MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SEMESTERBERICHTE

Herausgegeben von H. Behnke † / K. P. Grotemeyer in Bielefeld / D. Kahle in Göttingen / A. Kirsch in Kassel / N. Knoche in Essen / W. Kroebel in Kiel / L. Mollwo in Erlangen / D. Morgenstern in Hannover / G. Pickert in Gießen / H. A. Ristau in Hamburg / H.-G. Steiner in Bielefeld / H. Tietz in Hannover

Diese Blätter sollen im Bereich der Mathematik und Physik eine kulturelle Aufgabe erfüllen, indem sie einerseits zur wissenschaftlichen Weiterbildung von Fachleuten beitragen und sich andrerseits den grundlegenden Fragen des mathematischen und physikalischen Unterrichts an Schule und Universität widmen.

*

Ein Jahrgang umfaßt 2 Hefte, die jeweils etwa zum Semesterbeginn erscheinen. Abonnementspreis für einen Jahrgang 44,— DM, Einzelpreis dieses Heftes 26,— DM (Preise einschl. 6,5% MwSt.). Für persönliche Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Studenten und nicht festangestellte Lehrkräfte 20% Ermäßigung (nur bei Direktbezug über den Verlag). Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen. Abbestellungen können nur berücksichtigt werden, wenn sie innerhalb 4 Wochen nach Ausgabe des Schlußheftes eines Bandes beim Verlag vorliegen.

Manuskripte sind in Maschinenschrift an die Geschäftsführung zu senden. Es wird gebeten, die Arbeiten satzfertig abzuliefern. Alle größeren Korrekturen, die auf Wunsch des Autors nachträglich vorzunehmen sind, müssen zu seinen Lasten gerechnet werden. Von den veröffentlichten Aufsätzen werden den Autoren 40 Sonderdrucke kostenlos geliefert, weitere Sonderdrucke nach Vereinbarung mit dem Verlag.

Geschäftsführung: Prof. Dr. Norbert Knoche, Universität Essen — Gesamthochschule —, Fachbereich Mathematik, 43 Essen, Unionstr. 2

Vertretung: Prof. Dr. Dieter Kahle, Pädagogische Hochschule, 34 Göttingen, Waldweg 26

Anschriften der anderen Redaktionsmitglieder: Oberstudiendirektor Dr. Hermann Athen, 22 Elmshorn, Besenheide 16 / Prof. Dr. Friedrich Becker, 8 München 81, Klingsporstr. 3/96 / Prof. Dr. Paul Buchner, Basel, Realpstr. 71 / Prof. Dr. Hubert Cremer, 7802 Merzhausen, Friedhofweg 11 / Prof. Dr. Helmuth Gericke, 8033 Planegg, Mathildenstr. 18d / Prof. Dr. Karl Peter Grotemeyer, 48 Bielefeld, Kurt-Schumacher-Str. 6 / Prof. Dr. Karl Hecht, 23 Kiel, Neue Universität, Haus 34 / Prof. Dr. Hans Hermes, 78 Freiburg i. Br., Herderstr. 10 / Prof. Dr. Arnold Kirsch, 35 Kassel-Harleshausen, Asternweg 12 / Prof. Dr. Adolf Kratzer, 44 Münster (Westf.), Sertürnerstr. 18 / Prof. Dr. W. Kroebel, 23 Kiel, Neue Universität, Haus 34 / Prof. Dr. Erich Mollwo, 852 Erlangen, Glückstr. 10 / Prof. Dr. Dietrich Morgenstern, Lehrstuhl f. Mathemat. Stochastik, Techn. Univ., 3 Hannover, Welfengarten 1 / Prof. Dr. Günter Pickert, 63 Gießen, Eichendorffring 39 / Oberschulrat Dr. Hans A. Ristau, 2 Hamburg-Fuhlsbüttel, Josthöhe 11 / Prof. Dr. H.-G. Steiner, Inst. f. Didaktik der Math., Univ. Bielefeld, 4800 Bielefeld 1, Universitätsstraße / Prof. Dr. Horst Tietz, Technische Universität, 3 Hannover, Welfengarten 1

ISSN: 0340-4897

Herstellung: Hubert & Co., Göttingen

27 (1980), 143 - 145

Eine Bemerkung zu Derivationen von Potenzreihen

Von PETER BENDER in Neuss

In [1] analysiert A. Schreiber die logische Abhängigkeit von Summen-, Produkt- und Kettenregel bei der Ableitung. Die Ergebnisse sind für Ringe von Polynomfunktionen (bzw. Körper rationaler Funktionen) auf einem Körper formuliert, sie gelten aber auch fast ohne Einschränkung für Ringe formaler Polynome und können dann zum Teil auf Ringe formaler Potenzreihen über kommutativen unitären Ringen ausgedehnt werden:

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, F der Ring der formalen Potenzreihen über R, $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in F$, $P \subseteq F$ der Unterring der Polynome, $':F \to F$ die gewöhnliche Ableitung; $D:F \to F$ schließlich sei eine Derivation, d.h. es erfülle folgende Bedingungen:

(1) $D(a+b) = D(a) + D(b) \quad (a,b \in F)$ (Summenregel)

(2) $D(ab) = D(a)b + aD(b) \quad (a,b \in F)$ (Produktregel) .

Nach [1] ist dann (sei vorübergehend $D = D|_P$)

(3) $D(a) = D(X)a' \quad (a \in P)$,

und für normierte Derivationen (d.h. $D(X) = 1$) ist

$$D(a) = a' \quad (a \in P),$$

die Ableitung ist also die einzige normierte Derivation auf P, d.h. aus Summen-, Produktregel und Normiertheit folgt bereits die Kettenregel der Ableitung auf P.

Darüber hinaus gilt folgender

<u>Satz</u>. *Für jede Derivation* D *auf* F, *die* P *in* P *abbildet, gibt es ein* c∈P, *so daß*

$$D(a) = ca' \quad (a \in F)\ .$$

Die Fortsetzung von Derivationen auf P auf solche auf F ist also eindeutig bestimmt. Ist D normiert, ist es die gewöhnliche Ableitung auf F; auch in F folgt aus Summen-, Produktregel und Normiertheit die Kettenregel, soweit die Hintereinanderausführung definiert ist.

<u>Beweis</u>. Setze $c = D(X)$ $(c = \sum_{k=o}^{\infty} c_k X^k \in P$ nach Voraussetzung).

Sei $a = \sum_{k=o}^{\infty} a_k X^k \in F$ und $D(a) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k X^k$. Zu zeigen ist

$D(a) = ca'$, d.h. $b_k = \sum_{j=o}^{k} (j+1) a_{j+1} c_{k-j}$ $(k \in \mathbb{N}_o)$.

Für alle $n \in \mathbb{N}_o$ gilt: Mit

$$a^{(n)} = \sum_{k=o}^{\infty} a_k^{(n)} X^k \quad (\text{mit } a_k^{(n)} = \begin{cases} a_k & \text{für } k \leq n+1 \\ o & \text{für } k > n+1 \end{cases} ;\ \text{also } a^{(n)} \in P)$$

ist $\sum_{k=o}^{\infty} b_k X^k - \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{k} (j+1) a_{j+1}^{(n)} c_{k-j} X^k = D(a) - ca^{(n)\prime} =$

(nach (3)) $D(a) - D(a^{(n)}) =$ (nach (1))

$D(a-a^{(n)}) = D(\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k X^k) = D(X^{n+2} \sum_{k=o}^{\infty} a_{k+n+2} X^k) =$ (nach (2))

$D(X^{n+2}) \sum_{k=o}^{\infty} a_{k+n+2} X^k + X^{n+2} D(\sum_{k=o}^{\infty} a_{k+n+2} X^k) =$

$(n+2) cX^{n+1} \sum_{k=o}^{\infty} a_{k+n+2} X^k + X^{n+2} D(\sum_{k=o}^{\infty} a_{k+n+2} X^k) =$

$X^{n+1} f$ für ein geeignetes $f \in F$.

Also wird $\sum_{k=o}^{\infty} (b_k - \sum_{j=o}^{k} (j+1) a_{j+1}^{(n)} c_{k-j}) X^k$ von X^{n+1} geteilt,

d.h. für $k=o,1,\dots,n$ ist $b_k = \sum_{j=o}^{k} (j+1) a_{j+1} c_{k-j}$.

<u>Literatur</u>

[1] SCHREIBER, A.: Zur algebraischen Analyse der Kettenregel. Math.Phys.Sem.Ber. XXV, S.79-96 (1978).

Eingegangen: 15. 2. 1978

<u>Mitarbeiter dieses Heftes</u>

BENDER,Peter,Dr., Pädagogische Hochschule Rheinland, Abteilung Neuss Humboldtstraße 2, 4040 Neuss.- HEILMANN, Wolf-Rüdiger, Dr., Universität Hamburg, Institut für Math. Stochastik, Bundesstraße 55,2000 Hamburg.- HEINE, J. und HENSEL, H., Technische Universität Hannover, Mathematisches Institut, Welfengarten 1, 3000 Hannover.- KIENLE, Lothar, Prof.Dr., Berufspädagogische Hochschule, Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, Flandernstraße 103, 7330 Esslingen.- MENNICKE,J., Prof.Dr., Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße 1, 4800 Bielefeld 1.- REICHEL, Hans-Christian,Dozent Dr.,Mathematisches Institut der Technischen Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.- REIMERS, Bernd, Altes Schulhaus, 2381 Selk.- TIETZ, Horst, Prof.Dr., Technische Universität Hannover, Mathematisches Institut, Welfengarten 1, 3000 Hannover.- TÖRNER, Günter,Dr.,Universität Duisburg, Fachbereich Mathematik, Lotharstraße 65, 4100 Duisburg.