

LITERATUR

1. H. BEHR, Eine endliche Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp_4(\mathbb{Z})$, *Math. Z.* **141** (1975), 47-56.
2. P. BENDER, Eine endliche Präsentation der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades, Unveröffentlichte Dissertation, Mainz, 1976.
3. H. KLINGEN, Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen. *Math. Ann.* **144** (1961), 64-72.

Eine Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp(4, \mathbb{Z})$ mit
2 Erzeugenden und 8 definierenden Relationen

PETER BENDER

RWTH Aachen, Aachen, Germany

Communicated by B. Huppert

Received October 16, 1978

In [3] wurde das Problem der expliziten endlichen Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp(2n, \mathbb{Z})$ auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt, in [1] wurde die $Sp(4, \mathbb{Z})$ mit 6 Erzeugenden und 18 definierenden Relationen präsentiert, in [2] mit Hilfe geometrischer Methoden eine Präsentation mit 4 Erzeugenden und 12 definierenden Relationen angegeben und außerdem festgestellt, daß im Behrschen System bereits 4 Erzeugende und 15 Relationen zur Präsentation reichen. Es gilt sogar der

SATZ. Die symplektische Gruppe $Sp(4, \mathbb{Z})$ wird erzeugt von den 2 Elementen

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und durch folgende 8 Relationen definiert:

- (a) $K^2 = I$, *
- (b) $L^{12} = I$,
- (c) $(KL^7KL^5K)L = L(KL^5KL^7K)$,
- (d) $(L^3KL^4)(KL^5KL^7K) = (KL^5KL^7K)(L^3KL^4)$,
- (e) $(L^3KL^3)(KL^5KL^7K) = (KL^5KL^7K)(L^3KL^3)$,
- (f) $(L^2(KL^5KL^7K))^2 = ((KL^5KL^7K)L^2)^2$,
- (g) $L(L^6(KL^5KL^7K))^2 = (L^6(KL^5KL^7K))^2L$,
- (h) $(KL^5)^5 = (L^6(KL^5KL^7K))^2$.

Beweis. Es wird die Abkürzung $KL^5KL^7K =: H$ verwendet (es ist $H^2 = I$); für L^m ($m \in \mathbb{N}$) wird m geschrieben; Buchstaben über einem Gleichheitszeichen geben an, auf Grund welcher Relation die Gleichung richtig ist (die Relationen (a) und (b) werden nicht extra aufgeführt); häufig wird auf der linken Seite einer

Gleichung das Wort unterstrichen, das durch die Relation verändert wird, und auf der rechten Seite das neue Wort in Klammern gesetzt.

Das Behrsche Erzeugendensystem wird von K und L erzeugt (Bezeichnungen aus [1]):

$$\begin{aligned} x_\alpha &= 5K1, & x_\beta &= 9H10H, & x_{\alpha+\beta} &= 8K10, \\ x_{2\alpha+\beta} &= H9H10, & v_\alpha &= H6, & v_\beta &= 9H6H. \end{aligned}$$

Die Relationen (a)–(l) erzeugen folgende Relationen:

- (i) $(HK)^3 = K5K7K5K7K5K7 \stackrel{e}{=} H(6H6) \stackrel{e}{=} \underline{6H6H} \stackrel{e}{=} (KH)^3;$
 $(H6)^2 = (6H)^2 = (HK)^3 = (KH)^3$ liegt im Zentrum, denn es kommutiert nach (g) mit L und außerdem mit K : $(HK)^3 K = (KH)^3 K = K(HK)^3.$
- (j) $(3H)^2 = \underline{3H(K12K)} \underline{3H} \stackrel{e}{=} (3K5K4)(H3K3) \stackrel{e}{=} \underline{3K(3H2K7)} K3 \stackrel{e}{=} (H3)^2,$
- (k) $(9H10H)(8K10) \stackrel{e}{=} \underline{9H(6K10H)} \stackrel{e}{=} (8K7K5K7) K10H = (8K10)(9H10H),$
- (l) $(9H10H)K \stackrel{e}{=} (7H10H2)K \stackrel{e}{=} \underline{7H10(2K4H8)} = \underline{7(K5K11)} H8 \stackrel{e}{=} (K1H10) H8 \stackrel{e}{=} K(9H10H),$
- (m) $(HKH)(H6H) = (K5K7) 6H \stackrel{e}{=} \underline{K5K(K7K5K1)} = 5K1,$
- (n) $K(H9H10) = KH9H(8K12K2) \stackrel{e}{=} \underline{5K7K(5K10H2)} K2 \stackrel{e}{=} (6H9)H2 K2 \stackrel{e}{=} (H9H3HH5) K2 = H9H3H(KH(HK)^3 7) \stackrel{H^2}{=} H9H3HKH((K5)^5 7) = H9H3H(10(K5)^3 7) = H9H3H10(K5K5K) = H9H3H10(HK10)K \stackrel{e}{=} (H9H(7H10H8) K10)K.$

Die Relationen (a)–(n) erzeugen die Relationen im Behrschen System:

- (1) $x_\alpha x_\beta x_\alpha^{-1} x_\beta^{-1} = (5K1)(9H10H)(11K7)(H2H3) \stackrel{H^2}{=} (HKHH6H) 9H10H(H6HHKH) H2H3 \stackrel{H^2}{=} \underline{HKH(9H10) K2H3} \stackrel{H^2}{=} \underline{(9H7H10H8K10) 2H3} \stackrel{H^2}{=} (8K10)(9H7H10H) 2H3 \stackrel{e}{=} (8K10) 9H(9H1) \stackrel{e}{=} (8K10)(H9H10) = x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta}.$

- (2) $x_\alpha x_{\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} = (5K1)(8K10)(11K7)(2K4) \stackrel{H^2}{=} (HK6H) 8K10(H6KH) 2K4 \stackrel{e}{=} HK(2K4) KH2K4 = H(2H3HKH9H10)^2 K2K4KH2K4 \stackrel{H^2}{=} H(2H3H(H9H7H10H8K10K))^2 K2K4KH2K4 = H(9H10H8K10K9H10H) KH2K4 \stackrel{H^2}{=} (H9H10)^2 = x_{2\alpha+\beta}^2.$
- (3) $x_\alpha x_{2\alpha+\beta} x_\alpha^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (5K1)(H9H10)(11K7)(2H3H) \stackrel{e}{=} 5K1H9H(H9K9) 3H = 5K1H(11K7K) \stackrel{e}{=} 5K(K7K5K)K7K = I.$
- (4) $x_\beta x_{\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta}^{-1} \stackrel{e}{=} I.$
- (5) $x_\beta x_{2\alpha+\beta} x_\beta^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (9H10H)(H9H10)(H2H3)(2H3H) \stackrel{e}{=} 9H(9H3) H3H \stackrel{e}{=} I.$
- (6) $x_{\alpha+\beta} x_{2\alpha+\beta} x_{\alpha+\beta}^{-1} x_{2\alpha+\beta}^{-1} = (8K10)(H9H10)(2K4)(2H3H) \stackrel{H^2}{=} I.$
- (7) $v_\alpha v_\beta v_\alpha v_\beta = (H6)(9H6H)(9H6H)(H6) \stackrel{e}{=} 6 \stackrel{e}{=} v_\beta v_\alpha^2.$
- (8) $v_\beta v_\alpha v_\beta v_\alpha \stackrel{e}{=} v_\alpha^2.$
- (9) $(v_\alpha v_\beta)^2 = ((H6)(9H6H))^2 = H3H9H6H \stackrel{e}{=} (9H)^2 = (v_\beta v_\alpha)^2.$
- (10) $v_\beta^4 \stackrel{e}{=} I.$
- (11) $v_\alpha x_\beta v_\alpha^{-1} = (H6)(9H10H)(6H) \stackrel{e}{=} H9H10 = x_{2\alpha+\beta}.$
- (12) $v_\alpha x_{2\alpha+\beta} v_\alpha^{-1} = (H6)(H9H10)(6H) \stackrel{e}{=} 9H10H = x_\beta.$
- (13) $v_\alpha x_{\alpha+\beta} v_\alpha^{-1} = (H6)(8K10)(6H) \stackrel{e}{=} 2K4 = x_{\alpha+\beta}^{-1}.$
- (14) $v_\beta x_\alpha v_\beta^{-1} = (9H6H)(5K1)(H6H3) \stackrel{e}{=} 8K10 = x_{\alpha+\beta}.$
- (15) $v_\beta x_{\alpha+\beta} v_\beta^{-1} = (9H6H)(8K10)(H6H3) \stackrel{e}{=} 11K7 = x_\alpha^{-1}.$
- (16) $v_\beta x_{2\alpha+\beta} v_\beta^{-1} = (9H6H)(H9H10)(H6H3) \stackrel{H^2}{=} H9H10 = x_{2\alpha+\beta}.$
- (17) $v_\alpha x_\alpha v_\alpha^{-1} = (H6)(5K1)(6H) \stackrel{e}{=} (11K7K5K) K7K5K7K = 6K = 11K7K5K7K \stackrel{e}{=} (11K7)(6H)(11K7) = x_\alpha^{-1} v_\alpha^{-1} x_\alpha^{-1}.$
- (18) $v_\beta x_\beta v_\beta^{-1} = (9H6H)(9H10H)(H6H3) \stackrel{H^2}{=} (H10) H9 \stackrel{e}{=} H8H6H2H3 \stackrel{e}{=} (H2H3)(H6H3)(H2H3) = x_\beta^{-1} v_\beta^{-1} x_\beta^{-1}.$