In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1979. Hannover: Schroedel, 56-59

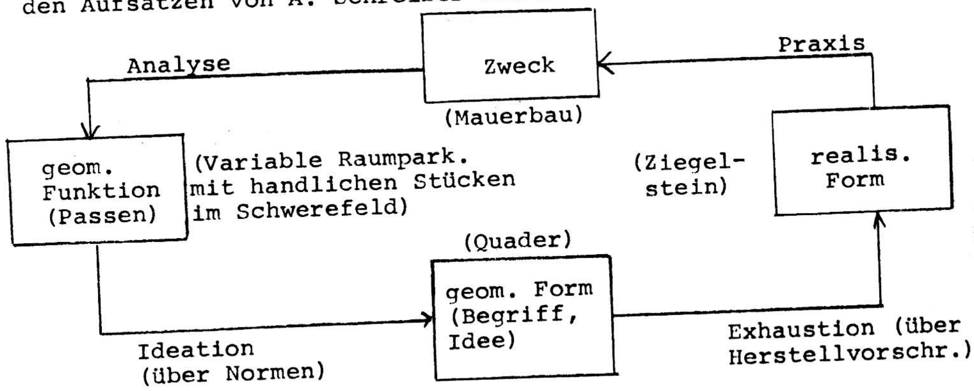
Peter BENDER, Neuss

Operative Begriffsbildung in der Praxis des Geometrieunterrichts

Geometrie des Fußballs

Es wird die U-Einheit 'Geometrie des Fußballs' vorgestellt als ein Beispiel für die Anwendung des Prinzips der operativen Begriffsbildung (POB).

I. Das POB (ausführlicher und mit weiteren Literaturangaben in den Aufsätzen von A. Schreiber und mir in MU 5/78)



(Operative Begriffsbildung, am Beispiel des Quaders)

Modifikationen für den Unterricht:
- Probleme praktisch lösen, aber auch diskutieren,
- an Vorerfahrungen anknüpfen, d. h. häufig: bei 'Praxis' anfangen,
- Modelle mit bereits geometrisiertem Material bauen,
- für einen Begriff das Schema mehrfach durchlaufen und ihn in ein Begriffssystem einbetten bzw. ein solches bilden,
- das POB dem ganzen Geometrieunterricht und nicht nur singulären Sequenzen unterlegen.

II. Die U-Einheit (ausführlicher vorauss. im Aug. 1979 in Educational Studies 10 (1979), Heft 3, zusammen mit A. Schreiber)

Gesamtaufwand: 8 Stunden, zuzüglich Hausaufgaben und Abschlußtest.
Arbeitsmaterial: Papier, Bleistifte, Pappe, Scheren, Klebstoff, Schablonen von Polygonen, Lineale, Winkelmesser, Taschenrechner,

Arbeitsblätter mit Definitionen, Ergebnissen oder Aufgaben, Drucke aller ebenen Archimedischen Parkette (AP), Baupläne der Platonischen Körper, Abbildungen aller Archimedischen Körper (AK), Overheadprojektor mit Folien vom ganzen Schülermaterial, Wandtafel und nicht zuletzt zahlreiche 'Bälle' (und ähnliche Körper).

<u>Verlauf</u>: 1. Zweckanalyse der Fußballoberfläche (1/2 Stunde)
- leichte, elastische, strapazierfähige, möglichst 'gute' Kugel,
- luftgefüllte Gummiblase mit einer Lederdecke,
- da ein flaches Stück nicht (isometrisch) zu einer Kugel gebogen werden kann, wird die Decke aus kleinen Stücken zusammengenäht nach folgenden Kriterien:
- Strapazierfähigkeit: kurze, gerade, wenige Nähte, höchstens 3 in einer Ecke, konvexe Lederstücke (also Polygone), die nicht zu groß (wegen des Luftdrucks) und nicht zu klein sein dürfen (um die Zahl der Nähte klein zu halten),
- Symmetrie: regelmäßige Polygone, gleiche Eckenkränze,
- Rundheit: nicht zu große Polygone, insbesondere alle etwa gleich groß, d. h. mit etwa gleicher Eckenzahl.

2. Ebene Parkette (4 Stunden)
- von Parketten der Umwelt ausgehen (mit kurzen Zweckanalysen),
- beschreiben, legen und zeichnen,
- beweisen, daß Ebene mit beliebigen Drei- und Vierecken, aber i. a. nicht mit n-Ecken mit größerer Eckenzahl parkettiert werden kann,
- Winkel der regelmäßigen Polygone ermitteln:

n(-Eck)	3	4	5	...
Summe	180	360	540	...
Winkel	60	90	108	

- Definition des AP (und AK): Nur regelmäßige Polygone, alle von gleicher Kantenlänge, Ecke auf Ecke, alle Eckenkränze gleich,
- Symbole für AP (und AK): z. B. $\begin{smallmatrix} 3 & 3 & \\ & & 4 \\ 4 & 3 & \end{smallmatrix}$ für (3 3 4 3 4),
- alle AP finden (siehe Stowasser, MU 3/76) in Gruppenarbeit auf mehrere Gruppen verteilt (dabei zum Verifizieren jeweils nicht nur einen Eckenkranz, sondern darum herum noch einen kompletten Kranz aus Polygonen legen).

3. Archimedische Körper
- Lücken in ebenen Eckenkränzen durch Hochklappen schließen, zunächst mit nur einer Sorte von Polygonen, die Platonischen Körper bauen: $\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \end{smallmatrix}$ usw. (1 1/2 Stunden),

- Zusammenhang zwischen Größe der Lücke und Approximation an die Kugel feststellen, dabei beachten, daß (Anti-)Prismen Ausnahmen sind, einige AK teilweise bauen in Teamarbeit (1 Stunde),
- diskutieren, daß alle AK wie die AP zu finden sind (vgl. auch Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. 4), und anhand der Abbildungen Beziehungen der Körper untereinander herstellen und feststellen, daß (5 6 6) die Kriterien für den Fußball am besten erfüllt (1/2 Stunde),
- AK aus der Umwelt nennen und die Formen begründen (1/2 Stunde).

4. Test (Auf den Abdruck wird zugunsten von IV verzichtet.)

III. Didaktischer Kommentar

1. Alle Komponenten der operativen Begriffsbildung kommen zum Tragen, rein zeitlich mehr der Übergang zu 'Begriff' (vgl. I).
2. Wesentlich ist der Gedanke der Approximation (an die Kugel), die Ununterscheidbarkeit von Stellen (gleiche Eckenkränze) und das Passen. Hier liegt ein Beispiel für diskrete Mathematik vor, die in der Schule wohl zu selten getrieben wird.
3. Lernziele (Liste unabhängig von einer Hierarchie):
- inhaltliche (geometrisch, topologisch, kombinatorisch, arithmetisch),
- allgemeine geometriespezifische (die Einheit ist an dem in MU 5/78 entwickelten Lernzielkatalog ausgerichtet),
- allgemeine mathematikunterrichtliche:
  a) Argumentationsfähigkeit (bei der Analyse des Zwecks und der Funktion der Oberflächenstruktur des Fußballs, beim Suchen aller AP und AK und an vielen anderen Stellen des U),
  b) Umwelterschließung (hier die räumliche Umwelt),
  c) intellektuelle Techniken: Klassifizieren, Analogisieren, Formalisieren,
  d) affektive: z. B. Befriedigung über den vollständigen Überblick über ein komplettes, durchaus komplexes, mathematisches Gebiet.

4. Voraussetzungen: Grundschulgeometrie, Polygone, Winkel. Geeignet etwa ab dem 6. Schuljahr.

5. **Fortsetzungsmöglichkeiten:**
- das Papierbiegen auf das Falten zurückführen und die Frage klären, warum Faltlinien Geraden sind, und daraus Rückschlüsse auf das Biegen ziehen,
- Gruppen, insbesondere Symmetriegruppen,
- topologische Betrachtungen, etwa über die Eulercharakteristik,
- Trigonometrie, z. B. Neigungswinkel berechnen,
- andere Polyeder, z. B. Deltoide oder nicht-konvexe,
- die AK ausführlicher, etwa: engeres Beziehungsnetz knüpfen, Symmetrien stärker einbeziehen, die dualen Körper behandeln.

IV. Diskussion nach dem Vortrag (knappe Wiedergabe)

1. Einwand: Das POB hätte diesen Unterricht nicht getragen; die Zweckanalysen u.ä. seien nur ein Aufhänger gewesen, um dann doch übliche Polyedertheorie zu treiben. - Antwort: Das Umgekehrte trifft zu: Polyeder'theorie' (tatsächlich als Polyeder-'praxis') wurde getrieben, um zu zeigen, wie der operative Ansatz vom vormathematischen in den mathematischen Bereich trägt (genetische Erarbeitung des Begriffs 'Archimedischer Körper' durch operative Begriffsbildung). Dieser Ansatz hat die ganze Einheit getragen (Hinweis: III.1 und I., Modifikation 5).
2. E: Die Form könne nicht aus dem Zweck logisch deduziert werden. - A: Das stimmt. Der Eindruck, die Ableitung der Form aus dem Zweck sei zwingend, sollte auch nicht erweckt werden. Fast jeder Zweck kann mit verschiedenen Formen gut erfüllt werden. Wenn man mehrere Formen hat, so kann allerdings nach einer Gewichtung der Kriterien entschieden werden, welche der Formen für diese Gewichtung die beste ist. Als Kriterien sind in der Praxis häufig auch ökonomische wichtig.
3. E: Das Wort 'operativ' solle durch ein anderes ersetzt werden. - A: Der auf Piagets Gruppierungsbegriff beruhende, in der Didaktik üblicherweise verwendete Begriff ist eine Sonderform eines allgemeineren Konzepts von Operativität (siehe z.B. Wittmann: Grundfragen ... 1978[5], S. 75) Wenn man sich sämtliche Bestandteile unseres Schemas verdeutlicht, so lassen sich Mißverständnisse vermeiden, die durch die Namensgleichheit eventuell auftauchen könnten.
4. Archimedische Körper können auch mit 'Knüpferli' gebaut werden.