede nicht zu groß werden, weil sonst der Tisch umfällt.

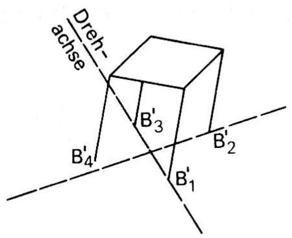

Abb. 6

(3) Das Viereck ABCD ist kein echtes; eine Ecke liegt auf dem Rand des von den drei anderen definierten Dreiecks. Ist das zugehörige Bein kurz genug, steht der Tisch stabil auf den anderen drei (wie im Fall (1)), andernfalls gelten die Überlegungen wie bei Fall (2).

Die Analyse des Tischwackelns hat ein ganzes Stück in die Inzidenzgeometrie geführt und gezeigt, wie passende Axiome und einfachste aus ihnen deduzierte Sätze (mit den Längen der Tischbeine wurde lediglich die Lage der Fußpunkte zueinander ausgedrückt, und auch sonstige Begriffe, etwa Konvexität, lassen sich bequem inzidenzgeometrisch erfassen) zur Umwelterschließung beitragen können. Und vor allem umgekehrt. Das scheinbar banale Phänomen „Tischwackeln" führt, wenn es analysiert wird, auf substantielle geometrische Begriffsbildungen.

Aus der Eigenschaft dreier nicht kollinearer Punkte, affine Basis für eine Ebene zu sein, folgt auch, daß ein Dreieck keine Diagonalen hat, daß es konvex ist und daß jedes Polygon (zwecks Flächenbestimmung) vollständig in Dreiecke zerlegt werden kann.

d) In Schulbüchern findet man ab und zu Bilder mit umweltlichen Situationen, in denen Dreiecke vorkommen: Verkehrszeichen, Hausgiebel, Turmspitzen. . . .

Die Dreieckigkeit von Verkehrszeichen hat offenbar keine geometrische Funktion; es handelt sich um willkürliche Symbole. Funktional ist bestenfalls die Symmetrie bezüglich der senkrechten Achse. Auf Autobahnen werden solche Schilder aufgestellt, die aber auch rechteckig oder kreisförmig sein können, deren Symmetriehälften durch Scharniere verbunden sind und aufeinandergeklappt werden können, so daß sie als amtliche Verkehrszeichen beliebig in und außer Kraft gesetzt werden können.

An Dächern, Rampen, Keilen, Turm-, Pfahl-, Pfeil-, Nagelspitzen oder Schuttkegeln ist die Dreiecksform wesentlich für das Prinzip der *schiefen Ebene.* Das Dreieck tritt dabei als Grundfläche eines Prismas oder als Querschnitt eines Kegels auf und ist häufig gleichschenklig. Das Eindringen eines harten Gegenstands in einen anderen wird mit einer Spitze erleichtert: Durch diese entsteht ein großer Druck, und das nachfolgende Dreieck (Prisma, Kegel) weitet die Öffnung stetig.

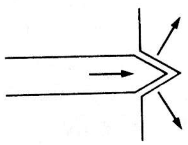

Abb. 7

Das gleichschenklige Dreieck (auch als Pfeilspitze) ist daher ein *Symbol für eine Richtung.*

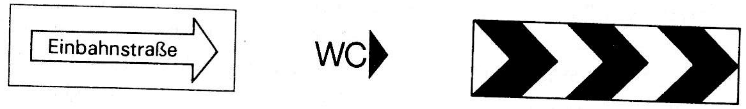

Abb. 8

e) Das *gleichseitige* Dreieck gibt es an Wasserhähnen oder als Querschnitt bei manchen Schreibgeräten. Beide Formen sind der menschlichen Hand angepaßt, sie haben je einen Ansatzpunkt für Daumen, Zeige- und Mittelfinger. Die *Drehsymmetrie* ermöglicht den Zugriff in mehreren Stellungen.

f) Das wichtigste unter den besonderen Dreiecken ist das *rechtwinklige,* mit dessen Hilfe viele Berechnungen durchgeführt werden, weil es ein halbes Rechteck ist und die *Pythagoras*-Eigenschaft hat. Dieses Stück der Geometrie wird im Schulunterricht intensiv behandelt; aber nicht alle wichtigen Aspekte werden genügend hervorgehoben, z.B. daß die drei Dreiecke (das große und die beiden durch Einzeichnen der Hypothenusenhöhe entstehenden) ähnlich sind. Ein instruktives Beispiel stellt überdies die Berechnung der Länge einer Schraubenlinie dar, wie man sie z. B. in (Schreiber 1978b) findet. Woran es im Unterricht aber häufig mangelt, ist die Arbeit vor Ort: Messungen im Gelände und Berechnungen unzugänglicher Größen, z. B.: Wieviel Weg würde man sparen, wenn man quer über ein rechteckiges Rasenstück ginge, dessen Betreten verboten ist, statt außen herum zu gehen? Dazu natürlich die üblichen Beispiele, von denen man zahlreiche in (*Perelman* 1954) findet: Flußbreite, Gebäudehöhe, Baumumfang usw. sollen praktisch, am Objekt, ermittelt werden. Gewiß kostet das Zeit. Aber es könnte ja einmal ein Unterrichtsgang (Wandertag) diesem Thema gewidmet werden. Die „lästigen" numerischen Rechnungen lassen sich mit dem Taschenrechner mühelos erledigen. Andere Projekte, bei denen Dreiecksstücke zu messen und zu berechnen sind, sind etwa die Astronomie (in Form einer Arbeitsgemeinschaft, wo es natürlich nicht nur um geometrische Erkenntnisse geht), oder, ein Vorschlag von *G. Graumann* (1977), Ausbau eines Dachstuhls.

Ein weiteres geeignetes Beispiel dazu bildet schließlich die Planung einer neuen Schnellstraße: Außer vielen gesellschaftlichen, politischen, wirtschaftlichen Gesichtspunkten (Erschließung eines strukturschwachen Gebiets – Beitrag zur Umweltzerstörung; Förderung von Autoindustrie und Baugewerbe – Drosselung des Individualverkehrs; usw.), gibt es auch handfeste mathematische (z. B. Netzplan eines Fertigungsablaufs), und speziell geometrische Probleme: Wieviel Land wird bei einer bestimmten Trassenführung bei zwei-, wieviel bei vierspurigem Ausbau insgesamt verbraucht, wieviel von bestimmten Bodengüten? Welchen land- oder forstwirtschaftlichen Wert hat dieses Land? Wieviel Erdaushub fällt bei dem geplanten Profil an? Wieviel davon wird für Lärmschutzwälle verbraucht? Wie breit ist ein solcher Wall bei vorgegebenen Höhe und Böschungswinkel, d. h. um wieviel wird die Trasse noch breiter? usw.

g) Von den Transversalen und besonderen Punkten im Dreieck haben vor allem die
Höhe (sie teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige; mit ihr und einer Grundseite wird die
Fläche berechnet) und der *Schwerpunkt* ((vgl. dazu H. Winters Beitrag (1978, in diesem
Heft)) besondere Bedeutung. Gewiß könnte man auch Aufgaben über den Umkreismit-
telpunkt in eine „angewandte Form" kleiden, etwa: Für drei Gemeinden A, B, C soll
ein gemeinsames Elektrizitätswerk gebaut werden, das von allen dreien gleich weit ent-
fernt ist. – Ist diese Forderung sinnvoll? – Wenn die Gemeinden fast auf einer Gera-
den liegen, dann müßte das E-Werk sehr weit entfernt von allen dreien gebaut werden,
weil die Mittelsenkrechten der drei Strecken zwischen den Gemeinden fast parallel wä-
ren und sich ihr Schnittpunkt, in dem das E-Werk liegen muß, sehr weit draußen be-
fände. Eine solche Lösung ist wenig ökonomisch, und die Aufgabe ist eher dazu geeig-
net, über die Brauchbarkeit dieser Forderung nach gleicher Entfernung zu reflektieren.

Eine sinnvollere Aufgabe ist es, diejenige Stelle für das E-Werk zu finden, an der die
Summe der Abstände zu den Gemeinden, also die Gesamtlänge der benötigten Leitun-
gen, minimal wird (wenn die Einwohnerzahlen etwa gleich sind), nämlich den *Torricel-*
lischen Punkt des Dreiecks: Falls ein Dreieck einen Winkel hat, der $\geqslant 120°$ ist, liegt
der Torricellipunkt in der zugehörigen Ecke, ansonsten in dem Punkt, von dem aus alle
drei Seiten unter einem Winkel von $120°$ erscheinen. Dieser Punkt ist eindeutig defi-
niert und hat die geforderte Eigenschaft, die Summe seiner Abstände zu den Ecken zu
minimieren. Ein nicht ganz einfacher, aber elementarer Beweis ist in (EdEM 5, 1966,
S. 295ff) ausgeführt. Man konstruiert den Torricellipunkt als Schnittpunkt der Faß-
kreise für $120°$ über den drei Seiten, wenn alle Winkel im Dreieck kleiner als $120°$ sind.

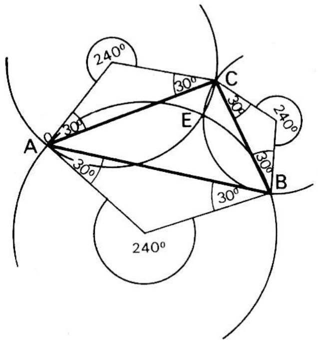

Abb. 9

Eine instrumentelle Konstruktion, mit der man auch eine Gewichtung der Abstände
nach Einwohnerzahlen vornehmen kann, findet sich in (*Lietzmann* 1959, S. 93).

h) Daß das E-Werk nicht außerhalb des Dreiecks ABC liegen kann, ergibt sich schon
aus der *Dreiecksungleichung* folgendermaßen: Ist E ein Punkt außerhalb von ABC,
so zeichnet man die Strecken $\overline{EA}, \overline{EB}, \overline{EC}$ (siehe Abb. 10).

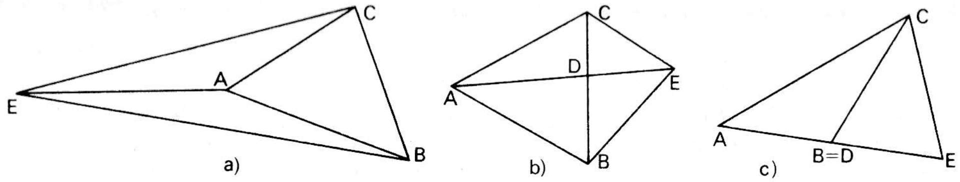

Abb. 10

Es gibt die beiden Möglichkeiten, daß
(1) diese drei Strecken außer den Eckpunkten keine Punkte des Dreiecks enthalten (Abb. 10a),
(2) es einen Eckpunkt, etwa A, gibt, für den die Strecke nach E von der gegenüberliegenden Seite geschnitten wird (Abb. 10b, 10c).

Im Fall (1) wäre der innere Punkt des großen Dreiecks, in der Skizze der Punkt A, besser als E: Es ist $|\overline{BE}| > |\overline{BA}|$ oder $|\overline{CE}| > |\overline{CA}|$, weil $w(EAB) > w(BEA)$ oder $w(EAC) > w(CEA)$ (dem größeren Winkel in einem Dreieck liegt die größere Seite gegenüber), und sonst $180° > w(BEC) = w(BEA) + w(CEA) \geqslant w(EAB) + w(EAC) = 360° - w(BAC)$, also $w(BAC) > 180°$ wäre. Sei etwa $|\overline{BE}| > |\overline{BA}|$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|\overline{CE}| + |\overline{EA}| > |\overline{CA}|$, insgesamt also $|\overline{AA}| + |\overline{AB}| + |\overline{AC}| < |\overline{EA}| + |\overline{EB}| + |\overline{EC}|$.
Im Fall (2) wäre der Schnittpunkt D besser als E: Es ist $|\overline{AD}| < |\overline{AE}|$ und nach der Dreiecksungleichung $|\overline{BD}| + |\overline{DC}| = |\overline{BC}| < |\overline{BE}| + |\overline{CE}|$, also $|\overline{DA}| + |\overline{DB}| + |\overline{DC}| < |\overline{EA}| + |\overline{EB}| + |\overline{EC}|$.
Umgekehrt führt damit die E-Werk-Aufgabe auf Fragen des Zusammenhangs zwischen den Maßen von Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

i) Fassen wir zusammen: Obwohl die Form des Dreiecks in unserer Umwelt durchaus verbreitet ist, scheint die Betrachtung der auffälligsten dreieckigen Phänomene, nämlich Dächer und Verkehrszeichen, für den GU zunächst nicht sehr ergiebig zu sein; genauere Untersuchungen fördern jedoch wichtige Aspekte der Raumstruktur und ihrer Nutzbarkeit zutage:
– Kongruenzsätze, Stabilität und Gelenkmechanismen,
– affine Basis für die Ebene, Beweglichkeit der Ebene, falls sie nur in kollinearen Punkten festgehalten wird, Zerlegung von Polygonen in Dreiecke,
– schiefe Ebene, Optimierung der Kraftrichtung zur Erzeugung einer Bewegung, Verwendung als Richtungssymbol,
– Drehsymmetrie des gleichseitigen Dreiecks,
– Pythagoras-Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks, Längen- und Flächenberechnungen,
– Optimalitätseigenschaften besonderer Punkte, speziell des Schwer- und des Torricellipunkts,
– Dreiecksungleichung, Beweise.

2. Das Prinzip der operativen Begriffsbildung

Gerade das Beispiel des Torricellipunkts zeigt, daß umweltbezogene Mathematik keineswegs oberflächlich, niveaulos oder unpräzise sein muß; der Grad der Exaktheit bemißt sich an den Anforderungen, die an die Lösung eines Problems gestellt werden, und hängt auch stark von den zur Verfügung stehenden Mitteln ab, und zwar solchen intellektueller (von der Grundschule bis zu wissenschaftlicher Forschung), technologischer (erst die Entwicklung der Computer in den letzten Jahrzehnten hat die Anwendung weiter Teile der Mathematik ermöglicht) oder ökonomischer Art (wenn kein Geld für einen hinreichend großen Computer da ist, muß man sich eben mit einfacher zu realisierenden Methoden behelfen). Und die Standortwahl für das E-Werk der drei Gemeinden wird nebenbei auch noch vom Gelände beeinflußt.

Aufgabe des MU ist es, allgemein den intellektuellen Faktor positiv zu beeinflussen, aber nicht durch Ausbildung der Schüler zu Mathematikern, sondern zu Menschen, die die Bedeutung der Mathematik erfassen können. Das kann jedoch nicht heißen, daß Umweltbezogenheit der einzige Prüfstein für die Aufnahme eines mathematischen Stoffs in den Unterricht ist. Wenn ein geometrischer Begriff, wie z.B. der Faßkreis, nicht direkt auf die Realität bezogen ist, so ist er doch auf andere Begriffe bezogen, z.B. auf den Torricellipunkt, diese wieder auf andere, usw. Und ein *Teil* der ganzen Beziehungshaltigkeit der Mathematik ist ihre Beziehung zur Umwelt. Die Forderung nach Beziehungshaltigkeit im MU, die auch von „reinen" Mathematikern anerkannt wird, beinhaltet auch, recht verstanden, eine Forderung nach Umweltbezug und damit Umwelterschließung durch den MU.

Erfüllt werden kann diese Forderung jedoch nur, wenn die mathematische Begriffswelt auf die Wirklichkeit paßt. Obwohl die meisten grundlegenden mathematischen Begriffe der Auseinandersetzung des Menschen mit der Wirklichkeit entstammen, ist ihnen in der systematischen Wissenschaft diese Herkunft oft nicht mehr anzusehen. Die Begriffe der Geometrie machen da keine Ausnahme; so ist aus der Lehre von der räumlichen Wirklichkeit eine axiomatische Theorie, lineare Algebra, Abbildungsgeometrie (der Ebene!), usw. geworden. Ein GU kann sich nicht damit begnügen, solche Theorien mit ihren Begriffen zu vermitteln oder auch nur die Begriffsbildung an ihnen auszurichten (dies konstatiert z. B. auch *H.-J. Vollrath* (1974)). Die Begriffe müssen vielmehr *genetisch* gebildet werden. Damit ist nicht eine Nachbildung der historisch-faktischen Genese gemeint, sondern eine interpretierend-konstruktible Genese (vgl. (Schreiber 1978b) und (OAG) von A. Schreiber und mir), die, in der Formulierung von Wittmann (1974/1978), „an den natürlichen erkenntnistheoretischen (im Unterschied zu: historischen (Anm. von mir)) Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist" und, noch weiter gehend: nicht nur an diesen Prozessen ausgerichtet ist, sondern sie sogar in die Begriffsbildung einbezieht.

Z. B. beim *Ziegelstein*: Sein Zweck ist seine Verwendung beim Bau von in der Regel ebenen Mauern. Er muß handlich sein, mit hinreichend vielen Exemplaren muß die Mauer lückenlos auszufüllen sein, jedoch darf die Parkettierung der von der Mauer gebildeten Ebene nicht eindeutig bestimmt sein, sondern es muß möglich sein, im Verbund (auch mehrreihig) zu mauern, mit geraden Kanten abzuschließen und Lücken variabler Größe (z. B. für Fenster) zu lassen. Hinter diesen geometrischen Einflußgrößen

stehen physikalische wie Stabilität und Schwerkraft. Wichtig ist also das *Passen* (Inzidenz von Körpern in ihren Oberflächen), und zwar als *eingeschränkte Beweglichkeit* (gegen die Schwerkraft, und auf einer bereits gemauerten Reihe muß die nächste Reihe an beliebiger Stelle begonnen werden können), als *Optimierung* (die Mauer muß lückenlos ausgefüllt werden können, und der Stein muß handlich sein) und als *Messen* (die Kantenlängen müssen in geeigneten Verhältnissen stehen). Dazu bedarf es der Ebenheit der Seitenflächen, Parallelität und Orthogonalität, also der mehrfachen Homogenität (Ununterscheidbarkeit) bzw. Symmetrie. Wie mit all den Anforderungen an den Ziegelstein seine geometrische Form bestimmt wird, analysiert H. Winter (1976). Der Begriff des Quaders (der Ebene, der Gerade, des rechten Winkels, der Parallelität, der Kongruenz von Strecken) ist aber, genetisch gesehen, nicht das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses. Die in der Wirklichkeit vorkommenden Quader (Ebenen, . . .) sind vielmehr, jedenfalls von einer gewissen Qualitätsstufe an, von Menschen hergestellte Objekte, denen der Begriff, die Idee, bereits zugrundeliegt. Entsprechend sind in einem genetischen Unterricht die fundamentalen geometrischen Begriffe wie Ebene, Kugel, Zylinder, Polyeder, Kegel, Gerade, Kreis, Schraubenlinie, Polygon, Strecke, Parallelität, Orthogonalität, Konvexität, Symmetrie, starrer Körper, Kongruenz usw. *operativ* in folgendem Sinn zu bilden:

Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe. (Prinzip der operativen Begriffsbildung (POB) in der Geometrie)

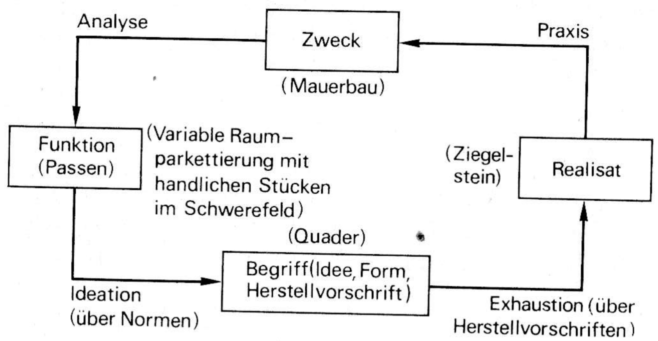

Abb. 11

Zum Wesen der dabei ins Spiel kommenden Ideation vergleiche man (Schreiber 1978a); der operative Standpunkt in der Geometrie wird genauer in (Schreiber 1978b) und in (OAG) abgehandelt.

Wie soll das POB in den GU eingebracht werden?

a) Genetischer Unterricht heißt, wie schon gesagt, *nicht einfach Nachvollzug* (aber durchaus Einbezug) *der historischen Entwicklung*: Als Form des Ziegelsteins in Mesopotamien z. B. hat sich erst nach und nach bis zum 26. Jhdt. v. Chr. der Quader herausgebildet: vom roh geformten Lehmpatzen über Klumpen mit ebener Unterlage, über

Ziegel mit rechteckigem Grundriß, ebenen Rändern und Unterseite, jedoch gewölbter Oberseite, bis schließlich zum Ziegelstein mit ebenen, paarweise parallelen Seitenflächen und rechten Kantenwinkeln (nach *H. Dingler* (1933, S. 40)).
Es erscheint nicht sinnvoll, im Unterricht diesen Prozeß getreu nachahmen zu wollen, die Schüler bei der Bildung des Begriffs „Quader" darauf festzulegen, jede der historischen Entwicklungsstufen zur Kenntnis zu nehmen oder gar auf jeder eine Zeit lang zu verharren. Die historisch-faktische Genese könnte eher Gegenstand eines geschichtlichen Rückblicks nach hinreichender Ausbildung des Quaderbegriffs sein.

b) Für die Begriffsbildung ist es auch mit einem einmaligen, einfachen Durchlaufen des Schemas keineswegs getan. Bereits in der Analyse eines einzigen Zwecks mit einer Diskussion möglicher Alternativen, die zumindest gedanklich oder im Modell realisiert und eventuell wieder verworfen werden, können sich mehrere Durchläufe ergeben:
– Wie wäre es, wenn zum Mauern Quader mit anderen Seitenverhältnissen, z. B. Würfel, verwendet würden, oder Prismen mit sechseckiger Grundfläche, mit denen ja die Ebene ebenfalls parkettiert werden kann, oder Dodekaeder oder krummflächig begrenzte Körper? – Wo kommen noch Quader vor? – Zimmer, Möbelstücke, Kartons sind häufig quaderförmig. – Auch bei diesen Beispielen ergibt eine sorgfältige Analyse wieder die Funktion der variablen Raumparkettierung mit „handlichen" Stücken. – Warum werden aber Konservendosen i. a. nicht quaderförmig, sondern zylinderförmig hergestellt?
– Hier ist das Material zur Erzeugung von Ecken und Kanten nicht geeignet.
– Die Frage nach der Funktion der Stabilisierungsdreiecke am Regal wird vielleicht zunächst so beantwortet: „Wenn die beiden Bretter (am rechten Winkel) zusammenklappen wollen, werden sie von der Querstrebe auseinandergedrückt; wenn sie auseinanderklappen wollen, werden sie zusammengehalten." Dabei besteht bei einem kompletten Regal noch die Schwierigkeit, eine Instabilität der Konstruktion als eine solche von Winkeln zu erkennen, bei der es nur auf die Veränderung der Lage von Teilen zueinander ankommt. Später werden (hoffentlich) die Kongruenzsätze zur Begründung herangezogen. Jedoch behält die ursprüngliche Erklärung auch dann noch ihre Gültigkeit; denn sie stellt ja eine lediglich unpräzise Formulierung eines Kongruenzsatzes dar.
– Als Ursache für das Wackeln eines vierbeinigen Tischs wird spontan (auch von Erwachsenen) angeführt, daß ein Bein kürzer sei als die drei anderen, auf denen der Tisch steht. Bringt man den Tisch in seine andere stabile Lage, so wird plötzlich ein anderes Bein das kürzeste. Aber noch nicht einmal die Annahme, daß die beiden abwechselnd freien Beine kürzer als die beiden anderen sein müßten, ist richtig: Es ist nur notwendig, daß sie jeweils „mehr Platz haben, als sie lang sind". Diese Erkenntnis läßt sich später mit dem Strahlensatz quantitativ fassen, etwa in folgendem Beispiel:
Bei einem vierbeinigen, quadratischen Tisch sind zwei gegenüberliegende Beine 800 mm, das dritte 790 mm lang. Wie lang muß das vierte sein, damit der Tisch auf allen vieren steht? – 810 mm. – Wie groß ist dann der Neigungswinkel der Tischplatte gegen den Boden, wenn die Tischkante 1 m lang ist? Was passiert, wenn das vierte Bein 805 mm, wenn es 820 mm lang ist? Bei einer Länge von 805 mm sollen an genau 3 (2 oder 1) Beinen Stückchen abgesägt werden, damit der Stand stabil wird. Wie lang müssen die Stücke sein? – Beim Sägen, bzw. bei den Messungen und Berechnungen davor, ist Sorgfalt angebracht; denn sonst wackelt der Tisch danach immer noch, es muß ein anderes

Bein wieder etwas verkürzt werden, usw., und am Schluß hat man keinen Tisch mehr, sondern eine Bodenplatte.
All diesen Schwierigkeiten kann man aus dem Weg gehen, indem man einen Bierdeckel unterlegt – oder gleich vom Boden ißt. Aber dann wird man auf das grundlegende Problem gestoßen, welche geometrische Gestalt der Boden haben soll, wenn man ihn als Eßstatt benutzen will, auf dem man an beliebigen Stellen allerlei Gegenstände, auch Tische, plazieren will, und wie diese Form hergestellt werden kann.

c) Die *Verbindungen des GU zum Werk- bzw. Technikunterricht* sind unübersehbar. Allerdings ist er kein solcher Unterricht; in ihm geht es vordringlich nicht um den Erwerb manueller Fertigkeiten, Werkstoffkunde oder die Analyse und Anwendung physikalisch-technischer Sachverhalte, sondern um die Struktur des Raums. Sobald diese im Werk-, Technik-, Physik- oder in einem sonstigen Unterricht thematisiert wird, ist dieser Unterricht zugleich GU: Geometrische Begriffsbildung bei der Herstellung von Formen, Genauigkeitsschichten bei der Realisierung einer Form durch verschiedene Werkstoffe oder Bearbeitungsweisen, Wirkung physikalischer Kräfte als Verformungen und Bewegungen oder die Frage nach der Natur des physikalischen Raums, – aber auch nur so lange.
Die bloße Analyse von räumlichen, formenhaften Phänomenen oder von Situationen, in denen diese wichtig sind, reicht jedoch nicht aus für eine Strukturierung des wirklichen Raums. Dazu bedarf es vielmehr auch einer *Strukturierung des Systems sich dabei bildender Begriffe* mit Hilfe von Definitionen, Sätzen, Regeln, Beispielen, Handlungsvorschriften und weiteren Begriffen, deren primäre Funktion es ist, Ordnung im System zu schaffen und zu halten, z. B. der Faßkreis bei der Konstruktion des Torricellipunkts, die Scherung als flächeninhaltstreue Abbildung, mit Zirkel und Lineal konstruierbare regelmäßige Polygone (es gibt gar nicht so viele Begriffe, die nicht irgendwie direkten Umweltbezug haben).
Dieses gedankliche System wird den Schülern nicht fertig vorgesetzt, sie erschaffen es, unter Anleitung, selbst. Mit dem POB bleibt dabei der Bezug zur räumlichen Wirklichkeit ständig erhalten, die sogenannten Anwendungen sind von vornherein Teil der Begriffsbildung; und so ist es kein Wunder, daß die Begriffe auf unsere räumliche Wirklichkeit passen, obwohl sie ihr eigentlich gar nicht entstammen, sondern ihr durch die ideativ geleitete Herstellung geometrischer Formen aufgeprägt werden. Trotz fortwährenden Wirklichkeitsbezugs geht der GU also über Werken, Technik oder Physik in jedem Stadium, auf jeder Schulstufe, deutlich hinaus. Eine durch den Anspruch auf Umwelterschließung im GU aber dennoch notwendige Anbindung an den Unterricht auch in jenen Fächern wird durch operative Begriffsbildung (OB) nur gefördert.

d) Am reinsten zu verwirklichen wäre das POB, wenn Schüler in *Problemsituationen* gebracht werden könnten, in denen sie die Probleme durch Bildung geometrischer Begriffe mit Herstellung und Anwendung geometrischer Formen zu lösen hätten (das hat mit dem „herkömmlichen" problemorientierten MU recht wenig zu tun, in dem es oft um innermathematische problemorientierte Zugänge zu mathematischen Inhalten geht). Es ist aber die Eigenart von Schulunterricht, nicht zuletzt bedingt durch den Zwang zur Leistungskontrolle, daß, bis auf seltene Fälle, die Probleme keine echten, sondern eben gestellte Probleme sind. In vielen gestellten, erst recht in echten Problemen sind die zweckentsprechende Realisierung und der praktische Gebrauch geometrischer Formen, z. B. Herstellung von Möbelstücken, Bau eines Fahrzeugschuppens, Reparatur eines defekten Uhrwerks, Messungen im Gelände oder auch manuelle Produktion von Ziegelsteinen, technisch oder zeitlich so aufwendig, daß sie im MU, und wohl auch in praktischen Fächern, bei der bei uns üblichen Organisation von Schule keinen Platz haben.

e) So muß die OB durch Herstellen einfacher Modelle, oft aus bereits geometrisiertem Material, gefördert werden: Funktionsmodell eines Scheibenwischers aus Baukastenteilen, Flächenmodell eines Würfels aus Pappe, geometrisches Zeichnen (von „freihändig" bis Darstellende Geometrie). Modelle nehmen eine Mittelstellung zwischen Idee und Realisat ein; je nach ihrer Abstraktheit (algebraisches oder Holzmodell eines Würfels) tendieren sie mehr zum einen oder anderen der beiden Pole. Es entspricht der OB durchaus, wenn Probleme zunächst einmal im Modell gelöst werden, wo der technische Aufwand noch nicht so groß ist und Schwierigkeiten mit der Exhaustion, d. h. Güte der Realisierung, noch keine Rolle spielen, ehe diese Lösung dann auf die Realität angewandt wird. Dort stellen sich durch die Exhaustion jedoch eventuell neue Probleme, die allerdings ihrerseits auch wieder zunächst im Modell gelöst werden können.
Z. B. bei der Herstellung tetraederförmiger Schulmilchtüten nach (*Müller/Wittmann* 1977, S. 128ff): Mit einem Papiermodell ergibt sich die bekannte Lösung der Herstellung aus einem ebenen Tetraedernetz (Abb. 12a) durch Falten und Verschweißen.

Abb. 12

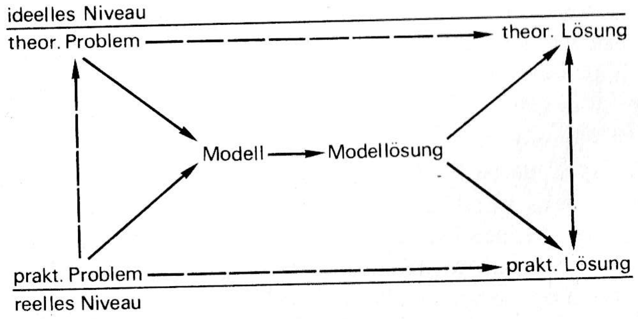

Abb. 13

Mit der Realisierung wird das praktische Problem gelöst: die Modellösung ist auch gleichzeitig eine Lösung des durch die Analyse entstandenen theoretischen Problems. Jedoch können bei der Übertragung auf beide Niveaus Schwierigkeiten entstehen, wenn das Modell dem Problem nicht adäquat ist. Bei den Milchtüten werden diejenigen Ecken undicht, an denen zwei Schweißnähte zusammenstoßen. Das neue Problem, diese Undichtigkeiten zu beseitigen, kann wieder, entsprechend dem Schema, zuerst im Modell gelöst (Abb. 12b) und dann realisiert werden.

f) Mit einer eigenhändigen Begriffsbildung kann im GU aber nicht *vor* jeder Geometrie begonnen werden. Schüler haben schon tausendfach Erfahrungen mit geometrischen Formen in ihrer Umwelt gemacht, mit Ebenen (Schreibtischplatte, Heftseite, Unterrichtsmaterial aus Plastik), Kugeln (Gegenstände zum Spielen), Parallelität (Eisenbahnschienen, Möbelkanten, Fahrbahnmarkierungen), usw. Daran kann ein genetischer Unterricht nicht vorbeigehen; diese Erfahrungen müssen bewußt gemacht, geordnet und ausgebaut werden.
Auch wenn eine Diskussion über einen geometrischen Begriff im GU ihren Ausgang von der Sphäre menschlicher Bedürfnisse, von einem Problem, nimmt, etwa Verpackung eines Getränks für den Weg von der Produktionsstätte bis zum Verbraucher, beziehen die Schüler die ihnen geläufigen Realisate geometrischer Formen doch mehr oder weniger explizit in die Diskussion ein. Diese Vorkenntnisse dürfen nicht nur nicht als störend aufgefaßt werden, sie sind auszunutzen. Die anschaulichen Objekte sollten früh eingebracht, von ihnen aus die dahinterstehenden Bedürfnisse, Zwecke und Funktionen analysiert, die Form begründet und für sie Herstellvorschriften entwickelt werden. Die Begriffsbildungsschleife wird dann also beim Realisat begonnen, wie z. B. in „Geometrie der Schulmilchtüten" bei (Müller/Wittmann 1977): Ausgehend von den Tüten wird die Herstellweise beschrieben, begründet und nachvollzogen; es ergeben sich Bezüge zum gesellschafts- und zum naturwissenschaftlichen Bereich des Sachunterrichts, sowie zur weiterführenden Geometrie.
g) Eine solche Handlungsorientiertheit des GU wird z.Z. vor allem in der Primarstufe verwirklicht (oder angestrebt), allerdings eher aus psychologischen bzw. methodischen Gründen. Das POB fordert sie darüber hinaus für den GU aller Stufen, und zwar primär aus inhaltlichen Gründen: Die Handlungen sind Teil der Begriffsbildung, und die Begriffe haben sich in ihnen zu bewähren. Auch das Reden über Handlungen, die Entwicklung von Herstellvorschriften, gehören zu einem handlungsorientierten Unterricht.
Das *Schema der OB* darf nicht starr, nicht „schematisch" gehandhabt werden. Es *ist ein Grundmuster* in dem komplexen Geflecht geometrischer Begriffe und darf keineswegs für einzelne Begriffe isoliert gesehen werden, sondern bezieht immer schon andere Begriffe mit ein und fördert auch deren Bildung mit, etwa auch bei Wiederaufnahme an verschiedenen Stellen der „Curriculumspirale" auf verschiedenen Niveaus.

3. Lernziele für einen umwelterschließenden Geometrieunterricht

Mit einem durch OB genetisierten System geometrischer Begriffe wird der wirkliche Raum strukturiert und kann die Nutzbarkeit dieser Struktur erforscht werden. Diese Raumstrukturierung und Nutzbarkeitsforschung findet in Form von gewissen „Grundtätigkeiten" statt, die im folgenden als Lernziele aufgelistet und an Beispielen illustriert werden. Ein Lernziel „X können" bedeutet, der GU soll den Schüler zur Grundtätigkeit „X" befähigen, ihm die Grundfähigkeit „X können" vermitteln. Der Bezug zum POB ist zwar durchgängig; der Katalog ist aber nicht in erster Linie am POB, sondern an der Forderung nach Umwelterschließung im GU orientiert, und er stellt eher eine Rechtfertigung für das POB dar.
Es wäre ein Unding, wollte man die Unterrichtsaktivitäten so gestalten, daß jeweils genau eine Grundtätigkeit ausgeführt wird; außerdem wäre dies unmöglich. Die Grundfähigkeiten bedingen und fördern sich gegenseitig. Entsprechend schwierig ist es, Bei-

spiele bestimmten Posten des Katalogs zuzuordnen, und man kann über die im folgenden vorgenommene Einordnung geteilter Meinung sein. Insbesondere sagen Zahl und Ausführlichkeit von Beispielen zu einem bestimmten Lernziel nichts über dessen Gewicht aus. Eine mögliche Strukturierung ist in folgender Skizze angedeutet:

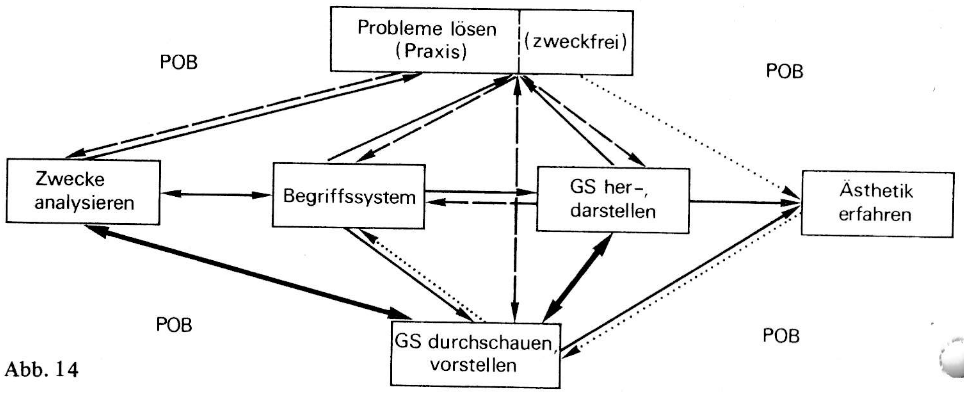

Abb. 14

Dabei bedeuten die Pfeile: „kann (direkt) fördern", die Dicke der Pfeile deutet die Intensität der Förderung an. Es wäre bestimmt nicht falsch, wenn man alle graphentheoretisch möglichen Pfeile einzeichnen würde. Im Feld „Probleme lösen" ist ein „zweckfreier" Teil gesondert eingezeichnet. Genau die Pfeile, die an der Trennlinie ankommen od oder von ihr abgehen, beziehen sich auf beide Teile. Dem Ganzen ist das POB zu unterlegen (nicht für jeden Pfeil in gleichem Ausmaß), was durch die mehrfache Plazierung dieser Abkürzung ausgedrückt wird. Mit GS schließlich wird der Sammelbegriff „Geometrische Sachverhalte" abgekürzt, welcher für lokale (Formen, Größen, Relationen) und globale räumliche Strukturen steht.

3.1 *GS durchschauen und sich vorstellen können*

Die beiden Tätigkeiten „durchschauen" und „sich vorstellen" sind in ihren Reinformen zwei Pole einer stetigen Skala. Zu durchschauende GS liegen vor, sich vorzustellende nicht, sie sind durch Symbole gegeben (Sprache, Schrift, Gleichung). Vorstellungsvermögen ist das „höhere" Ziel, denn viele GS entziehen sich dem Durchschauen durch ihre Größe (Länder, Moleküle), Unzugänglichkeit (das Innere eines Motors), Dreidimensionalität (man sieht ja immer nur ein zweidimensionales Bild von einer Seite eines Gegenstandes) oder Veränderung in der Zeit (Briefwaage, Uhrwerk, Archimedische Schnecke). Man behilft sich mit Plänen, Bildern, räumlichen Modellen, Beschreibungen usw. und braucht dabei schon die Vorstellung, um vom Modell auf das Original schließen zu können oder um während einer Bewegung zu jedem Zeitpunkt ein Bild von den jeweils früheren Lagen eines Objekts zu haben.
Aber ohne Durchschauenstraining, ohne anschauliche Hilfsmittel, und oft auch ohne die fraglichen Objekte schon einmal gesehen zu haben, ist Vorstellung nicht möglich. So alt diese Erkenntnis ist, so oft wird gegen sie verstoßen, im GU nicht weniger als anderswo (ein Zeitschriftenaufsatz kann wegen technischer Vorgaben nicht so streng mit diesem Maßstab gemessen werden), wenn nicht durch streckenweise völlige Abweichung von Anschaulichkeit, dann doch durch die fast ausschließliche Beschränkung auf die ebene Geometrie. Für diese Beschränkung gibt es Gründe, z. B. bessere Darstellungsmöglichkeit, einfachere Struktur.

a) Aber es ist zweifelhaft, ob den Schülern die Extrapolation auf den dreidimensionalen Raum tatsächlich so ohne weiteres gelingt, oder ob nicht die „räumliche Einbildungskraft . . . durch zu viel und zu einseitig geübte Planimetrie erstickt" wird (Freudenthal 1973, S. 382). Immerhin trifft im Raum nicht zu, daß
– zwei nicht parallele Geraden sich schneiden,
– volumengleiche Polyeder zerlegungs- oder ergänzungsgleich sind,
– jede eigentliche Bewegung eine Drehung oder eine Schiebung ist.
– höchstens vier Gebiete paarweise benachbart sein können.
Viele Schwierigkeiten treten erst mit der dritten Dimension auf, und manche mathematische Disziplin fängt dann erst richtig an.
Es reicht allerdings nicht, die ebene Geometrie nur halbherzig zu verlassen, sich nur mit Körpern zu beschäftigen, die als Translationsspur ebener Figuren senkrecht auf einer waagrechten Ebene stehen (Prismen, Zylinder) oder sonst allzu „kanonisch" in das rechtwinklige Koordinatensystem passen (senkrechte quadratische Pyramiden), und diejenigen ihrer Eigenschaften zu behandeln, die schon Eigenschaften der erzeugenden Figuren in kanonischer Lage in der Ebene sind.
– Denn so lernt man z. B. nicht, es für möglich zu halten, daß ein 250 cm hohes und 205 cm breites Regal durch eine 200 cm hohe Tür passen kann. Man muß mit im Raum bzw. zueinander schrägen Achsen und Ebenen umgehen können. Ist die Tür 125 cm breit und das Regal 35 cm tief, dann muß dieses zunächst auf eine Seitenwand gelegt werden, so daß die Höhe dann nur noch 205 cm beträgt, danach an der Vorderseite um etwa 26° angehoben und die hintere Kante auf dem Boden etwa 33 cm vom Türrahmen entfernt aufgesetzt werden.

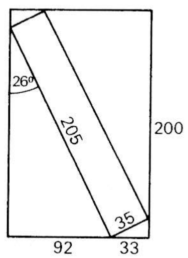

Abb. 15

Dann ist

$$35 \cdot \cos 26^\circ < 33, \quad 205 \cdot \sin 26^\circ < 92 \quad \text{und}$$
$$35 \cdot \sin 26^\circ + 205 \cdot \cos 26^\circ < 200,$$

und das Regal paßt durch die Tür. (Hier liegt eine praktische und etwas komplexere Variante der alten Aufgabe vor, in welcher Höhe eine 205 cm lange Leiter an einer Wand lehnt, wenn diese Leiter am Boden einen Abstand von 92 cm hat.)

Weitere Beispiele:

– Welchen Winkel bilden zwei Symmetrieachsen im Tetraeder? – Zunächst wird aus diesem Problem ein ebenes gemacht. Dazu wird ein ebener Schnitt durch den Tetraeder geführt, der zwei Achsen enthält.

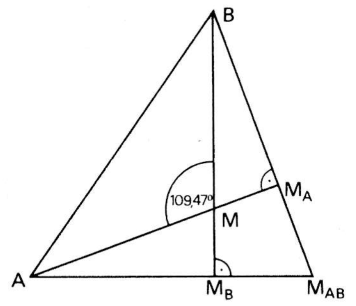

Abb. 16

Dann liegt die vordere Kante des Tetraeders schräg (nicht parallel und nicht senkrecht) zur Schnittebene. Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Tetraederkante und zwei Seitendreieckshöhen als Seiten. Ist für die Kante $\overline{AB}$ die Länge 1, so beträgt die Höhe $\overline{BM_{AB}}$ im gleichseitigen Dreieck nach dem Pythagorassatz $\sqrt{\frac{3}{2}}$, und nach den Eigenschaften des Schwerpunkts haben die Strecken BM_A und $\overline{AM_B}$ die Länge $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dann ist $w(M_A AB) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = w(M_B BA)$, und der gesuchte Winkel ist $180° - 2 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = 109{,}47°$. Von Interesse ist dieser Winkel beim Tetraedermodell des Methanmoleküls.

– Wie sieht die Fläche $z = y^2 - x^2$ im $\mathbb{R}^3$ aus? (Moderne Dachform)

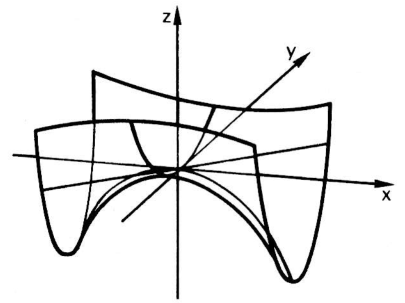

Abb. 17

– Es gibt ebene Wege auf der Fläche durch den Ursprung, auf denen er der höchste, solche, auf denen er der tiefste Punkt ist (Paß im Gebirge), und solche, die Geraden sind. Die Verhältnisse bei Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind viel komplizierter als bei Kurven im $\mathbb{R}^2$ und können auch noch viel komplizierter als im Beispiel sein.

– Wie sieht ein massiver, nirgends zur Dicke 0 entarteter Körper aus, der in den drei Achsenrichtungen folgende Profile hat?

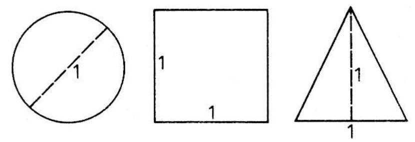

Abb. 18

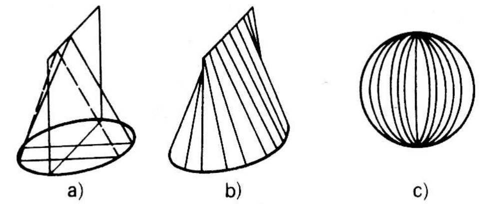

Abb. 19

Eine Lösung ist ein Konoid. Man kann sich dazu ein Kantenmodell wie in Abb. 19a vorstellen, an dem Bindfäden gespannt werden, deren Aufhängungspunkte man mit geeigneten Hilfslinien und -flächen erhält (Abb. 19b). Ein Blick in Richtung des kreisförmigen Profils ergibt mit Höhenlinien Abb. 19c. (*K. Menninger* (1954/1958, S. 167) gibt eine andere Lösung an.)

– Kugelgeometrie (das ist zwar Geometrie auf einer Fläche, hat aber räumlichen Charakter).

Der geistige Nachvollzug eines *Herstellprozesses* erweist sich als erfolgreiches Hilfsmittel dabei, sich GS vorzustellen:

– zwei ineinander gewundene Schraubenlinien als Verbindung zweier Drahtenden (man muß sie gegenseitig umeinander winden und nicht das eine um das andere, da sonst das gerade Stück leicht herausgezogen werden könnte) (nach (*Gööck* 1971/1975)),

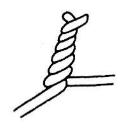

Abb. 20

– der scheinbar seltsame Verlauf der Schweißnähte bei den Milchtüten wird plausibel, wenn man sich die Fertigung dieser Tüten vergegenwärtigt,

– einen kürzesten Weg, den eine Spinne auf einer Würfeloberfläche ohne Deckel im Punkt S zu einer toten Fliege im Punkt F überwinden muß, findet man, indem man sich die Fläche aus einem ebenen Netz zusammengeklebt denkt und in diesem Netz die Strecke SF einzeichnet; bei einer Kantenlänge 1 hat dann der Weg die Länge $\frac{\sqrt{17}}{2} < 2{,}07$.

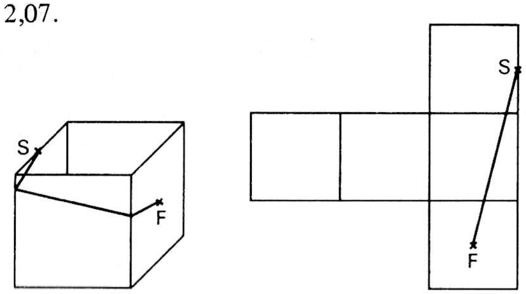

Abb. 21

Es wird oft Bezug auf die Ebene genommen, denn Winkel sind eben, in Ebenen sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten Strecken, und das menschliche Gesichtsfeld ist zweidimensional. Aber nicht Beschränkung auf ebene Probleme ist die Konsequenz, sondern ständiger Wechsel vom Zwei- zum Dreidimensionalen (Karten, Pläne, Zeichnungen lesen und das Dargestellte herstellen können) und umgekehrt (zeichnerische Darstellung) als eine Grundtätigkeit menschlicher Kommunikation, insbesondere auch für viele Berufe.
Sogar die „besonders räumliche“ Form der Schraubenlinie läßt sich aus einer Geraden herstellen und sich somit leichter durchschauen und vorstellen: Eine Ebene wird zu einem Zylindermantel aufgewickelt, und dabei werden ihre Geraden Schraubenlinien, manche zum Kreis oder zur Gerade entartet.

b) Ein weiterer Aspekt ist für Herstell- und Funktionsprozesse, für GS überhaupt, wichtig: der *kinematische.* Seiner gebührenden Berücksichtigung im GU stehen Schwierigkeiten in der Darstellung, aber auch das abbildungsgeometrische Vorgehen im modernen GU entgegen. Bei diesem muß ja gerade die Vorstellung einer stetigen physikalischen Bewegung beseitigt werden, es gibt nur die beiden Zustände „davor“ und „danach“. So kann man, im Unterschied zur Realität, abbildungsgeometrisch durchaus einen starren geknickten Nagel in eine starre Wand mit entsprechender Höhlung praktizieren, etwa mit der Translation $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x, y, z) \to (x + 2, y, z)$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

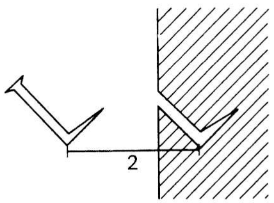

Abb. 22

Allerdings wird mit der Abbildung f nicht nur der Nagel, sondern der ganze Raum, und damit auch die Wand, um 2 versetzt, und eigentlich wird nur festgestellt, daß der Nagel in die Höhlung passen würde, daß er zu ihr kongruent ist.
Der mathematische Abbildungsbegriff in der (Abbildungs-)Geometrie ist räumlichen Bewegungen in vielen Belangen nicht adäquat. Er ist ein wertvolles mathematisches Werkzeug, mit dem Beziehungen zwischen mathematischen Objekten hergestellt bzw. überprüft werden können. Es ist aber zweifelhaft, ob die Tätigkeitswörter „drehen“, „schieben“, „strecken“ und die zugehörigen Tätigkeiten, mit denen Abbildungen üblicherweise enaktiv repräsentiert werden, dem Abbildungsbegriff gerecht werden; am ehesten vielleicht noch „spiegeln“, das aber auch unter diesen am wenigsten physikalisch ist.
Reale Bewegungen lassen sich sehr wohl angemessen mathematisieren: Sei ein $\mathbb{R}^3$-Koordinatensystem fest mit der Wand verbunden, d. h. die Wand und die Höhlung seinen Punktmengen W und H im $\mathbb{R}^3$, der Nagel am Anfang der Bewegung die Menge $N \subset \mathbb{R}^3$, $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und $g: N \times I \to \mathbb{R}^3$ eine Isotopie, d. h. isometrisch in (x, y, z) und stetig, mit $g(N \times \{0\}) = N$ und $g(N \times \{1\}) \supseteq H$. Dann stellt

g (idealisiert) eine reale Bewegung dar, wenn $g(N \times I) \cap W = \phi$. Allerdings ist g kein Objekt der üblichen Abbildungsgeometrie, sondern der Kinematik, also der Physik. Jedoch sind kinematische Betrachtungen unerläßlich für das Verständnis zahlreicher geometrischer Phänomene:
– Wie wird beim Stromzähler eine Kreisbewegung mechanisch in digitales Zählen umgewandelt?

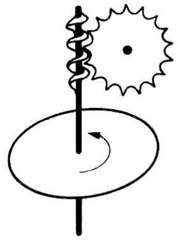
Abb. 23

Die Ankerscheibe rotiert mit einer Geschwindigkeit proportional zum Stromverbrauch. Die Schraubenfläche auf der Drehachse rotiert mit und dreht dabei das Übertragungsrad zum Zählwerk (nach (Gööck 1971/1975)). – Welches ist dessen Rotationsrichtung bei vorgegebener Rotationsrichtung der Ankerscheibe?
– Wie funktioniert (geometrisch) der Wankelmotor?

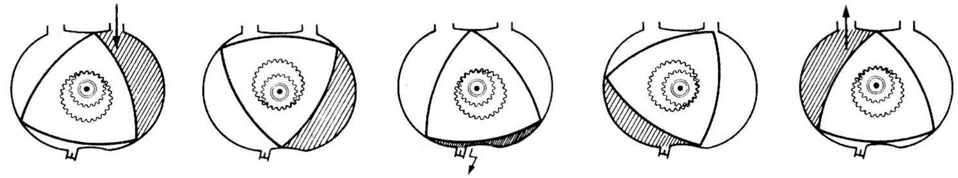
Abb. 24

Es handelt sich nicht einfach um die Rotation eines gleichseitigen Dreiecks mit gewölbten Seiten um seinen Mittelpunkt. Vielmehr rollt der dreieckige Läufer mit einem inneren Kreis (mit Zahnrädern) auf einem Kreis (mit Zahnrädern) ab, der fest im Gehäuse sitzt. Das Verhältnis der Radien und der Zähnezahl von 3:2 ist entscheidend dafür, daß die drei Ecken des Läufers auf einer einzigen Bahn laufen und wie diese Bahn aussieht. Nur so ist gewährleistet, daß immer drei getrennte Kammern vorhanden sind. Mit der Außenwölbung der Dreiecksseiten wird eine hohe Kompression in der jeweils kleinen Kammer erzielt.
– Wie funktioniert ein Türschloß, wie ein Uhrwerk?
– Wie werden Bewegungsarten ineinander übersetzt? – Ein erstes Beispiel ist die Schraubenlinie; mit ihr wird eine Rotation in eine dazu senkrechte Translation verwandelt. Einfacher zu durchschauende, weil ebene Beispiele sind die Antriebsräder einer Bergbahn oder eines Fließbandes, die eine Rotation in eine Translation in der Rotationsebene verwandeln; oder die Laufräder der Bergbahn und des Fließbands, eine Windmühle oder ein Mühlrad am Bach, die das Umgekehrte leisten. Beim Scheibenwischer oder bei der Ölpumpe werden Rotationen in Schwingbewegungen verwandelt, beim Kolbenmotor oder beim Antrieb der Dampflokomotive Schwingungen in Rotationen. Und schließ-

lich gibt es zahllose Möglichkeiten, Rotationen in andere Rotationen zu übertragen, wo die Achsen parallel oder nicht parallel, die Drehsinne gleich- oder gegenläufig, die Geschwindigkeiten gleich oder unterschiedlich sind, der Übertragungsmechanismus aus Zahnrädern, Treibriemen, Stangen oder gemeinsamen Achsen besteht.
Mit diesen Beispielen läßt sich ein weites Stück Geometrie treiben, besonders Kreisgeometrie mit dem wichtigen Tangentenbegriff. Dabei ist das Augenmerk auf zwei Verluste zu richten, die bei einer stufenweisen geometrischen Modellbildung über ein dreidimensionales Funktionsmodell bis hin zur Zeichnung entstehen: Beim Funktionsmodell ist es meistens bedeutungslos, welcher Teil treibt und welcher getrieben wird. Geometrisch sind bei einer Bewegungsübertragung beide Richtungen gleichberechtigt. Und bei der Zeichnung schließlich ist auch die Funktion des Abrollens und Vermeidung des Schleifens von Teilen aneinander nicht mehr deutlich, Reibungskräfte existieren nicht in der Geometrie. Trotzdem beinhaltet sie auch die Untersuchung solcher Rollvorgänge; es werden nicht die Kräfte, sondern die Bewegungen beschrieben, und es gibt auch rein geometrische Rollvorgänge, z. B. von Zahnrädern gegeneinander.

– Funktional ist das Rollen bei Räderfahrzeugen, und zwar bei solchen mit einem Motor, der die Räder treibt. Ein Projekt für einen fächerübergreifenden Unterricht ist eine genetische (nicht historische) Entwicklung des Räderfahrzeugs: Angefangen vom Abrollen eines schweren Gegenstandes auf untergelegten Baumstämmen, bei dem die überrollten Stämme immer wieder vorne angelegt werden müssen, bis zum lenkbaren Auto unserer Tage, dessen Räder an ihm befestigt sind und das den Boden nur an vier Punkten berührt und so weniger in der Fahrt von Unebenheiten erschüttert wird.

– Die Dampfwalze kann nur geradeaus fahren, weil in einer Kurve das eine Ende der Walze einen kürzeren Weg als das andere hätte und daher langsamer rotieren müßte (vgl. auch Menninger (1954/1958, S. 89)). Die Dampfwalze hat ja aber keine Transportfunktion, sondern soll Ebenen herstellen. Auf weichem Boden (Schnee oder Morast) ist die kleine Auflagefläche von Rädern ungünstig, das Fahrzeug sinkt ein. Die physikalischen Verhältnisse beim Schnee erfordern das Kufenfahrzeug, den Schlitten. Bleibt ein Auto im Morast stecken, kann man Balken unterlegen, muß die überrollten Balken aber wieder vorne anlegen. Einfacher ist es, sie am Fahrzeug befestigt mitzuführen, nämlich als Ketten (Raupen) beim Ketten- (Raupen-)fahrzeug. Die Bewegung eines Kettengliedes ist eine Variante der Zykloide (vgl. Abb. 25).
Während es auf dem Boden vom Fahrzeug überrollt wird, ist es in Ruhe; wenn es dann über den Rädern nach vorne läuft, bewegt es sich in doppelter Fahrzeuggeschwindigkeit in Fahrtrichtung, und nur wenn es über dem vorderen oder hinteren Rad abrollt, ist seine Bewegung zykloidenförmig.

– Die Verwandtschaft der Kegelschnitte untereinander läßt sich kinematisch instruktiv darstellen. Man legt eine Gerade senkrecht durch die Symmetrieachse des Kegels nicht durch die Spitze und läßt um diese Gerade eine Ebene rotieren. Als Kegelschnitte ergeben sich nacheinander Kreis, Ellipsen, Parabel, Hyperbeln, Geradenpaar, usw. Was passiert dabei jeweils mit den besonderen Punkten, Verhältnissen? Diese Rotation läßt sich mit einer Lampe mit oben und unten offenem Schirm an einer Wand realisieren; dabei rotiert jedoch die Lampe.

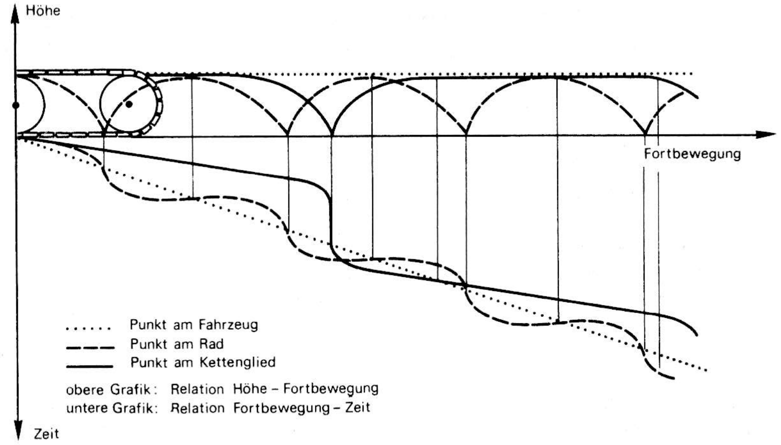

Abb. 25

c) Die *Zeit* kann *als räumliche Dimension* aufgefaßt werden. Dabei geht es im Moment nicht um physikalische Raum-Zeit-Probleme, sondern alles soll schön euklidisch sein: Eine Bewegung wird oft dadurch veranschaulicht, daß man von dem Vorgang statische, zweidimensionale Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten anfertigt, in denen die eingenommene Stellung jeweils charakteristisch für den Gesamtvorgang ist, z.B. in Abb. 24 beim Wankelmotor. Macht man die Abstände zwischen den Zeitpunkten klein genug und hält die Bilder dem Betrachter mit der entsprechenden Geschwindigkeit nacheinander vor, dann hat dieser den Eindruck der Bewegung des Bilds (Prinzip des Films). Praktisch ist diese rasche Bildfolge etwa dadurch zu erreichen, daß die Bilder passend direkt übereinandergelegt werden und man die Papierblätter nacheinander schnell über den Daumen streifen läßt wie ein Kartenspiel. Der Papierstapel hat eine gewisse Dicke, die zur dargestellten Zeitdauer proportional ist. Macht man die Aufnahmezeitpunkte immer häufiger, die Abstände zwischen ihnen immer kleiner, so müssen die Blätter immer dünner und die Bewegung immer „stetiger" werden. Schließlich (das hat man sich nicht als mathematischen Grenzübergang vorzustellen) entspricht jedes Blatt einem Punkt der reellen Strecke, die die Dicke des Stapels darstellt. Eine ebene Figur in Ruhe wird ein senkrechtes Prisma; bei einer Drehung eines Quadrats um seinen Mittelpunkt beschreibt jeder Punkt eine Schraubenlinie.
Eine dreidimensionale Kugel im Papierstapel würde als zeitliche Veränderung eines zweidimensionalen Bilds so beschrieben: Die unteren Blätter sind weiß. Dann erscheint ein Punkt, der sich sofort zu einem Kreis aufbläht, dessen Durchmesser d sich in der Zeit t so ändert: $d = 2\sqrt{t - t^2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, und wieder zu einem Punkt schrumpft. Die folgenden Blätter sind wieder weiß. Genau so kann man sich eine vierdimensionale Vollkugel vorstellen: Man denkt sich ein leeres Raumstück, in dem plötzlich ein Punkt erscheint, der sich zu einer Kugel aufbläht, deren Durchmesser wie oben von der Zeit abhängt, bis sie wieder verschwindet. Man darf jedoch in der Vorstellung nirgends verweilen, da die Kugel sonst verzerrt wird.

Praktisch verwirklicht, allerdings mit zwei Dimensionen weniger, sind solche Raum-Zeit-Transformationen bei Zug-Nomogrammen.

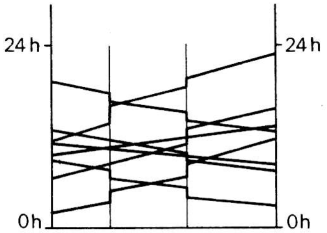

Abb. 26

Eine Zugstrecke wird als geometrische Strecke, die Zeitachse senkrecht dazu und Züge als Punkte gezeichnet. Je flacher ein Graph ist, desto schneller ist der Zug; senkrechte Abschnitte bedeuten Halte. Die Graphen sind immer monoton; genau dann steigt ein Graph, wenn der Zug von Astadt nach Bedorf fährt. Für eine eingleisige Strecke bedeutet das Schneiden zweier Geraden einen Zusammenstoß. Es ist Konvention, die Bahn-Strecke horizontal einzuzeichnen; wenn man gerne Funktionsgraphen haben will, muß man das Nomogramm um 90° drehen. Wie sieht der Graph eines Zuges aus, der über Mitternacht unterwegs ist?

d) Auch für Fragen der Raumorientierung sind kinematische Betrachtungen hilfreich: Es gibt zwei Orientierungen, d. h. genau zwei Möglichkeiten, in einem dreidimensionalen, rechtwinkligen Achsenkreuz nach Festlegung der Richtungen „oben – unten" und „vorn – hinten" auch noch „links – rechts" festzulegen. Die beiden Orientierungen lassen sich durch keine physikalisch mögliche Bewegung, sondern bestenfalls durch Spiegelung ineinander überführen. Entsprechend gibt es zwei Schraubrichtungen. Eine linkswendige Mutter kann nicht auf eine rechtswendige Schraube aufgedreht werden, und es ist auch gleichgültig, mit welcher der beiden Seiten nach vorn die Mutter aufgedreht wird, – entweder passen beide Seiten oder beide nicht. Zwei ineinander verzwirbelte Drahtenden sind in gleicher Richtung gewunden. Zum Glück werden auf der ganzen Welt Gewinde in einheitlicher Orientierung hergestellt – zum Nachteil für Linkshänder, die beim Öffnen einer Weinflasche den Korkenzieher physikalisch ungünstig in Richtung Körpermitte drehen müssen. Wenigstens braucht man bei Schraube und Mutter nicht auf die Wendigkeit, sondern nur auf Radius und Ganghöhe zu achten. Ausnahmen von dieser Einheitlichkeit sind Korkenzieher für Linkshänder oder links- und rechtswendige Schrauben an Radachsen an Fahrzeugen, die spiegelsymmetrisch befestigt sind und bei der Rotation beide nicht aufgedreht werden sollen.
Die Schwierigkeiten, sich über die Festlegung einer Orientierung zu verständigen, beschreibt *M. Gardner* (1964/1967) sehr eindrucksvoll: Z. B. für die Aussage, daß die Erde rechts herum rotiert, setzt man eine Orientierung der Drehachse voraus, nämlich daß der (magnetische) Nordpol oben und der (magnetische) Südpol unten ist. Analog haben Elementarteilchen einen Spin um eine durch die magnetischen Pole orientierte Achse. Wollte man einem Bewohner ferner Welten ohne optische Verbindung zu uns mit der Beschreibung des Elektronenspins erklären, wo links und wo rechts ist, könnte

er damit nichts anfangen, weil er nicht weiß, was bei uns der magnetische Nordpol und was der magnetische Südpol ist. Die beiden Pole schienen bis 1957 physikalisch völlig gleichberechtigt, ihre Festlegung war reine Konvention. Dann wurde jedoch eine Unterscheidungsmöglichkeit entdeckt: Der rotierende Kobalt-60-Atomkern emittiert beim Betazerfall an seinem Südpol mehr Elektronen als an seinem Nordpol. Und daraufhin könnte man einer fernen Intelligenz unsere Rechts-Links-Festlegung vermitteln, indem man das Experiment beschreibt, bei dem physikalisch, und nicht geometrisch, der Südpol einer Drehachse ausgezeichnet werden kann und die dabei auftretende Rotation „rechts" genannt wird. Allerdings könnte es sein, daß die ferne Welt aus Antimaterie besteht und die physikalischen Verhältnisse umgekehrt sind . . .
Damit Raumorientierung aber überhaupt als etwas Besonderes angesehen werden kann, muß man auch nichtorientierbare Räume kennen, z. B. das Möbiussche Band: Ein Papierband wird an einer Stelle aufgeschnitten und mit gegeneinander verdrehten Endkanten wieder verklebt.

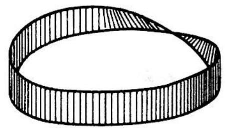
Abb. 27

Ein Teilstück dieses Bands darf nun nicht als ein physikalisches Stück Papier mit zwei Seiten gesehen werden, sondern ist als eine einzige Fläche aufzufassen. Dies realisiert man am günstigsten durch die Verwendung von Transparentpapier. Ein Muster in der Fläche wird durch einen einmaligen Umlauf an der Mittellinie des Bands gespiegelt, d.h. bei einem Umlauf ändert sich die Orientierung. Auch das Muster malt man am besten auf ein Stück Transparentpapier und beachtet, daß es sich eigentlich in der Möbiusfläche und nicht (vom Betrachter aus) davor oder dahinter befindet.
Topologische, bzw. differentialgeometrische Einbettungen nichteuklidischer Flächen in den euklidischen Raum sind anschauliche Modelle für die Theorien über den physikalischen Raum im Großen und erleichtern die Vorstellung vom Raumkrümmungen verschiedener Stärken oder Löchern.

e) Direkt umweltbezogen und relevant für alle Schulstufen sind *Einbettungen von Linien in den Raum,* als Kettenglieder, als Knoten, als Strickmaschen, als Flechtwerk oder als Verkehrsknotenpunkte. Im euklidischen Raum sind alle geschlossenen Linien zusammenziehbar; ein um einen Pfahl gewundenes Seil jedoch nicht. Der vom Pfahl eingenommene Raum steht nicht zum Zusammenziehen zur Verfügung; der Gesamtraum ohne den (unendlich lang oder zu einem Ring gekrümmt gedachten) Pfahl ist nicht einfach zusammenhängend. Beim Stricken wirkt die Nadel, ein durchgezogener Faden oder die Nachbarmasche als „Loch" im Raum, durch das die Masche sich nicht zusammenziehen kann.

f) H. Freudenthal (1973, S. 377f) notiert eine längere Liste von „Fragen, . . . wenn man den Raum erforschen will", wobei „keine Frage mit praktischem Nutzen" ist. Insofern würden diese Fragen thematisch zum Lernziel „GS durchschauen und sich vorstellen können“ gehören. Aber Freudenthals Behauptung stimmt nicht ganz: Einige dieser Fragen liegen sehr wohl einer praktischen Nutzung zugrunde: „Warum entstehen beim Papierfalten Geraden? Warum ist eine Papierrolle starr? . . . Warum ist die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten? . . . Was ist der kürzeste Weg eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten, der einen Spiegel berühren soll? . . . Welche geschlossenen Kurven sind in allen Richtungen genauso breit? Wie ändert sich das Niveau einer Flüssigkeit in einem Gefäß, wenn eine gewisse Menge der Flüssigkeit hinzugefügt wird? . . . Wie kann man die Neigung einer Geraden und einer Ebene, wie die zweier Ebenen messen? . . . Welcher Unterschied besteht zwischen einer rechten und einer linken Schraube? . . . Warum ist ein konvexes Polyeder starr? Warum kann ein Tisch mit vier Beinen wackeln? . . . Warum hängt man eine Tür in zwei Scharniere, und wie müßte man ein drittes anbringen? . . . Warum vertauscht der Spiegel links und rechts und nicht oben und unten? “ Auch viele der in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Beispiele sind mit Fragen der praktischen Nutzung eng verbunden. So lange diese Nutzungsmöglichkeiten jedoch nicht analysiert und die geometrischen Herstellverfahren nicht mindestens erörtert (wenn schon nicht praktiziert) werden, so lange sich der GU also auf bloße Raum„betrachtung“ beschränkt, ist die Begriffsbildung nicht operativ.

3.2 *Den Zweck und die Zweckhaftigkeit von GSn erkennen und beschreiben können.*
Im folgenden wird für einige geometrische Formen untersucht, welchen Zweck sie haben und wie gut sie geeignet sind, diesen zu erfüllen. Eine Sonderstellung nehmen dabei natürliche Formen ein, weil sie nicht das Ergebnis planvoller Tätigkeit sondern Ausdruck von Naturgesetzen sind.

a) Warum sind die Öffnungen von *Bienenwaben* regelmäßige Sechsecke? – Die Waben sind Kammern aus Wachs für die Aufzucht des Nachwuchses und Aufbewahrung des Honigs. Ihre Größe ist durch die Anatomie der Bienen bestimmt, von denen sie gebaut werden. Als Wabengröße könnte z. B. das Maximum der Durchmesser aller in den Querschnitt einbeschreibbaren Kreise definiert werden. Da die Bienen alle etwa gleich groß sind, sind auch die Waben alle etwa gleich groß. Beim Bauen kreisen die Bienen in den Waben, so daß diese ungefähr kreisförmigen Querschnitt erhalten. Die dichteste Lagerung von Kreisen in der Ebene ist die in Abb. 28 angegebene.

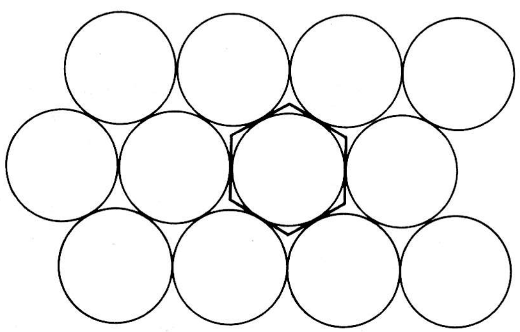

Abb. 28

Während der Bauarbeit ist das Wachs noch halbflüssig, so daß es nach den Kapillaritätsgesetzen die Fläche (bzw. im Querschnitt die Kante) einnimmt, die minimalen Inhalt hat (nach *Weyl* 1952/1955)). D. h. jedes Wandstück berandet zwei Waben zugleich, ist stückweise eben, und die Wabengröße hat sich im Vergleich zur Kreisform nicht geändert. Daß die im Querschnitt entstehenden Polygone *regelmäßige* Sechsecke sein müssen, sieht man mit Hilfe des Torricellipunkts für die Berührpunkte dreier benachbarter Kreise.

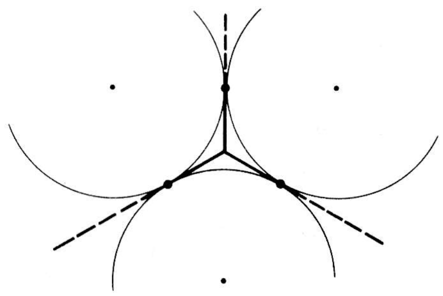

Abb. 29

Das Problem ist aber noch um einiges komplizierter: Die Wabenfläche wird ja von zwei Seiten mit Waben bestückt, und die Gesamtfläche der Wände ist nicht minimal, wenn die Zellen regelmäßige sechseckige Prismen sind mit glatter Grundfläche, sondern erst dann, wenn die Waben von beiden Seiten abwechselnd über die imaginäre Trennfläche hinaus in Form von Rhombendodekaedern in die Wabenschicht der anderen Seite hineinpassen.

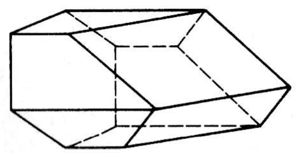

Abb. 30

Die Öffnungen der Waben sind ebene Schnitte durch diese Dodekaeder, nämlich gleichseitige Sechsecke (nach (*Thompson* 1942)).
Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die ganze Überlegung auf einer zwar plausiblen, aber keineswegs einzig möglichen Definition von Wabengröße basiert und daß auch einige der sonstigen Annahmen (z. B. ökonomische Lagerung in der Ebene) nicht zwingend sind. Die Hummeln z. B. bauen kreisförmige Waben.
Das Beispiel der Bienenwaben ist, vom POB her, ein ausgesprochen ungünstiges. Denn da ist niemand, der von bestimmten Zwecken ausgehend Handlungsvorschriften zur exhaustiven Herstellung von Formen entwickelt. Zugrunde liegt ein natürliches Ökonomieprinzip, hier das Kapillaritätsgesetz, das u. a. besagt, daß sich eine Seifenhaut unter gegebenen Bedingungen so formt, daß ihre Fläche minimal wird.
– Wird ein stabiles *Kantenmodell* eines Würfels mit der Kantenlänge 1 in Seifenlauge getaucht und wieder herausgeholt, so hat sich die Seifenhaut nicht entlang der Seitenflächen gespannt, denn dann wäre die Gesamtfläche 6, sondern in den zwölf von den

Raumdiagonalen gebildeten Dreiecken mit einer Gesamtfläche von $12 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 3 \cdot \sqrt{2} < 6$ (Abb. 31a). Führt man das Experiment tatsächlich durch, so ergibt sich die noch etwas kompliziertere Form in Abb. 31b mit 13 Flächen, die noch nicht einmal alle eben sind (nach (*Ogilvy* 1962/1969)).

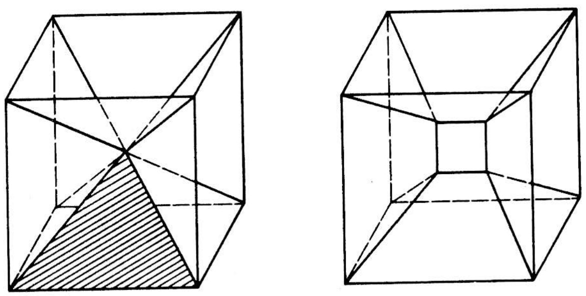

Abb. 31

Den Erspariseffekt des Zwölfflächners (und damit auch des 13-Flächners) gegenüber dem Sechsflächner sieht man mit Hilfe einer kinematischen Vorstellung ein: Zunächst sei die Haut auf der Würfeloberfläche gespannt; dann wird sie auf allen sechs Flächen zugleich im Flächenmittelpunkt in Richtung Würfelmittelpunkt eingedrückt, so daß quadratische Pyramiden ohne Boden nach innen entstehen, deren Oberflächen immer größer werden. Wird mit allen sechs Pyramidenspitzen zugleich der Würfelmittelpunkt erreicht, ist die Oberfläche scheinbar am größten. Es inzidiert dann aber jedes Dreieck einer Pyramide mit einem Dreieck einer anderen, so daß die Gesamtfläche halbiert wird und dann kleiner ist als die Ausgangsfläche. Mit dieser Vorstellung hat man jedoch nicht einen realen physikalischen Vorgang nachvollzogen, denn die Fläche der Seifenhaut hätte sich dabei ja vorübergehend vergrößert. Bei den Bienenwaben kann eine ähnliche Überlegung angestellt werden (vgl. Abb. 29): Werden die drei kreisförmigen Wände zwischen drei benachbarten Berührungspunkten in Richtung Dreiecksmitte gedrückt, so wird ihre Gesamtlänge immer größer, bis sie sich treffen und die Länge halbiert wird. D'A.W. Thompson (1942) beschreibt eine Fülle von Beispielen aus der Natur, vor allem aus der Biologie, bei denen durch Mathematisierung Grundformen, Gesetzmäßigkeiten, Prinzipien erkannt werden können. Er stellt zugleich fest, daß die Realisierung dieser Regeln i.a. recht ungenau ist und daß keinerlei zielgerichtetes Streben dahintersteckt, auf S. 538: „The bee makes no economies; and whatever economies lie in the theoretical construction, the bee's handiwork is not fine or accurate enough to take advantage of them." Diese etwas ernüchternde Bemerkung bezieht sich jedoch primär auf den Rhombendodekaederboden der Waben und nicht auf die Sechseckform.
Gewiß kann man im GU an solchen natürlichen geometrischen Phänomenen nicht vorbeigehen; sie sind motivierend und stellen Verbindungen zu anderen Fächern her. Auch wenn es selbst Erwachsenen schwer fällt, sich solcher Redeweisen zu entledigen wie: „Die Seifenhaut *will* eine möglichst kleine Fläche einnehmen", „das Wasser *will* nach unten", „die Biene *will* möglichst wenig Wachs verbrauchen", auch wenn Schülern eine Erforschung und Beschreibung natürlicher Phänomene mit Hilfe solcher Anthropomorphismen leichter fällt, so besteht doch bei dieser finalen Sicht die Gefahr (in der Biologie mehr, in Physik und Chemie weniger), daß ein verfälschtes Verständnis von der Natur entsteht. Unter Beachtung dieser Gefahr können im GU vielleicht folgende Phänomene bzw. ihre Funktion, ihre Funktionstüchtigkeit oder ihre Ursachen analysiert werden: Kugelförmiger Augapfel in der Augenhöhle, Knochengelenke, geradliniger Baumwuchs, Spiegelsymmetrie der meisten nicht ortsgebundenen Lebewesen, Drehsymmetrie ortsgebundener Lebewesen, das Verhältnis von Oberfläche und Volumen bei einem Baum und bei einem Bär im Winterschlaf, das Verhältnis von Muskelumfang zu Gesamtgröße, eine stille Wasseroberfläche, Kristallformen, Geschoß-, Planetenbahnen usw.
Zu kurz kommt dabei aber immer der Aspekt der Geometrie als Ideenbildung aus Bedürfnissen heraus und als Tat. Die Genauigkeit der natürlichen Formen läßt zu wünschen übrig, und bei der Analyse von Ursachen für eine Realisierung in einer bestimmten Weise kann man häufig nur Vermutungen anstellen, die wiederum von allerhand „Irrationalismen" beeinflußt sein können. Bei von Menschen hergestellten Objekten kann man die Abhängigkeit von Zweck und Form i. a. deutlich herauspräparieren und die Zweckhaftigkeit leichter überprüfen.

b) Um das Beispiel der Bienenwaben nochmals aufzugreifen: Warum sind bei manchen Rasierapparaten die Scherblätter mit kongruenten regelmäßigen Sechsecken parkettiert? – Die Analyse der Bienenwabe läßt sich teilweise wörtlich übertragen. Außerdem gibt es bei einer sechseckigen Einteilung mehr Seiten- und damit mehr Scherrichtungen als etwa bei einer rechteckigen. – Bleistifte werden mit regelmäßig sechseckigem Querschnitt aus Holz geschnitten, damit wenig Abfall entsteht (lückenlose Parkettierung) und die Kanten möglichst flach werden (große Eckenzahl, kein Winkel kleiner als der durchschnittliche Winkel).
Häufig sind geometrische Formen in technischen Herstellproblemen begründet: Obwohl beim Lagern Platz verloren geht, werden Blechdosen im allgemeinen zylinderförmig gemacht, weil die verwendeten Bleche durch Ecken und Kanten unstabil würden; die Kanten an Deckel und Boden werden durch Aneinanderfügen verschiedener Stücke gebildet. Ohne Kanten, Nähte oder Überlappungen kann aber keine geschlossene Fläche aus einem ebenen Netz geformt werden. Deswegen findet man in der Praxis auch selten stabile Hohlkugeln, etwa große *Säurebehälter. Fußbälle* werden aus ebenen Lederstücken zusammengenäht, die relativ so klein und so elastisch sind, daß beim Aufpumpen die Kugelform genügend gut realisiert wird. Auch der Verlauf der Nähte auf den *Tetraedermilchtüten* ist herstellbedingt. Die Güte einer jeden geometrischen Form hängt vom Realisierungsprozeß ab. Allerdings gibt es auch andere Gründe, warum z. B. *Ecken und Kanten nicht zu scharf* gemacht werden: An einem zu scharfen Messer bricht der Rand aus („allzu scharf macht schartig"), an scharfen Möbelkanten besteht Verletzungsgefahr, ein Würfel kann nur mit abgerundeten Kanten rollen.

c) *Warum haben Schraubenmuttern den äußeren Rand i. a. in Form eines regelmäßigen Sechsecks* (genau genommen eines Prismas, aber die Frage ist prinzipiell eine ebene)?
– Der Rand hat den Zweck, eine leicht herzustellende und leicht zu lösende, aber stabile Verbindung mit einem langen, i. a. starren Hebel (Schraubenschlüssel) zu ermöglichen,

mit dem die Mutter kräftig um eine feststehende Achse gedreht werden kann. Naturgemäß braucht der lange Hebelarm für seine Bewegung viel Platz, der ihm aber durch die zu verschraubenden Konstruktionsteile eingeschränkt wird: Häufig steht nur eine kleine Umgebung der Drehebene (genauer: einer Schraubflächenwindung) und dort nur ein bestimmter Winkelraum der Größe a° zur Verfügung.

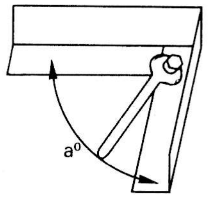

Abb. 32

Wird der Schlüssel angesetzt und die Mutter um ungefähr a° gedreht, dann muß er für die nächste Drehung an einer etwa um a° versetzten Stelle an der Mutter angreifen können, d. h. der Mutternrand muß drehsymmetrisch mindestens von der Ordnung $\frac{360}{a}$ sein.

Die Stabilität der Mutter wächst mit ihrer Dicke, die man, für die Betrachtungen in der Ebene, günstig definiert wie die Wabengröße (maximaler Durchmesser aller einzubeschreibender Kreise). Von daher gesehen wäre ein kreisförmiger Rand mit der Schraubachse durch den Mittelpunkt günstig; denn das Material, das über den größten einbeschreibbaren Kreis hinausragt, trägt zur Stabilität (fast) nichts bei. Allerdings könnte dann der Hebel nicht fest mit der Mutter verbunden werden, denn geometrisch wäre diese in dem durch den Schlüssel gebildeten Lager frei beweglich, und lediglich Haftreibungskräfte würden zum Halten ausgenutzt.

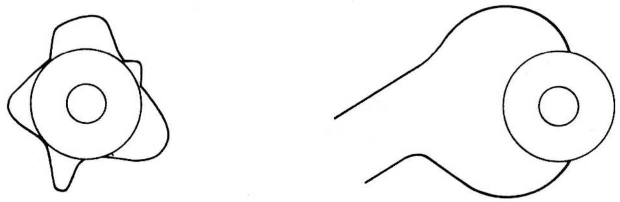
Abb. 33

Der Schlüssel sollte die Mutter so angreifen, daß die Berührkante (-fläche) möglichst lang (groß) ist, senkrecht zur Kraftrichtung steht und ein möglichst großer Winkel umfaßt wird, damit der Schlüssel nicht so leicht abrutscht, denn seine Öffnung ist ja etwas größer als die durchschnittliche Mutter, damit er an allen einer bestimmten Größenordnung angesetzt werden kann. Die Formen des Schlüssels und der Mutter müssen zueinander passen; die eine ergibt das Lager der anderen (s. Abb. 34).
Schließlich muß der Schlüssel auf die Mutter aufgeschoben werden können. In der Ebene gibt es nur zwei Arten freier Bewegung im Lager: kreisförmig und gerade.
Die Formen könnten also wie in Abb. 35a oder wie in Abb. 35b sein. Sind gegenüberliegende Kanten Teile konzentrischer (= paralleler) Kreise, so braucht man für eine

n-fache Drehsymmetrie eine Einteilung des Rands in 2n Stücke, außerdem verlaufen die nach außen gewölbten Stücke zu sehr in Richtung der Drehbewegung. Daher sind die Randstücke paarweise parallele Strecken; die ganze Figur ist ein regelmäßiges Polygon mit gerader, nicht zu großer Eckenzahl, etwa 4, 6 oder 8 (s. Abb. 36).

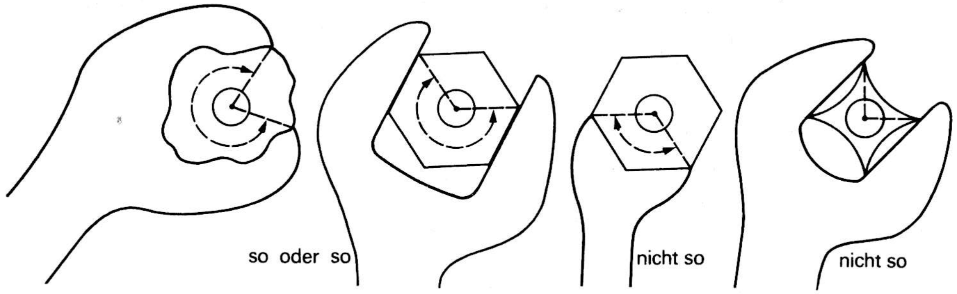

Abb. 34

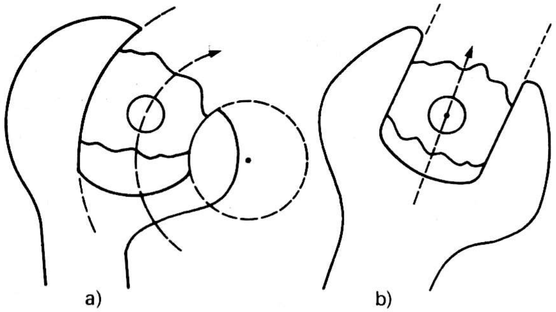

Abb. 35

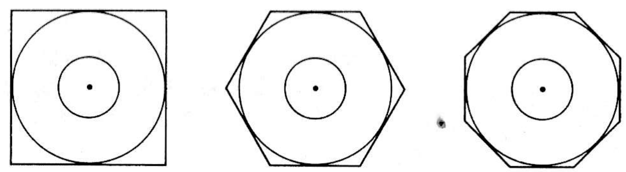
Abb. 36

n	Gesamtlänge Berührkanten	Ecken-winkel	Angriffs-winkel	Dreh-winkel	max. Durchmesser	Fläche
	$4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$	$(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \cdot 360^\circ$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \cdot 360^\circ$	$\frac{360^\circ}{n}$	$\frac{2}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$	$n \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$
4	4	90°	270°	90°	2,83	4
6	2,31	120°	240°	60°	2,31	3,46
8	1,66	135°	225°	45°	2,16	3,31

(Dicke = 2)

Alle drei Formen kommen in der Praxis vor. Das Viereck hat zwar die längsten Berührkanten und den größten Angriffswinkel, d. h. bei dieser Form sind Abmessungen und Starrheit am wenigsten wichtig, dafür ist sie auch die unhandlichste mit dem größten Drehwinkel für eine Symmetriedrehung und dem größten maximalen Durchmesser und am materialaufwendigsten. Sechs- und Achteck unterscheiden sich voneinander weniger als vom Viereck. Offenbar gibt der festere Sitz des Schlüssels wegen der längeren Berührkante und des größeren Angriffswinkels den Ausschlag dafür, daß Sechsecke weit mehr verbreitet sind; möglicherweise ist diese Tatsache auch herstellbedingt.

– Das dreidimensionale Analogon zum Schraubenmutternrand ist der *Würfel*. Zum Mauern ist er zwar weniger geeignet als Quader mit bestimmten anderen Abmessungen. Besondere Bedeutung hat er stattdessen bei der Volumenmessung. Und die Analogie ergibt sich aus seiner Eigenschaft, ein Apparat zur Erzeugung von Zufallsexperimenten zu sein: Daß er den anderen Platonischen Körpern vorgezogen wird, liegt wohl an der von den rechten Winkeln bestimmten klaren, einfachen Form, an der Anzahl seiner Seitenflächen (daß die Zahl 6 etwas besonderes ist, hat wiederum geometrische Gründe) und daran, daß er relativ einfach herzustellen ist.

– Für die Form von Wasserhähnen treffen die Überlegungen, die bei der Schraubenmutter angestellt wurden, gerade nicht zu: Die Hähne sind i. a. leicht zugänglich, können daher größere Ausmaße haben und müssen nicht allzu fest verschlossen werden, so daß man keinen besonderen Hebel braucht, sondern drei Finger der Hand von oben ansetzt.

– *J.P. Moulton* (1974) beschreibt eine bemerkenswerte Abart von „Schraubenmuttern“: In Philadelphia, USA, werden *Hydranten* dadurch vor Mißbrauch geschützt, daß die Muttern an den *Verschlüssen* als Reuleauxsche Dreiecke ausgebildet sind. Eine solche Figur kann man sich aus einem gleichseitigen Dreieck dadurch entstanden denken, daß jede Seite durch einen Kreisbogen durch ihre beiden Ecken ersetzt wird, dessen Mittelpunkt die gegenüberliegende Ecke ist.

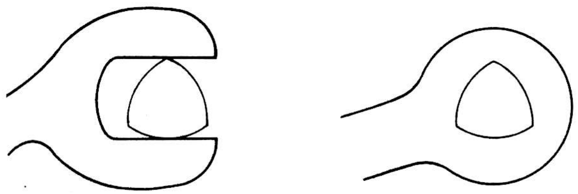

Abb. 37

Es ergibt sich eine Kurve konstanter Dicke, an der ein üblicher Schraubenschlüssel abrutscht, auch wenn er die passende Weite hat. Man braucht Spezialschlüssel. Zwar könnten auch bei einem kreisförmigen Mutternquerschnitt herkömmliche Schlüssel nicht angreifen, wegen der vollkommenen Homogenität der Kreisform jedoch auch keine Spezialschlüssel.

Die Analyse des Schraubenmutternrands kann, verschieden stark quantitativ ausgerichtet, auf verschiedenen Stufen, beginnend mit der Primarstufe, durchgeführt werden. Beziehungen ergeben sich zu regelmäßigen Polygonen mit ihren Diedergruppen und zu Berechnungen am Dreieck mit Hilfe des Pythagoras-Satzes.

d) Solche Berechnungen braucht man auch bei der Untersuchung der Standfestigkeit vier- bzw. fünfbeiniger Bürostühle. Damit die Stühle nicht zu sperrig werden, darf die Standfläche (genauer: der Umkreis durch die Auflagepunkte, der wegen der Drehsymmetrie existiert) nicht zu groß werden. Sei dieser fest vorgegeben. Die Standfläche des Stuhls ist die konvexe Hülle der Auflagepunkte, also bei n Füßen ein regelmäßiges n-Eck.

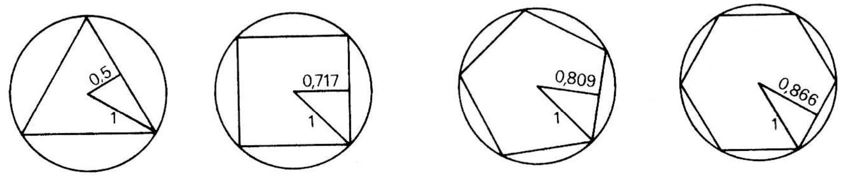

Abb. 38

D. h. wenn der Schwerpunkt sich über dieser Fläche befindet, steht der Stuhl; sonst fällt er um. Drehstühle sind dann unpraktisch, wenn es kurze Strecken vom Mittelpunkt zum Rand der Standfläche gibt, d. h. wenn der Inkreisradius der Auflagefläche klein ist. Denn wenn man auf dem Stuhl sitzt, nicht auf die Position der Auflagepunkte achtet, zu weit vorrutscht oder sich zurücklehnt, kann es passieren, daß der Schwerpunkt aus der Standfläche herausbewegt wird und der Stuhl umkippt. Ist u der Um- und i der Inkreisradius (üblicherweise ist $u \approx 30$ cm), dann gilt für den n-beinigen Bürostuhl

$i = u \cdot \cos \frac{180°}{n}$ mit folgenden Werten:

n	3	4	5	6
$\frac{i}{u}$	0,5	0,717	0,809	0,866.

Die Sitzfläche ist kleiner als der Umkreis; sie ist häufig trapezförmig mit Grundseiten von 35 cm und 45 cm Länge, und einer Höhe von 40 cm, jedoch mit gekrümmten Randlinien und außerdem mit nicht ebener Fläche; sie ist etwa der menschlichen Anatomie angepaßt. Auf ihr sind Schwerpunktsverlagerungen bis etwa im Abstand $0{,}8 \cdot u$ vom Mittelpunkt möglich, so daß der vierbeinige Stuhl sehr wohl noch, der fünfbeinige nicht mehr kippen kann, wenn man nicht gerade Turnübungen auf ihm macht.

e) Standfestigkeit bzw. -möglichkeit oder Verhalten bei Kippbewegungen ist eine wesentliche Einflußgröße für die Form vieler Körper; insbesondere ist bei vielen die *Bodenfläche* eben, genauer: durch den Teil, der tatsächlich auf einer Unterlage aufliegt, kann man eine Ebene legen. Bei *Geschirr* oder bei *Flaschen* ist der Boden meist nach innen gewölbt, der Gegenstand ruht auf einem Wulst am Rand des Bodens. Wäre der Boden ganz eben, so würde die geringste Verformung des Materials oder ein Fremdkörper zwischen Boden und Unterlage die Lage instabil machen: Die Flasche mit ihrem hoch liegenden Schwerpunkt könnte umfallen; ein Teller würde einem auf ihn ausgeübten Druck von Messer und Gabel beim Zerkleinern von Speisen durch Rotation ausweichen. Töpfe dagegen können einen flachen Boden haben, weil bei ihnen der Schwerpunkt nicht sehr hoch liegt und auf ihren Boden i. a. kein Druck von oben ausgeübt wird. Wie so oft, hängt darüber hinaus die Form auch von den Herstellverfahren ab.

– Bei Verpackungen wird diese Art von Standflächen zum „Mogeln“ gebraucht (Mogelpackungen). Ein Behälter hat vielleicht äußerlich folgende Kegelstumpfform: Höhe 80 mm, Bodenradius 30 mm, Deckelradius 25 mm.

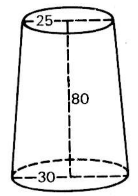

Abb. 39

Zur Volumenberechnung ergänzt man den Stumpf zum Kegel, der nach dem Strahlensatz 480 mm hoch ist, und ermittelt die Differenz der Volumina des gesamten und des aufgesetzten Kegels: $V = \frac{\pi}{3}(480 \cdot 30^2 - 400 \cdot 25^2)\ \text{mm}^3 \approx 190\ \text{cm}^3$.

Man stellt aber fest, daß sich im Behälter tatsächlich nur 125 cm^3 Inhalt befindet. In welcher Höhe h ist der Boden innen eingesetzt (die Wanddicke soll vernachlässigt werden)?

$$125000\ \text{mm}^3 = \frac{\pi}{3}\left((480-h)\cdot\left(\frac{480-h}{16}\right)^2 - 250000\right)\ \text{mm}^3,$$

und es ergibt sich $h = 480 - \sqrt[3]{\left(\frac{375000}{\pi} + 250000\right)\cdot 256}\ \text{mm} \approx 24{,}4\ \text{mm}$.

Obwohl der Höhenunterschied nur 30 % beträgt, ergibt das einen Gewichtsverlust von 34 %, weil der Behälter am Boden breiter ist.

– Bei der *Waschschüssel* wiederum soll die Wasseroberfläche groß sein.

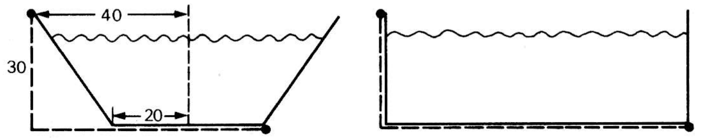

Abb. 40

Im Vergleich zu einer zylinderförmigen Schüssel mit den Maßen wie in Abb. 40 wird bei der kegelstumpfförmigen nur 58 % Wasser gebraucht.

$$\frac{\text{Kegelstumpfvolumen}}{\text{Zylindervolumen}} = \frac{\frac{\pi}{3}(60\cdot 40\cdot 40 - 30\cdot 20\cdot 20)}{\pi\cdot 40\cdot 40\cdot 30} = \frac{84000}{144000} = \frac{7}{12}$$

Die Kegelstumpfschüssel kann leichter gekippt werden. Zwar ist der Hebelarm (Abstand zwischen Angriffs- und Kippunkt in Kipprichtung) etwas kürzer, aber es befindet sich viel mehr Wasser jenseits des Kippunkts, dessen Gewicht nicht gehoben werden muß, sondern beim Heben hilft.

f) Zwar ist der Kegelstumpf selbst eine fundamentale, regelmäßige geometrische Form, man kann ihn jedoch auch als eine zweckhafte Abweichung von der homogenen Grundform „Zylinder“ ansehen. Die Zweckanalyse für solche Abweichungen (Inhomogenitäten) ist nicht weniger instruktiv als die für die Grundformen selbst. Beispiele:

Objekt	Grundform	Abweichung	Zweck bzw. Funktion
Treppe	(schiefe) Ebene	Stufen	Höhenunterschiedsüberwindung mit waagrechten Trittflächen
Zahnrad	Kreis (Zylinder	Zähne	Greifmöglichkeit durch Abwechslung von Zähnen und Lücken
Kegelkugel	Kugel	Löcher	zum Greifen für Finger
Rasierspiegel	Ebene	Krümmung	Vergrößerung
Zahnrad bei Berggang bei modernstem Rennrad	Kreis	Ellipse	Ausnutzung der Schwankung der Trittkraft bei Pedalbewegung
Rugbyball	Kugel	spitzoval	Erschwerung der Ballbehandlung, da dieser getreten, geworfen, getragen werden darf
Pistolenlauf	Zylinder	eingezogene Schraubenlinie	Stabilisierung der Flugbahn des Geschosses durch Drall
Koffer	Quader	Griff	zum Greifen
Kanten aller Art	Gerade	Zylinder	keine scharfen Kanten wegen Stabilität, Rollmöglichkeit, Verletzungsgefahrenverringerung
Fleischwolf	Schraubenfläche	Zum Ausgang hin: kleinere Ganghöhe, größerer Radius	Brocken werden beim Durchlaufen zusammengedrückt
Zirkel	starrer Körper	Scharnier mit 2 starren Teilen	Abgreifen verschiedener Längen

Viele Abweichungen von Grundformen sind allerdings hauptsächlich herstellbedingt: Ein Polyeder mit 32 Flächen und der Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe als Fußballkugel, ein Graphithaufen als Gerade in einer Zeichnung, ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche als „Dreieck“ bei den „Logischen Blöcken“.

3.3 *GS her- und darstellen können*

Die Grundtätigkeit der Her- und Darstellung von GSn nimmt einen weiten Raum im herkömmlichen GU ein; der Schwerpunkt liegt jedoch auf der zeichnerischen, numerischen, algebraischen, analytischen und axiomatisch-deduktiven Darstellung geometrischer Begriffe und des zugehörigen Begriffssystems. Solche Darstellungen werden aber meist nicht als Modelle zweckvoller Realisate von Ideen gesehen, schon gar nicht als solche zweckvollen Realisate selbst, sondern weitgehend unabhängig von der räumlichen Wirklichkeit als Hilfsmittel zur Führung abstrakter Gedanken. Insbesondere werden die geometrischen Grundbegriffe an Tischplatten, Papierblättern, Geodreiecken, Linealen, Zirkeln, Quadratgittern, Maßstäben, Winkelmessern undefiniert verwendet (vgl. etwa (*Holland* 1975, S. 65)).

OB erfordert die Herstellung von GSn, besonders dieser Grundformen, mindestens aber ihre modellhafte Darstellung; allerdings nicht nur als Ersatz für die Herstellung, sondern auch als Unterstützung der Vorstellung durch Anschauung zur Lösung sonst schwieriger Probleme oder zum Entwickeln von Herstellvorschriften. Zwar müßten diese sich durch die Praxis bewähren; im GU kommt es aber mehr auf den geometrischen und weniger auf den technischen Gehalt dieser Vorschriften an. Werden mögliche Schwierigkeiten bei der Realisierung erkannt, so sind sie hauptsächlich dann interessant, wenn sie geometrischer Natur sind.
Die folgende Aufzählung von Her- und Darstellungsmöglichkeiten ist nicht homogen. Ein Einteilungskriterium ist der „Grad der Räumlichkeit", die Nähe zur räumlichen Wirklichkeit, d. h.: drei-, zweideimensional und symbolisch. Die symbolische Darstellungsweise wiederum wird inhomogen weiter unterteilt; dort ist „Darstellung von GSn" auch recht weit zu verstehen: Es gehört dazu Definieren, Behaupten und Beweisen. Die Liste ist bestimmt nicht vollständig. U. a. fehlt die Darstellung durch Geruchs- oder Farbqualität oder -intensität (oder durch andere physikalische Größen). Z. B. könnte man in einem zweidimensionalen Optimierungsproblem den zulässigen Bereich zeichnerisch und das Wachsen der Zielfunktion durch Zunahme von Farbintensität darstellen; dann würde man die Lösung in der Ecke finden, in der die Farbe am dunkelsten ist.
Die Forderung der Fähigkeit zum Übertragen einer Darstellungsweise in eine andere wurde nicht gesondert aufgestellt; sie ergibt sich aus der Liste von selbst.

3.3.1 *Dreidimensional* (Passen; eingeschränkte Beweglichkeit, Optimierung, Messen)
a) Kanten-, Flächen-, Vollmodelle von *Körpern* aller Art bauen, die in allen Darstellungsweisen gegeben sein können: Kantenmodell eines realen Würfels (mit Strohhalmen und Pfeifenreinigern; damit das Modell stabil wird, werden an einer Ecke immer je zwei benachbarte Kanten miteinander verbunden, so daß jeder Strohhalm an jedem Ende mit zwei anderen verbunden ist); Flächenmodell eines konvexen, von regelmäßigen Fünfecken begrenzten Körpers (Dodekaeder; bei festen Randflächen ist jeder konvexe Polyeder stabil); allerlei Figuren aus Papier falten; mit 6 gleich langen Streichhölzern vier Dreiecke bilden, deren Seiten alle Streichholzlänge haben (Tetraeder; im Raum können vier konvexe Flächen paarweise aneinander stoßen, in der Ebene nicht); eine Kugel aus Knet rollen (die Rollbewegung muß nach allen Richtungen ausgeführt werden, weil es sonst einen Zylinder gibt); eine Kugel- und eine Zylinderfläche aus Papier rollen (bei der Kugel geht es nicht ohne Falten und Überlappungen); einen Vollkörper herstellen, der in drei orthogonalen Richtungen Quadrat, Dreieck und Kreis als Profile hat; eine plastische Landschaft nach einer Landkarte mit Höhenlinien formen; den Soma-Würfel aus den nicht quaderförmigen Würfeldrillingen und -vierlingen zusammenbauen.

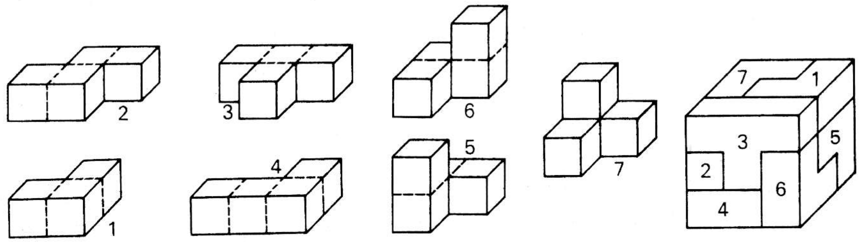

Abb. 41

– Schnitte durch Körper: Wie muß man einen Würfel schneiden, damit ein regelmäßiges Sechseck entsteht? – Kann auch ein (regelmäßiges) Fünfeck ein Würfelschnitt sein? – Ja (nein). – Räumliche Durchdringungen (z. B. für Dichtungen).

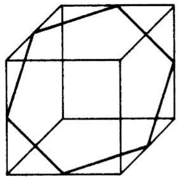

Abb. 42

– Bauen mit Baukästen, Nageln, Schrauben, Bohren, Stecken. Funktionsmodelle: Scheibenwischer, Storchenschnabel (für formtreue Zeichnungen), Getriebe.
– Topologische Verhältnisse herstellen: Flechtwerk, Ketten, Knoten, Stricken (aus dem eindimensionalen Faden wird durch dreidimensionale Operationen eine zweidimensionale Fläche). Die rechte Grundmasche wird folgendermaßen gestrickt.

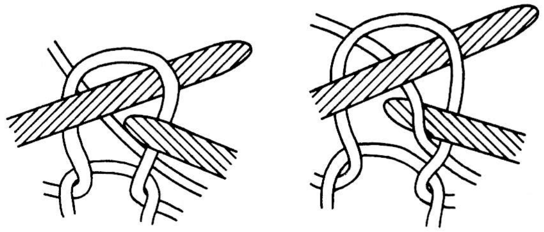

Abb. 43

Die letzte verfertigte Masche liegt auf der linken Nadel, die rechte wird von vorn in die Masche eingeführt, holt den dahinter liegenden Arbeitsfaden nach vorn, bildet mit diesem eine neue Masche, und die linke Nadel wird aus der alten herausgezogen.

b) Räumliche Bezüge zwischen Körpern, etwa *platzsparende Lagerung*: Apfelsinen (kongruente Kugeln) so, daß die Tüte (konvexe Hülle) möglichst klein wird; Konservendosen (Kreise) auf einer Ebene; die Bauteile des Soma-Würfels, nämlich in Würfelform (wieviel Platz dabei gespart werden kann, zeigt Abb. 41); halbierte Rhombendodekaeder wie bei den Bienenwaben, wo man schon bei der Herstellung an die spätere Lagerungsweise denken muß.
Solche Probleme sind mathematisch recht anspruchsvoll; sie können oft noch nicht einmal mit den üblichen Methoden der linearen oder auch nichtlinearen Optimierung angegangen werden. (Eine Strategie, mit der man bei manchem Ausgangslagen manchmal Verbesserungen erzielen kann, ist die Ausnutzung der Schwerkraft, indem man die zu lagernden Gegenstände durcheinander schüttelt und hofft, daß dabei Hohlräume ausgefüllt werden. Z. B. packt der Buttenträger bei der Traubenlsese immer noch einen Eimer Trauben mehr in seine Butte, nachdem er die Trauben zusammengerüttelt hat.)

Im GU, und das schon in der Primarstufe, haben solche Beispiele eine wichtige Funktion, auch wenn sie sich der Mathematisierung weitgehend entziehen: An einem u. U. nur qualitativen Vergleich verschiedener Lagerungsformen können nicht nur geometrische Erkenntnisse gewonnen, sondern auch Argumentationsfähigkeit und Kreativität gefördert werden. Denn man sieht die Notwendigkeit, sich davon zu überzeugen, ob eine gute Lösung die beste ist. Sie können auch Beispiele dafür sein, *wie* man zu guten Lösungen bessere finden kann.
Passen bedeutet Funktionieren von GSn also nicht nur als eingeschränkte Beweglichkeit, sondern auch als Optimierung (z. B. von Lageverhältnissen).

c) Darüber hinaus ist das Passen wesentlich für den Vergleich von GSn als *Messen* im weiteren Sinn. Dabei kommt es im Moment nicht auf den Aspekt des Findens einer Maßzahl an, sondern auf den Vergleich von Formen: Passen Formen zueinander; passen Formen zu einer dritten? Ob man einen Schrank noch zwischen zwei andere Möbelstücke in einem Zimmer aufstellen kann, stellt man durch Messen fest, d. h. man prüft, ob er paßt: Eine aufwendige Methode ist, ihn an den gewünschten Platz hinzustellen versuchen, eine günstigere, sich vom Schrank oder vom freien Platz ein Modell zu machen, etwa in Form eines gespannten Seils und zweier Markierungen darauf, und dann zu messen, d. h. zum Passen zu bringen versuchen. Selbst wenn dem Schrank und dem Platz je eine Maßzahl zugeordnet wird, so ist keine der beiden Zahlen für sich interessant, sondern nur im Vergleich zur anderen. Dieses Konzept vom Messen beinhaltet auch den Paßvergleich von mehr als zwei Formen; es ist damit auch fundamental für Fragen danach, wie oft eine Form in eine andere paßt, und darüber hinaus für Messen als Zuordnung von Maßzahlen. Außer dem Anlegen eines Maßstabs gibt es einige weitere Meßverfahren, z. B.
– Die Kongruenz zweier Gegenstände durch die Anschauung überprüfen (bei zwei Hälften einer spiegelsymmetrischen Figur mit halb durchsichtigen Spiegeln; wie unvollkommen die Spiegel- oder Drehsymmetrie einer natürlich gewachsenen Form, z. B. eines menschlichen Gesichts ist, kann man viel besser dadurch feststellen, daß man auf einer Fotografie die rechte Gesichtshälfte durch das Spiegelbild der linken überklebt und so eine deutliche Entstellung erzielt, als durch Längenvergleich bestimmter Teile der beiden Hälften).
– Zwei Gegenstände aneinander abrollen (dabei muß darauf geachtet werden, daß die Bewegung ein Rollen und kein Gleiten ist).
– Einen Faden entlang einer zu messenden krummen Linie legen und markieren (dabei wird vorausgesetzt, daß der Faden starr in dem Sinn ist, daß er bei Verformungen nicht seine Länge ändert, was immer man axiomatisch unter der Länge eines Fadens versteht).
– Verschiedene Durchmesser an einem Gegenstand mit einer Schublehre messen (will man von da auf andere Größen schließen, z. B. Volumen oder Oberfläche, so setzt man voraus, daß diese durch die gemessenen Größen eindeutig bestimmt sind, daß der Gegenstand eine eindeutig bestimmte, geometrischen Berechnungen zugängliche, Form hat; bei vom Menschen hergestellten Objekten ist diese Annahme gerechtfertigt, denn die Form ist ein Realisat von gewisser Güte einer Idee, die ihrerseits geometrischen Berechnungen zugänglich ist; bei Objekten aus der Natur muß die Form zunächst einmal komplett (angenähert) vermessen werden).

– So lange es um Paß- oder Kongruenzprüfungen geht, genügt es meist, gewisse ausgezeichnete Größen, z.B. maximaler Durchmesser o.ä., zu ermitteln. Wenn das nicht reicht, muß die Modellbildung weiter getrieben werden bis hin zum Anfertigen von Gipsabdrücken. Diese Art des Messens ist allerdings sehr aufwendig, technisch schwierig und versagt, wenn nicht der eine Körper kongruent zu einem Teil des anderen ist, z. B. schon beim Vergleich eines $10 \times 25 \times 80\text{-cm}^3$-Quaders mit einem $8 \times 20 \times 125\text{-cm}^3$-Quader.

3.3.2 *Zweidimensional* (eben)

„Die Zeichnung ist Mittel der Raumbewältigung und erscheint nicht als Selbstzweck ... Die geometrische Zeichnung hat nicht nur demonstrative Bedeutung. Sie ist auch ein produktives Instrument, lassen sich doch unbekannte Größen mit ihrer Hilfe konstruktiv ermitteln." führt *F. Stückrath* (1955, S. 107) aus. Darüber hinaus haben Zeichnungen, und mit ihnen alle Arten ebener ikonischer Darstellungen von GSn (z. B. auf dem Grundriß einer Wohnung Papierstücke als Möbelgrundrisse hin- und herschieben; die Wohnorte von Kunden einer Firma mit buten Stecknadeln auf einer Landkarte markieren; Geraden durch Faltung erzeugen), einen wichtigen dritten Aspekt, nämlich *Kommunikationsmittel* zu sein. Es ergeben sich die Lernziele, *Zeichnungen von anderen lesen* zu können (zu subsumieren unter „durchschauen von GSn") und *Zeichnungen für andere anfertigen* zu können, angefangen von einfachen Skizzen (Beschreibung eines Wegs, Einteilung eines Gartens in Beete, Schaltpläne, Darstellung von Versuchsergebnissen in Tabellen und Funktionsschaubildern) bis zu genormten technischen Zeichnungen und Darstellender Geometrie, die in einem umwelterschließenden GU eine bedeutende Rolle zu spielen hat.
– Wer zeichnen will, muß mit dem Gerät umgehen und seine Güte prüfen können: Das Lineal z. B. legt man nacheinander von beiden Seiten an zwei gegebene Punkte und stellt fest, ob die beiden gezogenen Linien übereinstimmen (das müßten sie bei einem genauen Lineal wegen der äußeren Homogenität der Geraden).
– Schließlich gehört zum Zeichnen auch die Kenntnis günstiger Verfahren: Soll z. B. für eine gegebene Strecke der Länge a mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte konstruiert werden, so ist eine Zirkelöffnung von $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ günstig, denn dann schneiden sich die beiden Kreise um die Streckenendpunkte senkrecht, und die Schnittpunkte sind so am genauesten festgelegt.

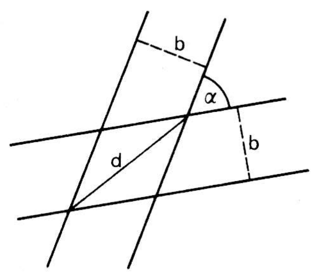

Abb. 44

Betrachtet man nämlich die beiden Kreise in der Nähe eines Schnittpunkts unter dem Mikroskop angenähert als zwei sich unter dem Winkel α $(0° < \alpha \leqslant 90°)$ schneidende

Parallelstreifen der Breite b, und faßt man die Länge d der längeren Diagonale in der Schnittraute als Maß für die Ungenauigkeit auf, dann ist diese wegen $d = \frac{b}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ am kleinsten, wenn $\sin\frac{\alpha}{2}$ am größten ist.

Das ist für $\alpha = 90°$ der Fall, und die Ungenauigkeit wird monoton beliebig groß, wenn α gegen $0°$ geht. Die Rechnung verläuft nicht anders, wenn man unter b nicht die Strichbreite, sondern die Breite des Streifens versteht, innerhalb dessen der Strich sich befinden kann, wenn man Zeichenfelder mit berücksichtigt.
Es kommt also darauf an, den kleineren der beiden Nebenwinkel beim Schnitt möglichst groß zu machen, nämlich $90°$. Die entsprechende Zirkelöffnung trifft man nicht genau. Das ist aber nicht schlimm, denn die Funktion $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ verhält sich so, daß erst für α in der Nähe von $0°$ der Mangel sich deutlich auswirkt.

3.3.3 *Sprachlich*

Die Funktionen der Sprache, etwa bei Zweckanalysen, Formulierung von Herstellvorschriften, Beschreibungen von Konstruktionen bzw. von GSn, sind dieselben wie die des Zeichnens: „Raumbewältigung", Konstruktion, Kommunikation.

3.3.4 *Numerisch, analytisch, algebraisch*

Häufig sind von GSn lediglich gewisse Zahlen interessant:
– Plattenleger werden nach Fläche bezahlt.
– Ist die Strecke bis zur nächsten billigen Tankstelle kurz genug, daß das Benzin im Reservekanister reicht, oder muß unterwegs teurer getankt werden?
– Wie kann man feststellen, ob eine Goldmünze echt ist, ohne sie zu beschädigen? – Spezifisches Gewicht überprüfen.

Bisweilen ist die Angabe solcher Zahlen aus technischen Gründen notwendig:
– einem Möbelkatalog werden nicht markierte Maßstäbe beigelegt, an denen die Maße abzulesen sind;
– bei der Konstruktion von Bauwerken genügt es nicht, vorgefertigte Bauteile irgendwie zum Passen zu bringen;
– und der Maßschneider benötigt die Körpermaße seines Kunden, da dieser ihm nicht dauernd zur Verfügung steht, und wenn er diese Maße nur auf eine Puppe überträgt.
Immer dann, wenn Formen, die zueinander passen sollen, noch nicht vorhanden sind, braucht man Modelle, an denen das Passen überprüft oder eingerichtet wird. Besonders handliche Modelle sind Zahlen, die durch Messungen und Berechnungen gewonnen werden. So bedeutsam aber etwa das Bestimmen einer Maßzahl mit einem Maßstab ist, so wichtig ist zugleich seine Relativierung:
– Wie genau braucht nur gemessen zu werden?
– Wie genau kann nur gemessen werden?
– Von wem und wie wurde die Längeneinheit 1 m festgelegt?
– Wie gut ist diese bei der Skaleneinteilung auf dem jeweils vorhandenen Maßstab realisiert?
– Welches ist überhaupt ein jeweils geeignetes Meßverfahren?

Alle diese Fragen entstehen, wenn die Idee des Messens realisiert wird. Das POB fordert ihre Thematisierung im Unterricht:
– Die erforderliche Genauigkeit hängt vom Zweck der Messung ab;
– die mögliche Meßgenauigkeit hängt von der Realisierungsgüte der Meßinstrumente (Starrheit, Skaleneinteilung) und des Meßobjekts, von der Temperatur und von sonstigen physikalischen Bedingungen ab;
– die Maßeinheit wurde willkürlich festgelegt; der Fehler, der dabei durch Annahme eines falschen Erdumfangs gemacht wurde, ist aber prinzipiell bedeutungslos; zu jeder Längeneinheit gibt es inkommensurable Längen, die nicht exakt gemessen werden können (Diagonale im Einheitsquadrat).

Der Prozeß der Wechselwegnahme (Antanairesis; Euklidischer Algorithmus) bei Strecken führt entweder auf ein gemeinsames Maß oder zeigt, daß diese inkommensurabel sind. Diesem Beispiel des Euklidischen Algorithmus entnimmt man die Überlegenheit des Arbeitens mit Zahlen gegenüber dem Arbeiten mit Formen, wenn es um Fragen der Genauigkeit bei Approximationen geht. Den Zahlen haften nicht die Unzulänglichkeiten realisierter räumlicher Formen an; mit ihnen kann man prinzipiell beliebig genau rechnen, jedenfalls erzielt man mit ihnen in jedem Stadium technischer Möglichkeiten genauere Ergebnisse als beim handelnden oder zeichnerischen Umgang mit räumlichen Formen.
– Die Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundseite 1 und Basiswinkeln von $89°$ läßt sich zwar durch Zeichnen und Messen ermitteln, mit einem Taschenrechner ergibt sie sich aber leicht und viel genauer als $\frac{1}{4}\tan 89° \approx 14{,}32249$.
– Gewiß, es gibt die schöne Methode zu beweisen, daß Kreisfläche $= \frac{1}{2}$ mal Radius mal Umfang ist, indem man für $n = 1, 2, 3, \ldots$ den Kreis in 2n kongruente Sektoren teilt und diese wie in Abb. 45 aneinander legt. Für $n \to \infty$ nähert sich diese Figur einem Rechteck mit dem Radius und dem halben Umfang als Seiten.

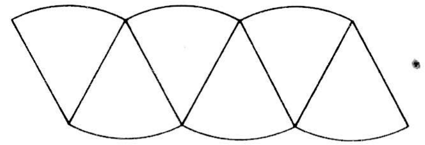

Abb. 45

– Daß man aber bei solchen qualitativen Unendlichkeitsprozessen Sorgfalt walten lassen muß, zeigt folgendes Beispiel:

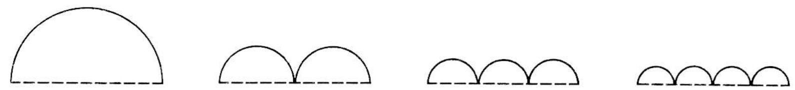

Abb. 46

Gegeben ist eine Folge von Girlanden (Abb. 46), die n-te Girlande besteht aus n aneinanderhängenden Halbkreisbögen mit Durchmesser $\frac{1}{n}$, für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Obwohl die Girlanden sich der Grundstrecke der Länge 1 beliebig „nähern", geht ihre Gesamtlänge keineswegs gegen 1, sondern ist konstant $n \cdot d_n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (nach (Lietzmann

1959, S. 61f)). Nähern heißt hier, daß die maximale Dicke der Girlande, nämlich $\frac{d_n}{2}$, und der Flächeninhalt $\frac{n \cdot d_n^2 \cdot \pi}{8}$ gegen 0 gehen; eine Kurve der Länge $\frac{\pi}{2}$ kann aber in einem beliebig schmalen Rechteck der Länge 1 untergebracht werden.
Die Darstellung von GSn im reellen Koordinatensystem schließlich macht den ganzen Apparat von Analysis, Lineare Algebra, Differentialtopologie anwendbar auf die Geometrie. In manchen Mathematikkursen findet man die Geometrie sogar nur noch als Teil solcher Disziplinen.
Ein Beispiel, wie die Algebraisierung von GSn praktisch nutzbar gemacht werden kann, wird weiter unten mit der Untersuchung der Geometrie des Fußballs gegeben.

3.3.5 *Axiomatisch-deduktiv*

Die Analyse des Tischwackelns hat bereits die Frage nach geometrischen Axiomen berührt, die in (Schreiber 1978b) kurz und in (OAG) ausführlich diskutiert wird: Das Axiomensystem soll widerspruchsfrei sein, die Euklidische Geometrie nach sich ziehen und operativ interpretierbar in folgendem Sinn sein: Ein Axiom ist entweder evident oder Wiedergabe einer geometrischen Idee in Form von Handlungsvorschriften zur exhaustiven Realisierung dieser Idee.
Z. B. ist das übliche Parallelenaxiom („zu einer Ebene und einem Punkt außerhalb gibt es genau eine Ebene durch diesen Punkt, die mit der ersten Ebene keinen Punkt gemeinsam hat") nicht operativ interpretierbar. Es ist weder evident, noch kann es als Handlungsvorschrift aufgefaßt werden.
Wenn man den Abstand mit dem starren Körper konstant halten kann, dann stellt die Fassung des Parallelenaxioms über die Konstanz des Abstands oder Richtungsgleichheit eine formalisierte Anweisung zur Herstellung von Parallelität (nicht nur für Ebenen, auch für Geraden) an Häusern, Möbeln, Eisenbahnschienen usw. dar.
Der so entwickelte Begriff läßt sich leicht auf krumme Flächen bzw. Linien ausdehnen, z. B. bei der Festlegung der Grenze der 200-Meilen-Zone vor der Küste eines Meeresanliegerlands. Allerdings kann dann das Parallelenaxiom nicht mehr sofort mit den Inzidenzaxiomen formuliert werden, sondern bedarf des Abstandsbegriffs. Dieser Einwand ist jedoch bei der in dieser Arbeit entwickelten Auffassung von GU sicher nicht erheblich. Gewichtiger ist schon der Verlust der Transitivität bei dieser Erweiterung des Parallelitätsbegriffs.

3.4 *Geometrische und außergeometrische Probleme (geometrisch) lösen können.*

Eine wesentliche Leistung bei der Lösung außergeometrischer Probleme besteht im Transfer des Problems in die Geometrie und ist somit eng mit der Grundtätigkeit „GS darstellen" verbunden. Sie geht aber über diese dadurch hinaus, daß die darzustellende geometrische Idee erst noch zu schaffen ist. Oft handelt es sich um Ikonisationen. Beispiele:
– Nachweisen, daß eine Zahl n Primzahl ist, indem man zeigt, daß ein Rechteck aus n Einheitsquadraten die Breite 1 hat;
– Sortieren nach Merkmalen in einem Karnaughdiagramm;
– Rechenbäume;
– Ablaufdiagramme als Planungsunterlagen (z. B. bei Computerprogrammen oder, anspruchsvoller, als Netzpläne);

– Zahlenstrahl, Nomogramme;
– Skizzen, mit deren Hilfe Strukturen durchsichtig werden (Lernzielkatalog in dieser Arbeit, Hierarchie eines Betriebs, kommutative Diagramme in der Mathematik);
– Graphiken (Alterspyramide, Häufigkeitspolygon);
– Wie kann man krankes Gewebe in einem Körper von außen intensiv bestrahlen, ohne das gesunde Gewebe auf dem Weg der Strahlen zu sehr zu belasten? – Man läßt kleinere Strahlendosen aus verschiedenen Richtungen sich im kranken Gewebe schneiden (nach *K. Duncker*). Ähnlich wird auch das Problem gelöst, mit einer Lupe bei Sonnenschein ein Feuer zu entfachen;
– Atommodell, Methanmolekül als Tetraeder mit C im Mittelpunkt und den vier H-Atomen als Ecken, Benzolmolekül als Ring, usw.;
– Wahrscheinlichkeitsabakus von *A. Engel*;
– zeichnerische Lösung von Gleichungen, zeichnerische lineare Optimierung; Deutung linearer Probleme als Schwerpunktsprobleme (vgl. Winter 1978);
– Begriffsbildung in der Analysis (Häufungspunkt usw.);
– Beweise, rechnerische Verfahren, die sich auf geometrische Vorstellungen stützen, etwa das schöne Beispiel von *B.L. van der Waerden* (1954/1973, S. 23ff), wo er darstellt, wie er einen zahlentheoretischen Satz unter wesentlicher Zuhilfenahme einfachster geometrischer Veranschaulichung beweist; usw.

Eine Fülle geometrischer Problemstellungen findet man u. a. in (Engel 1971), (*Kordemski* 1959/1965), (Perelman 1954), (*Stowasser* 1974). Die Autoren auf dieser unvollständigen und heterogenen Liste gehen zwar meist nicht auf den Zweck und die Herstellung geometrischer Formen ein, ihre Beispiele sind keine Muster für OB. Nicht selten ist auch zu spüren, daß erst im nachhinein um eine innermathematische Fragestellung eine reale Situation gebastelt wurde. Oder die Probleme sind singulär und haben wenig Bezug zu unserer Lebenswelt, so daß sie künstlich wirken (z. B.: Ein Mann erhält das Land als Eigentum, das er an einem Tag zu Fuß umwandern kann). Viele Fragen der Struktur des Raums könnten aber nicht problemorientiert thematisiert werden, wollte man auf solche künstlichen Probleme verzichten, weil die „echten" oft nicht einfach genug formuliert werden können, oder nur aufwendig in Verbindung mit anderen, teils schwierigeren, teils weit entfernten oder irrelevanten Problemen gestellt und gelöst werden können oder der Lebenswelt der Schüler zu fremd sind. Das Bemühen, einen Bezug zwischen der räumlichen Wirklichkeit und dem mathematischen System herzustellen, macht die künstlichen Probleme in gewissen Grenzen wertvoll als Training für die Lösung „echter". So ist etwa die Beschäftigung mit Fliesenlegerproblemen auch Training und Vorarbeit für die Entwicklung einer günstigen geometrischen Form des Fußballs:

Geometrie des Fußballs

Man stelle sich einmal ein Spiel nach Fußballregeln mit einem Rugbyball vor (für Rugby ist die Form des Rugbyballs sinnvoll, da er getragen, aus der Hand abgeschossen werden darf und selten den Boden trifft). Zum Wesen des Fußballs gehört die Kugelform des Balls (*S. Herberger*: „Der Ball ist rund."). Aus praktischen Gründen ist er eine luftgefüllte Hohlkugel aus elastischem, empfindlichem Material (Blase), die durch einen Überzug aus Leder geschützt ist. Im folgenden geht es um die (geometrische) Herstellung dieses Überzugs.

Leicht fällt es, eine Vollkugel aus Knet zu rollen, und auch das Schleifen einer massiven Holz- oder Metallkugel ist prinzipiell problemlos. Schwierigkeiten entstehen jedoch, wenn man aus flachem, ebenem Material (z. B. Papier) eine Kugeloberfläche formen will: Es bilden sich Falten und Überlappungen. Man behilft sich, indem man die Oberfläche als Polyeder bildet und damit die Kugel nur angenähert realisiert.

Das gilt auch für die Oberfläche des Fußballs: Sie wird aus flachen Lederstücken zusammengenäht, denen beim Aufpumpen des Balls dank ihrer Elastizität noch etwas Krümmung verpaßt wird. Schmale Polygone, lange Nähte und Stellen, an denen viele Nähte zusammenlaufen, sind besonders empfindlich und daher zu vermeiden. Am besten würden kreisförmige Lederstücke verwendet, möglichst alle von gleicher Größe, und in einem Punkt sollten nicht mehr als drei Nähte zusammenlaufen. Da diese Forderung so nicht realisierbar ist, schränkt man sie darauf ein, regelmäßige n-Ecke zu verwenden mit möglichst großem und möglichst konstantem n. Dahinter verbergen sich folgende Tatsachen: Die Schnittlinie zweier nicht paralleler Ebenen ist eine Gerade, also müssen die Ränder der Lederstücke stückweise geradlinig sein. Für jedes n hat das regelmäßige unter allen n-Ecken die flachsten Ecken, denn die Winkelsumme im n-Eck ist $(n-2) \cdot 180^\circ$, der kleinste Winkel beim regelmäßigen n-Eck ist $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, bei jedem anderen n-Eck ist er kleiner. Entsprechend hat das regelmäßige n-Eck bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang. Mit wachsendem n werden die Ecken flacher und der Umfang kleiner. Da eine Ecke im Raum nicht durch zwei Ebenen, sondern durch mindestens drei bestimmt ist und der Ball beschränkten Durchmesser hat, muß es Stellen geben, wo drei Flächen und damit drei Nähte zusammenstoßen.

Bei gegebenem Durchmesser des Balls sollen die Lederstücke möglichst klein sein, damit der Neigungswinkel zweier Stücke möglichst groß und die Form dadurch möglichst kugelähnlich wird, andererseits nicht zu klein, damit die Gesamtlänge der Nähte nicht zu groß wird. Da alle Stellen der Oberfläche gleich wahrscheinlich physikalischen Belastungen ausgesetzt sind, sollen sie möglichst ununterscheidbar sein. Bei der Polyederstruktur mit Ecken, Kanten und Flächen bedeutet das: gleiche Form aller Eckenumgebungen (eine Eckenumgebung ist die Vereinigung aller Polygone, die an die Ecke stoßen), gleiche Länge aller Kanten und (fast) gleiche Eckenzahl aller Polygone; oder kurz: die Symmetriegruppe soll möglichst groß sein; wegen der Polyederstruktur ist sie endlich; in Frage kommt die Ikosaedergruppe.

Nach diesen theoretischen, mehr qualitativen Vorüberlegungen nun zur praktischen Durchführung: Beim ebenen Parkettieren erfahren die Schüler, daß nur für $n = 3, 4, 6$ Parkette mit regelmäßigen n-Ecken gebildet werden können: In einer Ecke müssen mindestens drei n-Ecke zusammenstoßen; bei drei Fünfecken klafft eine Lücke, und vier oder mehr Fünfecke oder drei oder mehr n-Ecke mit $n \geqslant 7$ überlappen sich, s. Abb. 47. Nur für $n = 3, 4$ oder 6 ist der Vollwinkel 360° ein ganzzahliges Vielfaches des n-Eck-Winkels $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Die Lücke beim Fünfeck beträgt $360^\circ - 3 \cdot (180^\circ - \frac{360^\circ}{5}) = 36^\circ$.

Schneidet man die Fünfeckskonfiguration von Abb. 47 aus, hält das mittlere Fünfeck fest und klappt die beiden anderen an ihren Berührkanten zum mittleren gleichmäßig hoch, so stoßen plötzlich auch diese beiden an einer Kante zusammen. Die Parkettierung

ist gelungen, allerdings nicht in der Ebene, sondern im Raum; der allen drei Fünfecken gemeinsame Punkt liegt nicht mehr am Rand, sondern in der Mitte der Fläche. – Ist diese Konstruktion auch mit anderen n-Ecken möglich (s. Abb. 48)?

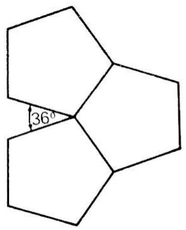

Abb. 47

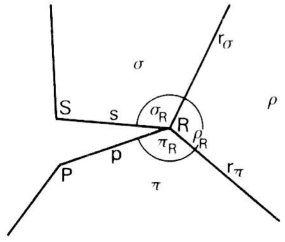

Abb. 48

Wir betrachten drei konvexe, nicht notwendig regelmäßige, Polygone π, ρ, σ, die eine Ecke R gemeinsam haben; außerdem haben π und ρ, sowie ρ und σ je eine Kante r_π und r_σ an diese Ecke gemeinsam. Die jeweils andere Kante sei p und s und führe zu der Ecke P bzw. S; es sei s so lang wie p. Bei Klappung des Polygons π um die Kante r_π beschreibt P einen Kreis um die Achse r_π, entsprechend beschreibt dann S einen Kreis um die Achse r_σ, wenn σ um r_σ geklappt wird. Beide Kreise befinden sich auf der Kugeloberfläche um R mit Radius $|p|$. Genau dann gibt es eine Stellung von π und σ, in der p und s zusammenfallen, wenn die beiden Kreise sich schneiden. Dieser Schnittpunkt ist, bis auf Spiegelung an der Zeichenebene, eindeutig bestimmt, da er auf der eindeutig bestimmten Schnittgeraden der beiden Ebenen durch die beiden Kreise und auf der Kugel um R liegt. Genau dann gibt es einen Schnittpunkt, wenn diese Schnittgerade die Kugel trifft. Außer dem Sonderfall $P = S$ (mit $p = s$) gilt: Überlappen sich π und σ in der Anfangslage und in der Endlage (wenn beide auf ρ liegen) oder überlappen sie sich in beiden Lagen nicht, dann passen sie in keiner räumlichen Lage zusammen. In allen anderen Fällen gibt es eine Lage im Raum, in der sie zusammenpassen. Sind π_R, ρ_R und σ_R die Winkel der entsprechenden Polygone in R, dann gilt, wegen $\rho_R < 180^\circ$:

$\pi_R + \rho_R + \sigma_R > 360^\circ$	keine Paßlage
$\pi_R + \rho_R + \sigma_R = 360^\circ$	eindeutige Paßlage, auseinandergeklappt
$\pi_R + \rho_R + \sigma_R < 360^\circ \wedge \pi_R + \sigma_R > \rho_R$	zwei, symmetrisch zur Zeichenebene liegende, eindeutig bestimmte Paßlagen
$\pi_R + \sigma_R = \rho_R$	eindeutige Paßlage, zusammengeklappt
$\pi_R + \sigma_R < \rho_R$	keine Paßlage

Zurück zu den Fünfecken: Heftet man fünf Fünfecke an die Seiten eines sechsten Fünfecks (alle regelmäßig und untereinander kongruent) und klappt man die äußeren Fünfecke gleichzeitig hoch, so entsteht eine Schale mit einer Drehsymmetrie von der Ordnung 5; und setzt man eine zweite solche Schale mit dem Boden nach oben passend auf die erste, hat man einen Dodekaeder gebaut.

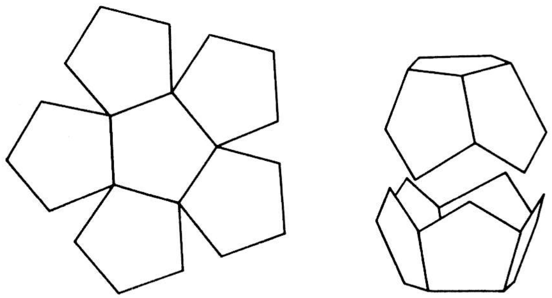

Abb. 49

Beim Anfertigen aus steifem Papier muß man auf eine möglichst exakte Kongruenz der Fünfecke achten, weil sich schon kleine Fehler störend beim Zusammenpassen bemerkbar machen. Für zwei zu identifizierende Kanten muß beim Ausschneiden an genau einer ein Falz zum Kleben belassen werden; es muß also schon vor dem Schneiden überlegt werden, welche Kanten zusammenkommen. Man kann schließlich noch die beiden Schalen an einer Kante identifizieren und erhält das Schnittmuster von Abb. 50.

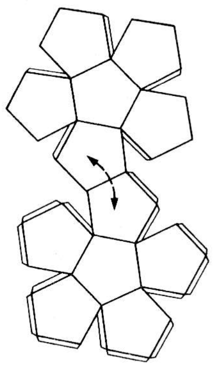

Abb. 50

Bei der Konstruktion werden nur kongruente regelmäßige Fünfecke verwendet. Nach den Überlegungen über Paßlagen im Raum gibt es für je drei Fünfecke nur eine Paßlage, d. h. alle Eckenumgebungen an dem gebauten Körper sind kongruent. Davon, daß die Konstruktion mit den beiden Schalen so möglich ist, hat man sich eigenhändig überzeugt. Mit der Eindeutigkeit der Paßlage kann man auch ohne Realisierung der Form beweisen, daß die beiden Schalen genau ineinander passen müssen, s. Abb. 51.
Wählt man nun statt Fünfecken 3 kongruente regelmäßige Drei- oder Vierecke für die Umgebung einer Ecke, so entstehen Tetraeder und Würfel. – Gibt es noch andere Möglichkeiten? – Andere n-Ecke können nicht genommen werden, weil ihre Winkel zu groß sind. – Können auch mehr als drei n-Ecke in einer Ecke zusammenstoßen? –

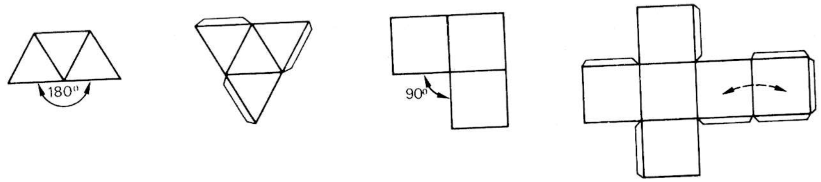

Abb. 51

4 Vier- oder Fünfecke nehmen schon zu viel Winkelraum ein, aber mit Dreiecken geht es, sogar mit den beiden Möglichkeiten 4 oder 5.

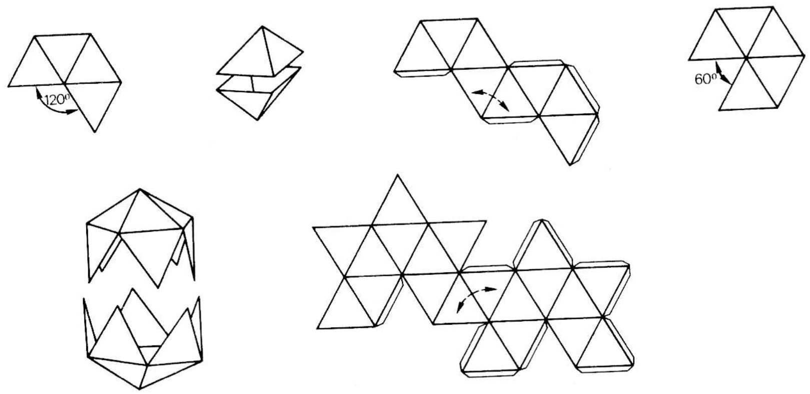

Abb. 52

Man baut Pyramiden mit regelmäßiger (vier- oder fünfeckiger) Grundfläche, läßt den Boden weg, baut eine zweite Pyramide und setzt die beiden (im Fall von 4 Dreiecken) zusammen, zum Oktaeder. Im Fall von 5 Dreiecken darf man die beiden Pyramiden nicht direkt aufeinandersetzen, da dabei Ecken entstünden, an denen nur vier Dreiecke aneinanderstoßen; nicht alle Eckenumgebungen wären kongruent. Beide Pyramiden müssen noch auf je fünf dreieckige Beine gestellt und können dann zusammengesetzt werden. Auch hier fällt der Existenzbeweis durch Realisierung leichter als durch Betrachtungen über Winkel o. ä.

Gleichzeitig ist bewiesen, daß es genau fünf *Platon*ische Körper gibt. Beim weiteren Umgang mit ihnen muß die durch die Herstellung bedingte Bevorzugung gewisser Ecken oder Flächen aufgegeben werden. Ist die Herstellung sauber genug, geschieht das automatisch, und die Bewußtmachung dieser Gleichberechtigung aller Ecken ist Ausgangspunkt für Symmetriebetrachtungen.

Zuvor aber noch eine genauere Beschreibung der Körper: Die Zahl f ihrer Flächen, die ihnen jeweils ihren Namen gibt, die Eckenzahl n des verwendeten Polygons und die Zahl p der an einer Ecke zusammenstoßenden Flächen sind aus der Herstellung bekannt. Die Gesamtzahlen e der Ecken und k der Kanten werden nicht durch Zählen, sondern durch Rechnen ermittelt: Jedes vorkommende n-Eck hat n Ecken und n Kanten. f n-Ecke kommen vor, aber jede Ecke wird bei allen p an sie stoßenden n-Ecken mitgezählt, also gibt es $e = \frac{fn}{p}$ Ecken. Jede Kante wird bei beiden an sie stoßenden n-Ecken mitgezählt, also gibt es $k = \frac{fn}{2}$ Kanten. f oder n müssen durch 2

oder p teilbar sein, und es kann z. B. keinen platonischen Körper mit einer ungeraden Zahl von Dreiecken geben.
Als Symmetrien kommen unter den eigentlichen Bewegungen nur Drehungen im Raum in Frage. Die Achsen müssen durch Ecken, Kanten- oder Flächenmittelpunkte gehen.
Es gibt dann p, 2 oder n Symmetriedrehungen um die jeweilige Achse. Allein aus den Zahlen ergibt sich z. B., daß eine Achse höchstens beim Würfel zugleich durch eine Kanten- und eine Flächenmitte, höchstens beim Oktaeder zugleich durch eine Ecke und eine Kantenmitte, höchstens beim Tetraeder zugleich durch eine Ecke und eine Flächenmitte gehen könnte. Tatsächlich kommen diese Sonderfälle beim Tetraeder und nur dort vor. Ansonsten gibt es $\frac{e}{2}$ Ecken-, $\frac{k}{2}$ Kanten- und $\frac{f}{2}$ Flächenachsen, beim Tetraeder $\frac{e+f}{2}$ Eckenflächenachsen. Zählt man die Nulldrehung nicht bei jeder Achse, sondern bei jedem Körper insgesamt nur einmal mit, so hat jeder Platonische Körper

$$s = (e(p-1) + k + f(n-1)) \cdot \frac{1}{2} + 1$$

Symmetriedrehungen, die die Symmetriegruppe ausmachen

	f	n	p	e	k	s	
Tetraeder	4	3	3	4	6	12	Tetraeder-gruppe
Hexaeder	6	4	3	8	12	24	Oktaeder-gruppe
Oktaeder	8	3	4	6	12	24	Oktaeder-gruppe
Dodekaeder	12	5	3	20	30	60	Ikosaeder-gruppe
Ikosaeder	20	3	5	12	30	60	Ikosaeder-gruppe

Die Übereinstimmung gewisser Zahlen legt schließlich noch eine Beziehung zwischen Hexa- und Oktaeder bzw. Dodeka- und Ikosaeder nahe: Faßt man die Flächenmitten des Oktaeders als Ecken auf und verbindet solche Ecken durch Kanten, die auf benachbarten Flächen liegen, ergibt sich ein Würfel. Umgekehrt kann man so einem Würfel einen Oktaeder einbeschreiben, und dieselbe Beziehung existiert zwischen Dodeka- und Ikosaeder. Wesentlich dabei ist, daß bei solchen Paaren einbeschriebener Körper die Symmetrieachsen und -drehungen und damit die ganzen Symmetriegruppen völlig identisch sind. Beim Tetraeder führt dieselbe Konstruktion wieder auf einen Tetraeder, weil bei ihm p = n ist; daher müssen bei ihm die Achsen, die durch eine Ecke gehen, auf der anderen Seite durch eine Flächenmitte gehen.
Als Oberfläche für einen Fußball scheinen die Platonischen Körper alle nicht sehr geeignet, da sie zu wenig der Kugel ähneln. Als Gütemaßstab könnte man z. B. den Quotienten $\frac{\text{Oberfläche}^3}{\text{Volumen}^2}$ nehmen, für unsere Zwecke geeigneter ist der Neigungswinkel zweier Flächen oder einer Kante gegen die ihr an einer Ecke gegenüberliegende Fläche (oder Kante (beim Oktaeder)). Dieser Neigungswinkel läßt sich unter Rückgriff auf die Herstellung berechnen.
Z. B. beim Ikosaeder (mit der Kantenlänge 1): Zunächst wird die Grundfläche der Pyramide betrachtet, die von einer Eckenumgebung gebildet wird (Abb. 53a). Ihr Umkreisradius ist $u = \frac{1}{2 \sin 36^\circ} \approx 0{,}85$, ihr Inkreisradius $i = \frac{1}{2 \tan 36^\circ} \approx 0{,}69$. Ein Schnitt

durch den Ikosaeder senkrecht zu ihr durch eine Kante (Spiegelsymmetrieebene) ergibt den Querschnitt in Abb. 53b durch insgesamt zwei Kanten der Länge 1 und vier Dreiecksseitenhalbierenden der Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Der Winkel zwischen Kante und Seitenhalbierender beträgt $\arcsin u + \arcsin \frac{2i}{\sqrt{3}} \approx 110{,}9^\circ$, der zwischen zwei Seitenhalbierenden (und damit zwischen zwei Flächen) $(720^\circ - 4 \cdot 110{,}9^\circ) \cdot \frac{1}{2} \approx 138{,}2^\circ$).

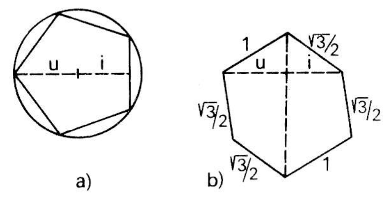

Abb. 53

Für den Dodekaeder weicht der Neigungswinkel zwischen zwei Flächen noch mehr von 180° ab: Bei der Herstellung einer Eckenumgebung (es werden die Bezeichnungen aus Abb. 48 verwendet) beschreibt die Ecke P bei Klappung des Polygons π um die Kante r_π einen Kreis mit Radius $\sin 72^\circ \approx 0{,}95$ in einer Ebene senkrecht zur Klappachse so weit, bis er auf die Spiegelebene trifft, die senkrecht zur Zeichenebene durch die Winkelhalbierende von ρ_R geht. Dort trifft P mit der Ecke S der Fläche σ zusammen und hat die Paßlage erreicht. Die Spiegelebene hat mit der Kippachse in der Zeichenebene einen Winkel von 54°.

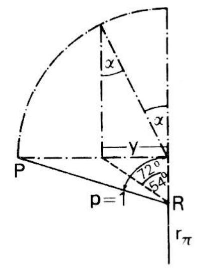

Abb. 54

In Abb. 54 ist die Ebene, in der sich P auf seiner Kreisbahn bewegt, in die Zeichenebene geklappt. Der gesuchte Winkel ist $\alpha + 90^\circ$. Und für α gilt (mit den Bezeichnungen der Abb. 54):

$$\alpha = \arcsin \frac{y}{\sin 72^\circ} = \arcsin \frac{\tan 54^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \arcsin \frac{\tan 54^\circ}{\tan 72^\circ} \approx 26{,}6^\circ,$$

die Neigung ist also 116,6°. Diesen Winkel hätte man auch einfach messen können: Der Körper wird auf eine Ebene gelegt, und der Nebenwinkel des gesuchten wird gemessen. Beim Ikosaeder sind die Kanten zwar flacher, die Ecken jedoch spitzer, und außerdem laufen bei ihm in einer Ecke fünf Nähte zusammen. Daher erscheinen Dodekaeder und Ikosaeder nicht geeignet, von den „kleineren“ Platonischen Körpern ganz zu schweigen. Man kann nun versuchen, Neigungswinkel dadurch zu vergrößern, daß man an einer Ecke drei Polygone zusammenstoßen läßt, deren ebenes Netz eine kleinere Lücke hat: man nehme z. B. zwei Sechsecke und ein Fünfeck, wo die Lücke nur 12° beträgt. Dann kann jedoch kein Platonischer Körper mehr entstehen.

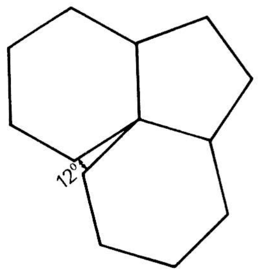

Abb. 55

Man verlangt aber um einer möglichst großen Symmetrie willen, daß sich Archimedische Körper ergeben, d. h. wenn schon verschiedenartige Polygone vorkommen, dann aber nur regelmäßige, und außerdem sollen nach wie vor alle Eckenumgebungen kongruent sein, d. h. im Beispiel, daß an jeder Ecke zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen.
Welche Kombinationen von Polygonen könnten eigentlich noch in Frage kommen? – Die Winkel der Polygone sind

n-Eck	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
Winkel in °	60	90	108	120	$128\frac{4}{7}$	135	140	144	$147\frac{3}{11}$	150

Zunächst werde der Fall betrachtet, daß an einer Ecke nur drei Polygone zusammenstoßen. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß genau zwei Polygone gleiche Eckenzahl haben. Das n, für das zwei n-Ecke gleiche Eckenzahl haben, muß gerade sein, denn an jeder Ecke eines solchen n-Ecks muß genau noch ein n-Eck und genau ein m-Eck ($m \neq n$) anstoßen, d. h. m- und n-Ecke müssen sich um ein n-Eck herum abwechseln, und das ist nur für gerades n möglich. Kommen zwei n-Ecke mit $n \geqslant 8$ vor, dann kann nur noch ein Dreieck dabei sein, und die Fläche der vorkommenden n-Ecke ist sehr unterschiedlich. Außerdem sind die Neigungswinkel noch recht klein. Ein Maß dafür ist die beim ebenen Netz entstehende Lücke. Es gibt folgende Kombinationen: 3-, 6-, 6-Ecke, 3-, 8-, 8-Ecke, 3-, 10-, 10-Ecke, 4-, 6-, 6-Ecke, 5-, 6-, 6-Ecke und 4-, 4-, n-Ecke (Prismen mit n-Ecken als Grund- und Deckfläche und quadratischen Seitenflächen).
Wenn als nächstes die Eckenzahlen aller drei Polygone paarweise verschieden sind, müssen sie alle gerade sein, damit sich um jedes Polygon solche der beiden anderen Sorten abwechselnd aufreihen können. Da ferner die Winkelsumme kleiner als ein Vollwinkel sein muß, kommen nur die Kombinationen 4-, 6-, 8-Ecke und 4-, 6-, 10-Ecke in Frage.

Mit ebenen Winkelbetrachtungen findet man auch die Archimedischen Polyeder mit mehr als drei Polygonen an einer Ecke. An einer Ecke stoßen zusammen: 3-, 3-, 3-, n-Ecke (ähnlich wie Prismen; die Seitenflächen sind jedoch nicht n Quadrate, sondern 2n ineinander verzahnte Dreiecke; sog. Antiprismen), 3-, 4-, 3-, 4-Ecke, 3-, 4-, 4-, 4-Ecke, 3-, 4-, 5-, 4-Ecke, 3-, 5-, 3-, 5-Ecke, 3-, 3-, 3-, 3-, 4-Ecke und 3-, 3-, 3-, 3-, 5-Ecke. (Die Folge der n beim Aufschreiben gibt die Folge der n-Ecke beim Umlaufen einer Ecke an; zwei nebeneinanderstehende, sowie das letzte und das erste n-Eck in einer Folge haben eine Kante an der Ecke gemeinsam). Hat ein Dreieck mit einem n-Eck eine Kante gemeinsam, dann stößt es an den beiden anderen Kanten entweder beidesmal auch an n-Ecke oder beidesmal an Dreiecke. Deswegen kommen nicht alle Zahlenfolgen vor, die noch bei bloßen Winkelsummenbetrachtungen möglich wären.
Statt der Winkelsummenbetrachtungen hätte man auch sofort topologische Überlegungen, z. B. den Eulerschen Polyedersatz einsetzen können, um gewisse n-Eck-Variationen ausscheiden zu können, etwa: Ein geschlossener Körper kann nicht lauter Sechsecke haben, denn hätte er f Stück, dann hätte er genau $k = \frac{6f}{2}$ Kanten und höchstens $e = \frac{6f}{3}$ Ecken, so daß $f + e - k \leqslant 0$ wäre, obwohl nach dem Satz $f + e - k = 2$ sein müßte. Die aufgeführten Kombinationen sind tatsächlich alle realisierbar; außer den Prismen und den Antiprismen alle dadurch, daß man an Platonischen Körpern Ecken und Kanten geeignet abschneidet. Die Symmetriegruppe bleibt dabei jeweils erhalten. Beim Ikosaeder kann man die Ecken so abschneiden, daß alle entstehenden Kanten gleich lang werden, aus den Dreiecken Sechsecke und aus den Ecken Fünfecke werden.

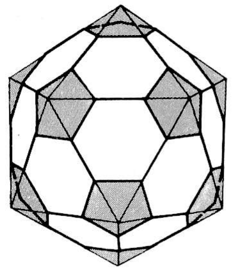

Abb. 56

Man kann also getrost aus je zwei Sechsecken und einem Fünfeck Eckenumgebungen herstellen und genügend viele davon aneinanderhängen. Man hat sich ja vorher davon überzeugt, daß ein Archimedischer Körper entstehen wird. Dieser hat $20 + 12 = 32$ Flächen, $30 + 12 \cdot 5 = 90$ Kanten, $12 \cdot 5 = 60$ Ecken und die Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe mit 6 fünfzähligen Achsen durch die Fünfecksmitten, die vorher Eckenachsen waren, 10 dreizählige durch die Sechseckmitten, die vorher Dreiecksmitten waren (die Ordnung der Achsen wird deswegen nicht 6, weil um jedes Sechseck herum Fünf- und Sechsecke sich abwechseln) und 15 zweizählige Achsen durch die Mitten derjenigen Kanten, die zwischen zwei Sechsecken liegen, die vorher alle Kantenachsen waren.

Der Neigungswinkel zweier Sechsecke beträgt wie beim Ikosaeder $138{,}2^\circ$. Der Neigungswinkel zwischen einem Fünf- und einem Sechseck ermittelt sich ähnlich wie beim Dodekaeder als $90^\circ + \arcsin \frac{\tan 54^\circ}{\tan 60^\circ} \approx 142{,}6^\circ$. Der kleinste Neigungswinkel zwischen zwei Flächen ist also größer als 138°, die Flächen sind fast gleich groß, ihr kleinster Winkel ist 108°, nirgends laufen mehr als drei Nähte zusammen, die Symmetriegruppe ist größtmöglich, kurz: Es liegt die ideale Form für den Fußball vor.

3.5 *Ein System geometrischer Begriffe bilden*

Nach dem POB gehen in die Begriffsbildung die unter 3.1 bis 3.4 aufgeführten Grundtätigkeiten ein. Die Gefahr der Isolierung einzelner Begriffe durch entsprechend isolierte Betrachtungen von Problemsituationen oder Zweckanalysen ist im herkömmlichen GU nicht groß, da er in der Regel seinen Ausgang nicht von solchen Betrachtungen nimmt. In einem Unterricht, der sich am POB orientiert oder es wesentlich berücksichtigt, braucht aber eine solche Isolierung ebenfalls nicht eintreten; denn ein Begriff enthält immer auch seine Beziehungen zu anderen, seine Einordnung in das gesamte geometrische Begriffssystem und seine Handhabung darin. Im folgenden werden einige Beispiele für die operative Bildung geometrischer *Grund*begriffe gegeben, wobei das ordnende Prinzip jeweils nicht die Anwendungssituation, sondern der Begriff, die Form, ist.

a) *Homogenität – Symmetrie*: Wegen ihrer hochgradigen (inneren und äußeren) Homogenität ist die Ebene die grundlegende geometrische Form. Es gibt keine konstantenfrei formulierten Eigenschaften, mit der Stellen auf ihr, und auch keine, mit der Stellen außerhalb voneinander unterschieden werden könnten. Sie ist in ihrem Lager (einem Abdruck von sich; einer mit ihr vollständig inzidierenden Fläche) frei beweglich. Sie kann als transitive (d. h. für jedes Paar von Punkten gibt es eine Abbildung, die den ersten auf den zweiten wirft) Untergruppe ihrer eigenen Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen, nämlich als ihre eigene Translationengruppe aufgefaßt werden. Die äußere Homogenität könnte man abbildungsgeometrisch dadurch fassen, daß man die von den eigentlichen Bewegungen und den (orientierungserhaltenden!) axialen Streckungen erzeugte Gruppe im Raum betrachtet. Die zugehörige Symmetriegruppe der Ebene operiert dann auch auf dem Raum außerhalb transitiv.

– Die beiden anderen innerlich homogenen Flächen sind Kugel und Zylinder. Daß es sonst keine mehr gibt, beweist man etwa differentialgeometrisch. Auch Kugel und Zylinder sind in ihrem Lager frei beweglich und können als transitive Untergruppe ihrer Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen aufgefaßt werden. Punkte P außerhalb können jedoch voneinander unterschieden werden, etwa durch die Eigenschaft, daß es durch P eine (mehrere) Gerade(n) gibt, die die Kugel- (Zylinder-)fläche nicht trifft (treffen). Tatsächlich gibt es auch für diese beiden Formen keine im ganzen Raum transitive Symmetriegruppe in der Bewegungsgruppe, auch nicht in der affinen Gruppe, noch nicht einmal in der Homöomorphismengruppe.

– Die homogenen Linien sind Gerade, Kreis und Schraubenlinie. Sie sind in ihrem Lager frei beweglich. Die Gerade ist die einzige mit auch äußerer Homogenität.

– Die Ebene ist Grundlage zur Herstellung aller dieser homogenen, und auch anderer weniger homogenen Formen (Ellipse, Kegel, usw.). Sie selbst kann mit dem Dreiplattenschleifverfahren hergestellt werden (siehe Schreiber 1978b).
Kugeln und Zylinder werden an Ebenen geschliffen, dabei wird die Schleifrichtung variiert (Kugel) oder konstant gehalten (Zylinder), z. B. beim Rollen von Knetkugeln oder -zylindern.

– Kreise sind Schnitte von Ebenen mit Zylindern (oder Kugeln), z. B. der Rand des Bodens einer Konservenbüchse. Oft ist bei Kreisen auch die Eigenschaft wichtig, daß alle Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkt gleichen Abstand haben, z. B. bei Räderfahrzeugen. Für die dementsprechende Herstellung braucht man den Begriff des starren Körpers bzw. der Kongruenz. Und hier, wie auch bei anderen Formen, ist dann die Äquivalenz verschiedener Herstellverfahren, d. h. der verschiedenen Begriffsbildungen, nachzuweisen bzw. zu diskutieren. Auch für die Erzeugung von rechten Winkeln und Parallelität wird der Kongruenzbegriff (bzw. starrer Körper) gebraucht.

– Schraubenlinien entstehen aus Geraden beim Aufwickeln von Ebenen auf Zylinder.

Praktische Beispiele, wo die Beweglichkeit im Lager ausgenutzt wird:

– Ebene: Säge, Glattstrich mit ebener Holzplatte, Gegenstände mit ebener Unterseite auf ebenen Fußböden oder Möbelplatten.

– Kugel: Kugelgelenk, Kugelschreiber (die Kugel an der Spitze wird an der einen Seite von der Mine befeuchtet, sie ist in ihrem Lager frei beweglich, wird beim Schreiben auch beliebig bewegt, und dabei wird Minenflüssigkeit zum Papier transportiert und dort abgegeben).

– Zylinder: Karussell, das bei der Rotation auch gehoben und gesenkt werden kann, Zeichenstift relativ zu einem walzenförmigen Seismograph, der langsam rotiert. Häufig werden Zylinder aber nicht frei in ihrem Lager bewegt, sondern nur entlang einer vorgegebenen Linie (Gerade, Kreis, Schraubenlinie); für die Zylinderform gibt es dann jeweils noch andere Gründe.

– Gerade: Schublade, Kolben, Nagel in Wand, Stecker, Schraubenschlüssel auf Schraubenmutter.

– Kreis: Alle ortsfesten Rotationen, Drehtür, Zahnrad, Töpferscheibe, Eßgabel in Kartoffel.

– Schraubenlinie: Korkenzieher, Schraubengewinde.

Unerwünschte Beweglichkeit wird durch Inhomogenität verhindert:

– Zueinander passende Aus- und Einbuchtungen an sonst ebenen Flächen, z. B. an Steinen, mit denen die alten Griechen ohne Mörtel mauerten;

– Aufrauhen von Flächen, z. B. Flanelltafel;

– Auflösen von Kreis- oder Kugelform durch Ecken, Kanten, Ebenen, z. B. Schraubenmutter, Spielwürfel.

b) *Ebene*: Viele Flächen werden zu Ebenen gemacht, weil sie als Äquipotentialflächen im Schwerefeld fungieren sollen und dieses in den relevanten Größenordnungen als physikalisch homogenes Bündel richtungsgleicher, gerader Schwerelinien aufgefaßt wird. Bei diesen Überlegungen gehen auch die Begriffe Parallelität und Orthogonalität und ihre Beziehungen ein. Die Schwerkraft wird neutralisiert, da jede Richtung in der Ebene

senkrecht auf den Schwerelinien steht. D. h. ein Objekt kann sich auf der Ebene bewegen, ohne daß Kraft zur Überwindung der Schwerkraft aufgewendet werden müßte, und ein Objekt kann an jeder Stelle in Ruhelage gebracht werden, auf: Billardtisch, Eßtisch, Zimmerboden, Gehweg, Fahrstraße (so weit nicht außergeometrische Optimalitätskriterien entgegenstehen: Wirtschaftlichkeitsüberlegungen bei unebenem Gelände oder Fragen der Verkehrsführung) oder Treppenstufen (in Anpassung an die menschliche Anatomie, die wiederum dem Schwerefeld angepaßt ist). Die Formgebung für die Äquipotentialflächen im Schwerefeld ist ausschließlich physikalisch begründet; hätte das Feld eine andere Struktur, dann müßten auch die Flächen anders geformt sein.
Daß Mauern oft Ebenen sind, ist nur insofern auf die Wirkung der Schwerkraft zurückzuführen, als sie entlang der Schwerelinien, d. h. senkrecht gebaut werden; es gibt aber durchaus gekrümmte Mauern (Chinesische Mauer, zylinderförmige Türme usw.). Erst die Geradlinigkeit in noch anderen Richtungen, etwa im Grundriß von Grundstücken, Häusern, Zimmern führt zu ebenen Mauern. Diese zusätzliche Geradlinigkeit ergibt sich in der Regel aus der Forderung nach Konvexität zweier aneinanderstoßender Grundrißflächen, die nur mit geraden Grenzlinien zu erfüllen ist. Und dies ist das ebene Analogon dazu, daß ebene Flächenstücke die einzig mögliche Grenzflächen zwischen konvexen Körpern bzw. Raumstücken sind: Ist nämlich ein (topologisch relativ) offenes Raumstück (in einer kleinen, offenen Vollkugel) konvex, dann aus Stetigkeitsgründen auch seine abgeschlossene Hülle. Der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist konvex, insbesondere deren Grenzfläche bei Berührung, die also mit zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält und daher eine Ebene ist. (Anwendung bei Zimmern, Schuhkartons, Ziegelsteinen.) Begründet werden müßte noch die Forderung nach Konvexität mit sachabhängigen Optimierungsargumenten.
Auch der gewöhnliche Spiegel funktioniert nach diesem Prinzip: Er muß eine innerlich homogene Fläche sein, weil es keine Rolle spielen darf, von welcher Position vor dem Spiegel aus man das Spiegelbild sieht. Das reflektierte Raumstück hinter der Spiegelfläche muß, unter Umkehrung der Richtung „vorn – hinten" die gleiche Form wie das originale haben, insbesondere genau dann konvex sein, wenn dieses konvex ist; und das ist weder bei einer kugel-, noch bei einer zylinderförmigen, sondern nur bei einer ebenen Spiegelfläche möglich.

c) *Gerade*: Verwandte Überlegungen kann man darüber anstellen, warum Papierknicke Geraden sind: Der Knick gehört in jeder relativen Lage der beiden durch ihn definierten Papierhälften beiden an, er ist also immer im Durchschnitt zweier Ebenen und daher Realisat einer Geraden. Papierfalten ist eine spezielle Realisierung einer räumlichen Drehung: Der Knick und die eine Hälfte bleiben räumlich fest, die andere Hälfte wird um den Knick gedreht. Jede eigentliche Bewegung im Raum, die einen Fixpunkt hat, hat noch einen zweiten, läßt die ganze Gerade durch die beiden Punkte fest und ist eine Drehung um diese Gerade als Drehachse. Geht nämlich eine Ebene durch die beiden Fixpunkte, dann auch alle ihre (kongruenten) Bilder; und da mit zwei Punkten die ganze Verbindungsgerade in der Ebene liegt, enthalten alle Bilder diese Gerade, die somit Fixgerade ist, und wegen der Isometrie sogar Fixpunktgerade. Bei jeder (isometrischen) Rotation kommt also eine Drehachse vor, die nicht notwendig ortsfest

sein muß: Radachsen an Fahrzeugen, Drall eines Geschosses, Richtung eines Bohrers, Achse eines Kreisels, Scharniere an Türen, Fenstern, Koffern, Falten am Papier.
Die Frage nach den Papierfalten ist noch nicht hinreichend beantwortet: Wie sehen die Knicke aus, wenn das Papier selbst nicht eben ist? Die eine Hälfte und der Knick bleiben ortsfest, die andere Hälfte wird bewegt, hat Fixpunkte am Knick, wird also gedreht. Diese Bewegung hat eine Fixpunktachse, und alle Punkte, die nicht auf ihr liegen, bewegen sich auf Kreislinien senkrecht dazu. Wenn der Knick nicht in der Fixpunktgeraden verlaufen würde, müßte das Papier reißen. Auch bei nicht ebenem Papier sind die Knicke Geraden, d. h. Papier kann nur entlang gerader Linien geknickt werden. Z. B. bei einem Zylinder entlang der Mantellinien, aber nicht bei einer Kugel oder bei einem gefalteten Stück Papier, dessen beide Hälften nicht in einer Ebene liegen, durch einen bereits vorhandenen Knick. Man muß dazu das Papier erst wieder eben machen, entweder durch Glattstreichen oder durch Zusammenfalten (wenn es dann noch dünn genug ist, um als Ebene zu gelten). Eine zylinderförmige Papierrolle ist insofern stabil, als Knicke quer zu den Mantellinien nur möglich sind, nachdem die Rolle durch Knicke entlang zweier Mantellinien flachgedrückt wurde. Bei Postern entstehen dann die häßlichen Faltenmuster.
– Auf diese Art und Weise kann man sich plausibel machen, warum eine ebene Fläche zwar zu einem Kegel-, Kegelstumpf- oder Zylindermantel, nicht aber zu einer Kugelfläche aufgewickelt werden kann: Aufwickeln kann als eine Folge von (nicht scharfen) Faltungen aufgefaßt werden, wobei die „Falten" (Mantellinien) Geraden sind und bleiben.
– Mit der Fixpunkteigenschaft bei Rotationen kann auch gerechtfertigt werden, warum ausgerechnet Geraden die kürzeste Verbindung zwischen zwei ihrer Punkte sind. Genauer: Hält man ein Seil an einem Ende in einem Punkt A fest, läßt es alle möglichen Lagen einnehmen, bei denen es aber immer durch einen festen Punkt B geht, und markiert jedesmal seine Berührstelle mit B: dann liegt diejenige Marke dem festen Ende auf der linearen Ordnung des Seils am nächsten, die bei gerader Lage gesetzt wurde (dabei wurde angenommen, daß das Seil zwar verzerrt werden kann, aber nur isometrisch). Das zugehörige Axiom ist die Dreiecksungleichung für Punktetripel, mit dem die Länge (rektifizierbarer) Kurven aus Streckenlängen ermittelt wird. Und zwar ist der unscheinbarere Teil des Axioms hier wesentlich: Genau wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, addieren sich die Teilstreckenlängen zur Gesamtstreckenlänge. Warum ist das bei streckenförmigen Linien so und nicht bei anderen? Oder anders gewendet: Warum sind kürzeste Linien innerlich und äußerlich homogen?
– Ist eine Linie Kürzeste zwischen zwei Punkten, dann ist sie es nach der Dreiecksungleichung auch für alle Punktepaare dazwischen.

Abb. 57

(Sei in Abb. 57 die durchgezogene Linie zwischen A und B eine Kürzeste. Ist die gestrichelte Linie zwischen C und D kürzer als (so lang wie) die durchgezogene zwischen ihnen, dann ist auch der Gesamtweg von A nach B über die gestrichelte Linie

kürzer als (so lang wie) der über die durchgezogene.) Ist k eine Kürzeste zwischen A und B, dann auch alle ihre Bilder unter einer Rotation um die Gerade durch A und B (wegen deren Homogenität). Das Entsprechende gilt für alle Punktepaare auf k zwischen A und B, so daß ein gewisser räumlicher Bereich „zwischen" A und B von lauter Kürzesten durchzogen wird und es für jeden Punkt dort eine Kürzeste gibt, auf der er liegt. Solche erfahrungswidrigen Verhältnisse treten nicht auf, wenn man die Linie(n) zwischen zwei Punkten als Kürzeste nimmt, die bei denjenigen Bewegungen fest bleibt (bleiben), bei denen auch die beiden Punkte fest bleiben.
Viele der bis jetzt angestellten Plausibilitätsüberlegungen über Eigenschaften von Ebene und Gerade lassen sich nur nach einer geeigneten Axiomatisierung deduktiv herleiten.
Praktische Anwendungen der Kürzesteneigenschaft von Geraden findet man bei der Richtschnur des Maurers, beim Maßband, beim Abstand, den man zu einem Kettenhund hält, bei Straßen, Kanälen und Brücken, die, sofern es das Gelände zuläßt, geradlinig gebaut werden, damit Bau-, Unterhaltungs- und Verkehrskosten minimal werden.

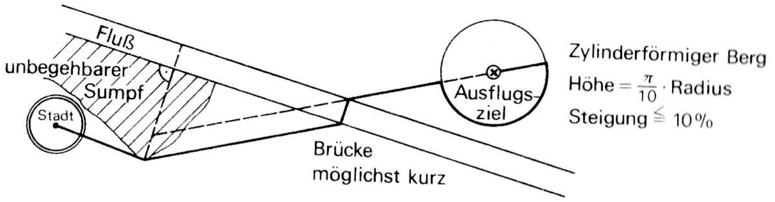

Abb. 58

Abb. 58 gibt ein Beispiel dafür, daß in Abhängigkeit vom Gelände wirtschaftliche und geometrische Kürzeste keineswegs identisch sein müssen. Auf vorgegebenen Flächen sind Kürzeste meist sowieso alles andere als Geraden. Auf abwickelbaren Flächen (Würfel, Zylinder) findet man die Kürzeste zwischen zwei Punkten durch geeignetes Abwickeln, Einzeichnen der Strecke in der Ebene und wieder Aufwickeln. Auf der Kugel liegt die Kürzeste zwischen zwei Punkten auf dem (einem) Großkreis (Ebenenschnitt durch den Mittelpunkt) zwischen ihnen. Zeichnet man eine kürzeste Flugroute (etwa Polroute von Europa nach Japan) auf einer ebenen Landkarte ein, ergibt sich eine krumme Linie, jedenfalls bei den üblichen Projektionen; die Metriken auf der Kugel und auf der Karte sind nicht euklidisch.
– Wie schwierig es ist, ohne Hilfsmittel (insbesondere ohne die Verwendung zweier Ebenen) eine Gerade herzustellen, mag jeder ermessen, der schon versucht hat, eine Gerade freihändig zu zeichnen (wobei ja sogar auch schon eine Ebene vorgegeben ist). Bemerkenswert ist auch die Unfähigkeit von Lebewesen, sich ohne visuelle (o. ä.) Orientierungshilfen geradeaus zu bewegen. Der spiegelsymmetrische Körperbau des Menschen (und der meisten beweglichen Tiere) ist zwar für die tägliche Auseinandersetzung mit der Umwelt hinreichend genau. Innerhalb dieser Genauigkeit kann jedoch beispielsweise die Schrittlänge des linken Beins die des rechten durchschnittlich um 1 mm übertreffen. Der bei einem Marsch im Dunkeln eingeschlagene Weg wird also nicht von homogenen Bedingungen erzeugt. Die Spur ergibt etwa einen Kreis, der schon nach 800 m

wieder geschlossen ist, weil sie zwar wegen der ungefähr konstanten Schrittlänge innerlich, aber nicht äußerlich (bezüglich der linken und rechten Seite) homogen ist (nach (Perelman 1954, S. 131ff)).
– Schließlich werden Formen geradlinig, wenn sie entlang der Schwerelinien gebaut werden, entlang dem Senkblei: Pfahlbauten, Häuserwände, Möbel, Masten (auch Baumstämme in gewisser Realisierungsgüte), usw. Diese Geradlinigkeit ist aber physikalisch, und nicht geometrisch begründet: Wären die Schwerelinien gekrümmt, dann müßten die tragenden Teile einer Konstruktion auch entsprechend gekrümmt sein.

d) *Schraubenlinie*: Sie, bzw. die Schraubenfläche, kommt vor als Wendeltreppe, Rutschbahn, Archimedische Schnecke, Fleischwolf, Schraube und Mutter, Druckerpresse, Kelter, Schraubverschluß, Korkenzieher, Sprungfeder, Federwaage, usw. Grundlegende Gedanken zu Herstellung und Längenberechnung finden sich in (Schreiber 1978b). Der Zweck von Schraubenlinien ist es, daß an ihnen Gegenstände in bestimmte Richtungen transportiert werden und die dabei beteiligten Kräfte bzw. Bewegungen möglichst senkrecht zur Transportrichtung stehen. Ihre geometrische Funktion ist die Beweglichkeit in sich und der Transport eines (gedachten) Zylinders entlang der Schraubachse. Schraubenlinien sind aufgewickelte Dreiecke, die ihrerseits Schnitte schiefer Ebenen sind. Besonders deutlich wird dies bei Wendeltreppe und Rutschbahn. Deren Hauptzweck, bequeme Überwindung von Höhenunterschieden (kein freier Fall, kein Bergsteigen), würde auch von einer schiefen Ebene mit bzw. ohne Stufen erfüllt. Aus Platzgründen wird diese um eine Achse gewickelt. Die durch die Krummlinigkeit der Bewegung auftretenden Kräfte können für diese Betrachtungen vernachlässigt werden. Dafür können sinnvoll Untersuchungen über Windungszahl, Anzahl und Form der Stufen usw. angeschlossen werden.
– Eine Archimedische Schnecke ist eine Schraubenfläche („zusammengesetzt" aus Schraubenlinien), die in ein Rohr eingelagert ist. Zur Wasserförderung wird sie mit einem Ende schräg in ein Gewässer gelegt, und durch Rotation um ihre Achse transportiert sie Wasser an ihr anderes Ende, d. h. nach oben. Diese Transportart wird auch für Getreidekörner bei der Ernte oder für Sand angewendet, wo die Abdichtungsprobleme weniger ausgeprägt sind als beim Wasser.

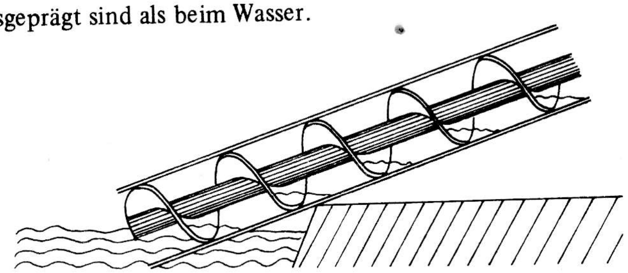

Abb. 59

Zur Überwindung der Schwerkraft wird dabei die Schwerkraft selbst ausgenutzt: Wenn das Transportgut sich irgendwo im Rohr in einer Windung der Schraubenfläche befindet, nimmt es die bezüglich der Schwerkraft tiefste Stelle ein; es liegt in der Windung, in der es sich gerade befindet, auf der Schraubfläche bzw. auf der Rohrinnenseite. Steht das

Rohr senkrecht, rutscht das Gut entlang der Fläche nach unten (Haftreibung sei vernachlässigt). Liegt das Rohr waagrecht, dann liegt das Gut im Rohr auf der Unterseite. Auch wenn man dann das Rohr ruckartig in Achsenrichtung stoßen würde, so würde das Gut doch in jeder Windung von der Schraubenfläche festgehalten. Hebt man das Rohr nun stetig an, so wirkt die Schraubenfläche eine zeitlang immer noch in jeder Windung wie zwei Wände und nicht als Rutschbahn.
Für eine Schraubenlinie mit Radius r und Ganghöhe g besteht folgender geometrischer Sachverhalt: Legt man durch ihre Achse eine Ebene, dann schneidet die Schraubenlinie diese in endlich vielen Punkten auf den beiden Parallelen zur Achse im Abstand r, wobei die Punkte jeweils im Abstand g aufgereiht sind. Läßt man nun die Schraubenlinie gleichmäßig um die Achse ortsfest (!) mit der Winkelgeschwindigkeit w rotieren, dann bewegen sich die Schnittpunkte mit der Geschwindigkeit wg auf den Parallelen. Man kann das leicht am einfachen Korkenzieher oder einem Schraubengewinde realisieren, indem man einen Finger auf die Schraubenlinie legt, und diese mit der anderen Hand (scheinbar) ortsfest rotieren läßt. Nach genügend vielen Umdrehungen stellt man fest, daß der Finger die ganze Schraubenlinie durchlaufen hat. Auf dieselbe Art und Weise wird beim Stromzähler die stetige Rotation einer Schraubenfläche in eine diskrete Rotation einer Zählscheibe verwandelt.
– Auch der Korkenzieher mit Aufsatz funktioniert nach diesem Prinzip.

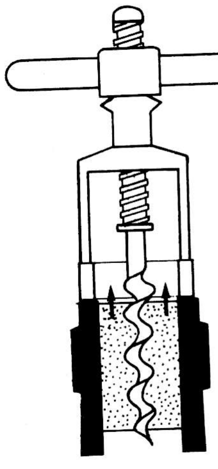

Abb. 60

Zunächst wird er in den Korken eingedreht und die Rotation dann fortgesetzt. Wegen des festen Sitzes im Flaschenhals kann der Kork nicht mitrotieren, er wird in Richtung der Schraubachse aus der Flasche transportiert und befindet sich dann im Gerät. Der Ring am Ende des Geräts ist so eng, daß der Korken bei der Rotation in der anderen Richtung ebenfalls nicht mitrotieren kann, sondern entlang der Schraubachse wieder aus dem Gerät herausgeschafft wird.
– Die gleiche Überlegung gilt bei der Archimedischen Schnecke: Das Gut nimmt im Rohr die tiefste Lage ein, die die Schraubenfläche zuläßt. D. h. es befindet sich immer in der Ebene, die durch die Achse und die Schwerelinien festgelegt ist, und

wird dann bei der Rotation nach oben bewegt. So verhalten sich nicht nur Punkte auf Ebenen und Schraubenlinien, sondern auch Ansammlungen ausgedehnter Körper auf Schraubenflächen. Dahinter wiederum steht das Prinzip der schiefen Ebene: Wird eine schiefe Ebene waagrecht in einen Sandhaufen an einer in der Senkrechten beweglichen Wand geschoben, dann wird der Sand hochgehoben.

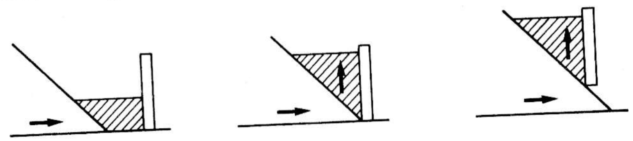

Abb. 61

– Bei Wendeltreppe, Rutschbahn und Archimedischer Schnecke ist die Homogenität der Schraubenlinie zwar sinnvoll, aber nicht streng funktional; die Ganghöhe, teilweise sogar der Radius könnten durchaus in gewissen Grenzen variieren. Beim Fleischwolf variieren beide Größen tatsächlich:

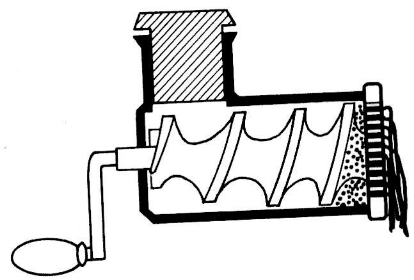

Abb. 62

In Richtung Ausgang wird der Radius der Schraubenfläche größer und die Ganghöhe kleiner, so daß für die durchgedrehten Brocken immer weniger Platz zur Verfügung steht. Hier ist es auch nicht die Schwerkraft, sondern der Druck der nachgeschobenen Teile, der verhindert, daß die Brocken im Fleischwolf mit der Schraubenfläche ortsfest rotieren.
– Bei Druckerpressen, Keltern, Schrauben, Schraubverschlüssen und Korkenziehern ist die Homogenität unverzichtbar, da diese Schraubenlinien (bzw. -flächen) in ihrem Lager frei beweglich sein müssen. Ihr Funktionsprinzip, aufgrund dessen Teile fest miteinander verbunden bzw. aufeinander gedrückt werden, ist folgendes: Mit kleiner Ganghöhe und damit kleinem Neigungswinkel wird erreicht, daß eine in Richtung der Schraubachse wirkende Kraft fast senkrecht auf der möglichen Bewegungsrichtung der Schraubung steht und damit i. a. nicht zu einer lockernden Bewegung ausreicht bzw. sich nur schwer einer festdrehenden Bewegung widersetzen kann.
– Eine geometrische Funktion, bei der sowohl Schraubenflächen, als auch Schraubenlinien verwendet werden können (und auch verwendet werden), ist das Eindrehen in einen Korken. Bei Korkenziehern mit einer Schrauben*fläche* ist die Schraubachse als materieller Zylinder realisiert. Sie schneiden daher aus dem Korken ein in der Mitte zylinderförmiges Loch aus; und die Gefahr ist nicht gering, daß sie beim Ziehen aus dem Korken gerissen werden. Tatsächlich funktionieren die Korkenzieher mit einer

Schrauben*linie* besser. Ihre Herstellung ist auch schwieriger, und sie sind teurer.
– Sprungfedern und Federwaage schließlich funktionieren dadurch, daß bei etwa konstanter Gesamtlänge Radius und Ganghöhe variabel sind.
Schraubenlinien sind noch insofern von besonderem Interesse, als an ihnen das Problem der Raumorientierung entwickelt werden kann (vgl. auch Lernziel 3.1, Teil d)).

e) *Starrer Körper*: Bekanntlich gibt es in unserer Umwelt keine starren Körper; die Form eines jeden Körpers ändert sich unter mechanischen, Wärme- oder chemischen Einflüssen: Bruchtests in der Industrie, Motoradhelm, Mörtel beim Bau, Gelenkmechanismen, Bremsflüssigkeit, Springen eines Balls, bewegliche Lager unter Brücken, Schwierigkeiten beim Schließen mit einem angewärmten Schlüssel in einem kalten Schloß, Zahnweh bei extremen Temperaturen im Mund, wenn Plombe und Zahnschmelz sich verschieden stark ausdehnen, Übergänge zwischen Aggregatzuständen, Einwirkungen durch Feuer, Säuren, Rost, Legierungen. Entsprechend haben sich auch in der Natur mehr oder weniger feste Körper ausgebildet: Eierschale, Chitinpanzer, Holz, Knochen, Zellwand: Bisweilen ist das Fehlen von Starrheit funktional: Pflanzenstengel, Knochengelenk, Haut.
Die Begriffsbildung des starren Körpers stößt auf besondere Schwierigkeiten, weil zur Feststellung von Starrheit bereits der Kongruenzbegriff notwendig ist, dieser seinerseits in einer operativen, wirklichkeitsbezogenen Geometrie nicht ohne den starren Körper gewonnen werden kann. Darüber hinaus erscheint es geboten, nicht von der Idee eines absolut starren Körpers, sondern von relativ zueinander starren Körpern zu sprechen, deren Formänderungsverhalten (z. B. bei Temperaturänderung) gleichartig ist, so daß z. B. zwei auf zwei Körpern markierte kongruente Strecken kongruent bleiben. Die Exhaustion der Idee, die Steigerung der Realisationsgüte, findet durch Auswahl, und auch durch Härtung von Stoffen statt. Das sind Vorgänge, bei denen es sich nicht um eine Verwirklichung von Homogenitätsprinzipien handelt. Diese ganze Problematik wird in (OAG) ausführlicher abgehandelt.
Wichtig ist der Begriff der „partiellen" Starrheit bei Gußmaterial (Gips, Mörtel, Eisen), bei Gelenkmechanismen (Zirkel, Storchenschnabel, Zollstock, Speichen am Regenschirm, gefaltetes Papier, Eisenbahnzug, Gelenkomnibus, Getriebe), bei elastischen Körpern (gerolltes Papier, Maßband, Flüssigkeit zum Volumenmessung oder als Bremsflüssigkeit) (vgl. auch (Freudenthal 1977)). Jegliche Geometrie des Passens setzt den starren Körper voraus, aber in der Realität können entsprechende Operationen eigentlich fast nur mit partiell starren Körpern ausgeführt werden.

3.6 *Ästhetische Momente der Geometrie erfahren*

Für diesen Bereich erwähne ich:
Band- und Flächenornamente (Mosaike, Kartoffeldruck), unsymmetrische, spiegel-. dreh-, schub-, streckensymmetrische Zeichnungen mit und ohne Gerät, körperhafte geometrische Formen aus allerlei Material herstellen, Gegenstände aus Papier falten; künstlerische Darstellungen auf ihren geometrischen Gehalt untersuchen, z. B. Bildaufteilungen, Proportionen, Fluchtlinien, Symmetrien, arabische Ornamente, und nicht zuletzt die topologisch-geometrischen Täuschungen des *M. C. Escher*.

Mit geometrischen Kategorien allein soll und kann eine künstlerische Darstellung allerdings nicht betrachtet werden, sie können aber anregend und hilfreich sein.
Tiefer liegende Aspekte sind etwa:
– Die Rolle der Symmetrie in Kunstwerken: Durch Wiederholung von Mustern wird eine Überladung mit „Information" vermieden. Diese Wiederholungen brauchen nicht kongruent zu sein; sie können auch nur ähnlich, nur affin, nur homöomorph sein. Fast immer wird jedoch mit Asymmetrien eine zu perfekte Symmetrie durchbrochen, damit das Werk nicht langweilig, nicht klischeehaft wirkt (vgl. (Weyl 1952/1955)) oder damit die Menschen nicht mit künstlerischer Vollkommenheit den Argwohn der Götter auf sich ziehen.
– Das Material, mit dem Kunstwerke hergestellt werden, setzt Rahmenbedingungen. Wie wirken sich seine Homogenitäten (ebene Fläche der Leinwand, gleichmäßige Maserung von Holz, Farbe oder Bronze als homogene Masse) und Inhomogenitäten (Rauheit einer Fläche, Farbmuster eines Marmorsteins) auf das Werk aus?
– Das Wesen einer künstlerischen Darstellung, mag sie noch so wirklichkeitstreu sein, ist die künstlerische Idee, die in das Werk eingebracht wird. Insofern ist jegliches Kunstschaffen geometrischem Handeln verwandt.

Abschließende Bemerkungen zu den Lernzielen

Die Proportionen bei dieser ganzen Diskussion entsprechen nicht dem herkömmlichen GU, auch nicht einem GU, in dem das POB voll wirksam ist, sondern eher, kurz gesagt, dem Teil, der durch das POB eingebracht werden kann. Die Zuordnung der Beispiele zu den Lernzielen ist nicht eindeutig. Das liegt daran, daß die Grundtätigkeiten nicht isoliert durchgeführt werden können, sondern ineinander übergehen.
Nur scheinbar beziehen sich die meisten Beispiele nicht auf den GU der Primarstufe. Tatsächlich können und sollen jedoch bereits dort Grundlagen geschaffen werden, indem geometrische Phänomene aus der Umwelt der Schüler in den GU eingebracht, Zwecke analysiert und alternative Formen diskutiert werden, zunächst nur qualitativ.
Auch für die Sekundarstufe I erscheinen manche der Vorschläge als zu anspruchsvoll. Ihre Realisierung im Unterricht braucht jedoch jeweils nur so weit getrieben zu werden, wie es für den Leistungsstand der Schüler und die Zielsetzung angemessen ist. Mit der manchmal sehr ausführlichen Behandlung sollte lediglich die Tragfähigkeit dieser Beispiele und des POB für den GU aufgezeigt werden. Andererseits könnten einige dieser Beispiele auch noch erheblich vertieft werden.
Selbstverständlich soll und kann der GU auch einen wesentlichen Beitrag leisten zum Erreichen der anfangs zitierten Lernziele des MU und darüber hinaus noch allgemeinerer Ziele des Schulunterrichts (z. B. Wille zum Problemlösen, Freude am Lernen, soziale Haltungen, motorische Fertigkeiten, . . .). Es sollten hier aber weniger die geometriespezifischen Beiträge zu allgemeinen Lernzielen, sondern geometriespezifische Lernziele selbst diskutiert werden. Es ist durchaus möglich, daß etwa mit Zweckanalysen und Entwickeln von Herstellvorschriften kreatives Verhalten und Argumentationsfähigkeit gefördert werden, und zwar in einer unmittelbarer praktisch ausnutzbaren Weise als bei der Lösung innermathematischer Probleme, oder daß echter (nicht aufgesetzter) Umweltbezug im GU ein besonders wirkungsvoller Faktor intrinsischer Motivation ist und da-

mit auch die Erreichung wichtiger affektiver Ziele unterstützt. Diese Fragen sind jedoch nicht Gegenstand der Erörterungen gewesen; sie müßten noch gesondert untersucht werden.

4. Zusammenfassung

1. Ziel: Der GU soll den Schüler befähigen, den wirklichen Raum zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen. Speziell soll der Schüler
a) GS durchschauen und sich vorstellen können,
b) den Zweck und die Zweckhaftigkeit von GSn erkennen und beschreiben können,
c) GS her- und darstellen können (dreidimensional, eben, sprachlich, numerisch, analytisch, algebraisch, axiomatisch-deduktiv),
d) geometrische und außergeometrische Probleme (geometrisch) lösen können,
e) ein System geometrischer Begriffe bilden,
f) ästhetische Momente der Geometrie erfahren.

2. Das POB im GU: Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe.

3. Zentrale Ideen in der Geometrie:
a) Homogenität (Ununterscheidbarkeit), insbesondere Symmetrie,
b) Exhaustion, insbesondere Approximation und Modellbildung,
c) (partiell) starrer Körper (Kongruenz),
d) Passen zwecks (1) eingeschränkter Beweglichkeit, (2) Optimierung, (3) Messen (Kongruenz).

4. Einige Prinzipien für den GU:
a) Ständiger Wirklichkeitsbezug (mit Zweck-, Funktionsanalysen und Herstellvorschriften),
b) integrative Organisation mit MU und anderen Fächern, auch als Projektunterricht,
c) Realisierung geometrischer Ideen durch Modelle,
d) Betonung der dreidimensionalen Natur des Raums,
e) Einsatz der kinematischen Anschauung (mit diskreter oder kontinuierlicher Folge von Zuständen),
f) Behandlung vor allem künstlicher Formen aus dem mehr oder weniger technisierten Alltag,
g) Aufmerksamkeit auf die Güte von Herstellverfahren und Herstellungen (im weitesten Sinn),
h) Rechtfertigung von Axiomen.

5. Verwendete Abkürzungen
GS geometrische Sachverhalte (Formen, räumliche Beziehungen usw.),
GU Geometrieunterricht,
MU Mathematikunterricht,
OAG Operative Anfänge der Geometrie,
OB operative Begriffsbildung,
POB Prinzip der operativen Begriffsbildung.

Literatur

Bender, P. und *Schreiber, A.*: (OAG) Operative Anfänge der Geometrie. In Vorbereitung.
Dingler, H.: Die Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: 1933.
Engel, A.: Geometrical activities for the upper elementary school. Ed. Stud. in Math. 3, 353–394 (1971).
Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 5 (EdEM 5). Moskau 1966, Dt. Übers. Berlin: 1971.
Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2. Stuttgart: 1973.
Freudenthal, H.: Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe. MU 23, Heft 5, 46–73 (1977).
Gardner, M.: Das gespiegelte Universum. New York 1964, Dt. Übers. Braunschweig: 1967.
Gööck, R.: Selbermachen. München 1971, 5. Aufl. 1975.
Graumann, G.: Praxisorientierter Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, 98–101. Hannover: 1977.
Holland, G.: Strategien zur Bildung geometrischer Begriffe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, 59–68. Hannover: 1975.
Kordemski, B.A.: Köpfchen, Köpfchen. Moskau 1959. Dt. Übers. Leipzig: 1965.
Lietzmann, W.: Experimentelle Geometrie. Stuttgart: 1959.
Menninger, K.: Mathematik in deiner Welt. Göttingen 1954, 2. Aufl. 1958.
Moulton, J.P.: Some geometry experiences for elementary school children. Arithm. Teacher 21, 114–116 (1974).
Müller, G. und *Wittmann, E.*: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: 1977.
OAG. Siehe *Bender/Schreiber*
Ogilvy, C.S.: Mathematische Leckerbissen. New York 1962, Dt. Übers. Braunschweig: 1969.
Perelman, J.I.: Unterhaltsame Geometrie. Dt. Übers. Berlin: 1954.
Schreiber, A.: Idealisierungsprozesse – ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion. Im Erscheinen, 1978a.
Schreiber, A.: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. MU 24 (1978b, in diesem Heft)
Stowasser, R.: Problemorientierte Zugänge zur Geometrie. In: Schriftenreihe des IDM, Band 3, 65–130. Bielefeld: 1974.
Stückrath, F.: Kind und Raum. München: 1955.
Stührmann, H.-J. und *Wessels, B.*: Lehrerhandbuch für den technischen Werkunterricht, Band 1. Weinheim 1970, 2. Aufl. 1972.
Thompson, D'A.W.: Growth and Form. Cambridge: 1942
Vollrath, H.-J.: Geometrie im Mathematikunterricht – eine Analyse neuerer Entwicklungen. In: Schriftenreihe des IDM, Band 3, 1–22. Bielefeld: 1974.
van der Waerden, B.L.: Einfall und Überlegung. Basel 1954, 3. Aufl. 1973.
Weyl, H.: Symmetrie. Princeton 1952, Dt. Übers. Basel: 1955.
Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen: 1972.
Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. ZDM 7, 106–116 (1975).
Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. SMG 7, 337–353 (1976).
Winter, H.: Geometrie vom Hebelgesetz aus – ein Beispiel zur Integration von Physik- und Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. MU 24 (1978, in diesem Heft).
Winter, H. und *Ziegler, T.*: Neue Mathematik, Band 8. Hannover: 1972.
Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: 1974, 5. Aufl. 1978.

Dr. Peter Bender, Wilhelm-Leuschner-Str. 8, 6520 Worms