Jedes Produkt natürlicher Zahlen läßt sich als

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad \text{(Regel 1)}$$

darstellen; lediglich bei verschiedener Parität von a und b sind $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ nichtganz und beider Quadrate um ¼ größer als deren ganzzahlige Approximation, die Differenz hebt diese Ungenauigkeiten wieder auf.
Die Milchmädchenrechnung wird beschrieben durch

$$a \cdot b = ((a\text{-}5) + (b\text{-}5)) \cdot 10 + (10\text{-}a) \cdot (10\text{-}b);$$

zum einen haben (a-5) + (b-5) und 10 denselben MW wie a und b, und zum anderen läßt sich (10-a)·(10-b) gemäß Regel 1 über

$$\left(10 - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

berechnen. Regel 2 (großes Einmaleins) besagt, wenn x, y Ziffern sind und 1y die Bedeutung 10 + y hat:

$$x \cdot 1y = (x+y) \cdot 10 + \left(10 - \frac{1y+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1y-x}{2}\right)^2$$

$$= (x+y) \cdot 10 + \left(10 - \frac{1y+x}{2} + \frac{1y-x}{2}\right) \cdot \left(10 - \frac{1y+x}{2} - \frac{1y-x}{2}\right)$$

$$= (x+y) \cdot 10 + (10-x) \cdot (-y)$$

Schließlich ist, wenn x, y Ziffern sind, Regel 3 (übergroßes Einmaleins) die oft beim Kopfrechnen verwendete Regel (wieder habe 1x und 1y die Bedeutung wie oben):

$$1x \cdot 1y = (1x+y) \cdot 10 + x \cdot y.$$

Literatur

[1] Denkschrift „Zum Mathematikunterricht an Gymnasien", Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Frühjahr 1976.
[2] *Engel, A.*: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt, Stuttgart 1977.
[3] *Schönwald, H. G.*: Beweise zur Milchmädchenrechnung, SMP 6 (1978), S. 134.

In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 8, 150-155, 191-198, 226-233 (1980)

Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres*), Teil 1

Von *Peter Bender* in Neuss

1. Zur Problematik des Sachrechnens

„Nun ist die Klage allgemein, daß unser gegenwärtiger Rechenunterricht (seine) Ziele in der Hauptsache nicht erreiche, vielleicht gar nicht erreichen könne. Als Beweis für diese Behauptung dient zunächst die von den verschiedensten Seiten bestätigte Erfahrung, daß junge Leute, die nur kurze Zeit dem Rechenunterricht der Volksschule entwachsen waren, in erschreckendem Maße versagten, wenn ihnen einfache Rechenaufgaben des praktischen Lebens vorgelegt wurden. Dazu kommt die andere Erfahrung, daß viele Schüler höherer Lehranstalten nicht imstande sind, die Aufgaben der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten zu lösen, obwohl sie in der Algebra Befriedigendes leisten. Endlich muß noch auf die weitere Tatsache hingewiesen werden, daß ein großer Teil unseres Volkes durch seine gesamte Wirtschaftsgebarung zeigt, daß er nicht rechnen kann."

Diese Übersicht *J. Kühnels* (1916/1959, S. 13) über den Erfolg des Rechenunterrichts in Deutschland kurz nach der Jahrhundertwende hat heute, jedenfalls nach Auffassung einiger ‚Berufener', nichts von ihrer Aktualität eingebüßt. Allerdings relativiert dieses Zitat auch die zeitgenössische Kritik, insbesondere wenn diese mit der Feststellung verbunden ist, früher sei alles besser gewesen.

Ein Kulminationspunkt des Mathematik-(Rechen-)unterrichts und der Mathematik-(Rechen-)didaktik seit eh und je ist das Sachrechnen, die „Anwendung von Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge vorwiegend unter numerischem Aspekt" (ein Definitionsvorschlag von *Strehl* (1979, S. 24)):
(Si) Die Fähigkeit (knapp formuliert) zum Sachrechnen ist ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts, das bis in den sechziger Jahren vor alle für die Volksschule galt (vgl. *Fettweis / Schlechtweg* (1929/1965), S. 11ff, S. 163ff), zeitweilig durch die Betonung strukturmathematischer Gesichtspunkte etwas ins Hintertreffen zu geraten schien, aber derzeitig im Zuge der Forderung nach Umwelterschließung im Mathematikunterricht (siehe *Winter* 1976) wieder einen deutlichen Aufschwung erlebt: *Wittmann* (1974/1978, S. 41) nennt, in Fortentwicklung des *Winter*schen Lernzielkatalogs *(Winter* 1972), „Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) mathematisieren" als erstes Lernziel des Mathematikunterrichts.
(Sii) Zugleich scheinen die Erfolge des Mathematikunterrichts gerade im Sachrechnen besonders unbefriedigend zu sein, schon zu *Kühnels* Zeiten (s. o.) und in jüngerer Zeit nicht weniger.
Sachrechnen und Umwelterschließung sind nun keineswegs dasselbe; das Sachrechnen beschränkt sich auf solche Aufgaben, in denen etwas zu rechnen ist, wobei ‚Rechnen' die kalkülhafte Anwendung der vier Grundrechenarten bedeutet. Jedoch macht eine Erweiterung des Sachrechnens um Sachaufgaben, in denen an Fertigkeiten auch andere als arithmetische ver-

langt werden, noch immer nicht Umwelterschließung aus. Die aus didaktisch-fachsystematischen Gründen vorgenommene Zerlegung der Umwelt in kleine Aufgabenportionen läuft dem Ziel der Umwelterschließung z. T. sogar zuwider, indem sie suggeriert, die Umwelt zerfalle in solche isolierte kleine Einzelbereiche. Bei *Damerow* u. a. (1974, S. 133ff) ist dies einer der entscheidenden Kritikpunkte am Sachrechnen überhaupt.

Für die „mageren Erfolge" des traditionellen Sachrechnens macht *Winter* (1976, S. 338f) folgende Mängel verantwortlich:

(Ti) Beschränkung auf solche Regelfälle des Lebens, die direkt mit den vier Grundrechenarten zu lösen sind,

(Tii) Organisation des Stoffs nach innerarithmetischen (und nicht sachbezogenen) Gesichtspunkten,

(Tiii) Überbetonung von Fragen des richtigen Anschriebs und der richtigen Sprechweise,

(Tiv) Vernachlässigung von Hilfsmitteln außerhalb des Textes, wie Skizzen, Tabellen usw.,

(Tv) Ablehnung mathematischer Methoden und Begriffsbildungen.

Dem stellt *Winter* (1977) das Konzept der „produktiven" (vs. „reproduktiven") Sachaufgabe gegenüber, das sich durch folgende Merkmale auszeichnet:

(Wi) Die Sachsituation wird nur angedeutet, der Blick auf ihre Totalität gelenkt; sie enthält einen Bezug zum Schüler.

(Wii) Ein Zusammenhang von Daten muß erst erarbeitet werden, die Daten u. U. noch beschafft werden.

(Wiii) Die mathematischen Aktivitäten stehen für die Schüler zunächst noch nicht fest.

Es gibt zahlreiche weitere Kriterien zur Klassifizierung und Beurteilung von Sachaufgaben, etwa „eingekleidet" vs. „angewandt" *(Kühnel* (1916/1959), S. 192ff), „realistisch" vs. „unrealistisch", „eingliedrig" vs. „mehrgliedrig" (Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen), „verbal" vs. „nichtverbal gegeben" (etwa durch eine Bildergeschichte), usw. (vgl. die Übersicht von *Weber* (1974)).

2. Der Test

Der Arbeitskreis „Mathematik in der Grundschule", ein lockerer Zusammenschluß interessierter Lehrer aus dem Regierungsbezirk Arnsberg in Nordrhein-Westfalen mit den Promotoren *Hendricks,* Schulbezirk Arnsberg, und *Winter,* PH Aachen, hat sich Anfang 1978 die schlichte Frage gestellt: *Was können unsere Kinder am Ende der Grundschulzeit im Sachrechnen?* Die stürmische Zeit der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule war schon seit einigen Jahren in eine Phase der Konsolidierung übergegangen, und der revidierte Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen (Richtlinien 1969/1973) war nun lange genug in Kraft. Mit der Absicht der Bestandsaufnahme war natürlich auch die Hoffnung verbunden, Anhaltspunkte für erforderliche (und mögliche) Verbesserungen des Mathematikunterrichts zu erhalten.

In dem erwähnten Lehrplan ist an verschiedenen Stellen auf das Sachrechnen Bezug genommen. Neben didaktischen Grundsätzen und allgemeinen methodischen Handreichungen sind folgende Ziele und Inhalte formuliert:

(Li) „Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten" (damit „er sich in Situationen nicht völlig hilflos (fühlt), in denen ein Routineverfahren nicht ohne weiteres hilft") (S. M/3).

(Lii) „Der Schüler soll lernen, Situationen zu mathematisieren: mathematische Information aus einer entsprechend einfachen Sachsituation ziehen...; Daten... übersichtlich darstellen...; sachbezogene Fragen verstehen oder selbst finden; die... Informationen... darstellen; Daten... weiter verarbeiten... die neu gewonnenen Daten auf die Sachsituation zurückbeziehen (z. B. die Lösung einer Sachaufgabe interpretieren)"; usw. (S. M/3).

(Liii) Es sollen die Größenbereiche ‚Währung', ‚Länge', ‚Zeit', ‚Gewicht' behandelt, sowie „Vorerfahrungen zu Flächeninhalten und Volumina" ermöglicht werden (S. M/7).

(Liv) „Von der 3. Klasse an sollen auch gebrochene Maßzahlen ... behutsam in Gebrauch genommen werden" (S. M/7).

Mit diesen Forderungen des Lehrplans ergab sich zugleich eine Strukturierung der Ausgangsfrage und eine Anleitung zur Testkonstruktion. Es wurde folgender Test entwickelt:

A1. Herr Adler hatte im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von 2000 DM. Im Dezember erhielt er zusätzlich ein halbes Monatsgehalt als Weihnachtsgeld. Wieviel DM verdiente Herr Adler im Jahre 1977?

A2. 10 l Kakao werden in kleine Flaschen von je $\frac{1}{4}$ l Inhalt gefüllt. Wie viele Flaschen werden voll?

A3. Ein Fernsehmonteur reparierte von 14.10 Uhr bis 17.40 Uhr ein Gerät. Er berechnete pro Arbeitsstunde 40 DM. Wie hoch war der Arbeitslohn für diese Reparatur?

A4. Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind 3 Mädchen mehr als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse?

A5. Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere fährt pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach $1\frac{1}{2}$ Stunden Fahrzeit voneinander entfernt?

B1. Wie oft schlägt ein Herz in einer Stunde, wenn es in einer Minute 72 Schläge macht?

B2. Der km-Zähler in einem Auto steht gerade auf 301090. Welche Zahl zeigte der km-Zähler direkt davor?

B3. Die Weihnachtsferien begannen am 23. 12. 1977. Das war der erste Ferientag. Sie endeten am 8. 1. 1978. Das war der letzte Ferientag. Wie lange dauerten die Weihnachtsferien?

B4. Ein rechteckiger Tisch ist 1 m lang und 0,70 m breit. Darauf liegt eine rechteckige Tischdecke. Die Tischdecke hängt an allen Seiten des Tisches 20 cm über. Wie lang ist der ganze Rand der Tischdecke?

B5. Ein Autohaus kauft bei einer Autofabrik 9 Wagen, die alle gleichviel kosten. Der Autohändler überweist für die 9 Wagen 108000 DM an die Autofabrik. Wieviel DM kostet ein Wagen?

Auch dieser Test, also die Bearbeitung der Fragen durch die Schüler, stellt Unterricht dar, in dem Lernziele verfolgt und Inhalte vermittelt werden, hier besonders die unter (Lii)—(Liv) notierten. Die Stunden für den Test sind zusammen mit dem ganzen Unterricht vorher und mit einer Nachbereitung zu sehen; der Test ist dabei eine Phase der Stillarbeit — eine Unterrichtssituation, die für die Schüler so ungewohnt nicht ist. Naturgemäß können bei dieser Unterrichtsform die im 1. Abschnitt angerissenen Aspekte nur ansatzweise verwirklicht werden. So kommt besonders das Lernziel ‚Kreativität' zu kurz. Aber die Allgemeinheit der Fragestellung, die Größe der Teilnehmerzahl (eine Folgerung aus der Fragestellung), die Kürze der Zeit für den Test (immerhin mußten zahlreiche Lehrer je zwei Stunden ihrer Unterrichtszeit zur Verfügung stellen) und die Erfordernis der ökonomischen Auswertbarkeit verboten es, den Schülern offene Probleme aus ihrer Umwelt zu stellen, für die sie Fragen selbst entwickeln, Daten beschaffen oder annehmen müssen, in Gruppen zusammenarbeiten können und Wochen Zeit haben. Außerdem muß ein solcher Test ja etwas mit dem Unterricht zu tun haben, dessen Erfolg er testen soll. So würde man mit nonverbalen oder fragelosen Darstellungen diejenigen Schüler benachteiligen, die solche Formen nicht gewohnt sind; und das sind bestimmt nicht wenige.

Oder: Zwar ist im Mathematikunterricht der Grundschule durchaus die Bearbeitung komplexerer Sachverhalte möglich, wie zahlreiche erprobte und unerprobte Vorschläge aus der Literatur bezeugen, aber im Schulalltag treten sie selten auf. Die Ursachen dieser Abstinenz liegen auf den verschiedensten Ebenen: Schulorganisation, Lerninhalte (immerhin wird das Rechnen je erst gelernt), Lehrer.

Die Fragen des Tests spiegeln auch die Auffassung des Arbeitskreises, bestehend aus erfahrenen Schulmännern, wieder, welche Eigenschaften eine Sachaufgabe überhaupt, und speziell für einen Test mit Kindern des 4. Schuljahres mit den unterschiedlichsten Lerngeschichten haben soll:
(Ai) Die vorgestellten Sachsituationen (und damit auch die jeweiligen Ergebnisse) sind realistisch (auch daß ein km-Zähler über 300000 km anzeigt!), insbesondere nicht antiquiert, sie entstammen der unmittelbaren Lebenswelt der Schüler und haben eine Bedeutung für die Schüler.
(Aii) Die Aufgaben sind möglichst eindeutig, vollständig und verständlich formuliert. Für den Schüler soll zweifelsfrei erkennbar sein, was von ihm verlangt wird und was gegeben ist (z. B. ist in einer Aufgabe klargestellt, mit welchem Tag genau die Weihnachtsferien beginnen). Trotz aller didaktischen Vorbehalte wird deshalb die Frage jedesmal mitgeliefert. Es sind immer genau so viele Daten vorgegeben, daß das jeweilige Problem eindeutig (und widerspruchsfrei) gelöst werden kann. Die Daten liegen fast immer explizit vor; die Schüler müssen lediglich wissen, daß die Stunde 60 Minuten, der Dezember 31 Tage und das Jahr 12 Monate hat. Der Text jeder Aufgabe besteht aus einfach gebauten Sätzen: Formulierungen und Wortwahl liegen auf umgangssprachlichem Niveau und sind zugleich sachangemessen. Es kommen keine überflüssigen (Zahlen-) Angaben vor (außer einmal die Jahreszahl 1977).
(Aiii) Der arithmetische Gehalt der Aufgaben ist bewußt niedrig gehalten. Bei keiner Aufgabe sind Operationen kompliziert zu verknüpfen. Die vorgegebenen Zahlen sind möglichst ‚einfach', d. h. vor allem: glatt, damit die Gefahr des Verrechnens möglichst gering bleibt. Schließlich sollen ja nicht in erster Linie die Arithmetikleistungen der Schüler getestet werden.
(Aiv) Gewisse, manchen Situationen eigentlich innewohnenden Komplikationen werden nicht thematisiert, um die Schüler nicht zu verwirren: in A2 der Unterschied zwischen Flaschenvolumen und Füllmenge; in A5 die Nichtkonstanz der Geschwindigkeiten; in B4 die Tatsache, daß die Tischdecke an den Ecken $20 \cdot \sqrt{2}$ cm überhängt. Diese (für das 4. Schuljahr als solche aufzufassenden) Spitzfindigkeiten werden mit Recht außer acht gelassen; ein einziger Schüler (von 1120) hat erkennbar auf die Vernachlässigung in B4 reagiert.

Im Hinblick auf eine Kontrolle der Lernziele (Li) und (Lii) (wie gut finden sich die Schüler in den Sachsituationen zurecht, und wie gut mathematisieren sie sie?) sind nicht alle möglichen Erleichterungen eingebaut: Etwa kommen keinerlei bildliche Darstellungen vor; die Reihenfolge der Daten im Text ist nicht die, in der sie bei der Rechnung abzuarbeiten sind; die Zahlenwerte sind so, daß die Ergebnisse kaum geraten oder durch unzulässige (Kurz-) Schlüsse gewonnen werden können; auch fehlen allzu suggestive Hinweise, etwa in A1: Herr Adler verdiente also im Januar 2000 DM, im Februar 2000 DM, ...; oder in B3: Der 23. 12. war also der 1. Ferientag, der 24. 12. der 2., ... Solche methodischen Hilfsmittel sind zwar nützlich auf dem Weg zur Sachrechenkompetenz, jedoch mit dem Ziel überflüssig zu werden. Im Test wird sozusagen festgestellt, wie weit dieses Ziel erreicht ist.

Die Inhalte der Sachaufgaben sind an dem Stoff aus (Liii) und (Liv) und an den Grundrechenarten ausgerichtet. (Dies ist ein Ansatzpunkt für die Kritik am mathematik- und nicht sachorientierten Sachrechnen — jedoch unvermeidbar von der Schulwirklichkeit und den Intentionen des Tests her.) Reine (auch mehrgliedrige) Additions- und Subtraktionsaufgaben mit sachrechenspezifisch allzu geringem Anspruch fehlen; es kommen je eine einfache Multiplikation und Division in den natürlichen Zahlen vor; außer bei der Ferientage-Zählaufgabe und dem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten handelt es sich beim Rest der Aufgaben um Kombinationen von höchstens zwei der vier Grundrechenarten, wobei Anforderungen an die Schüler vor allem durch kräftige Verwendung von (harmlosen) gebrochenen Zahlen und von Größen, besonders von Zeitpunkten und -spannen, entstehen. Insgesamt ist der formale Rechenanspruch nicht sehr hoch, bei Aufgabe B3 (Weihnachtsferien) tritt er sogar ganz zurück.

Neben dieser ist es die Aufgabe A2 (Kakaoflaschen) und vor allem B4 (Tischdecke), die nicht so leicht auf ein bekanntes Rechensche-

ma zurückgeführt werden können. Die wichtigen Bereiche Geometrie und Stochastik bleiben ausgeschlossen (lediglich B4 bringt einen Hauch Geometrie in den Test), weil man auch hier der Schulwirklichkeit Rechnung tragen muß und nicht davon ausgehen kann, daß alle Schüler in diesen Gebieten in genügendem Umfang Erfahrungen gemacht haben.
Im Sachrechentest von *Mitschka* (1971, S. 36ff) liegen die Schwerpunkte anders: Der arithmetischen Seite wird mehr, der Sachsituation weniger Bedeutung beigemessen; gebrochene Zahlen kommen nur als Kommazahlen bei DM-Beträgen vor, Zeiten nur als Anzahlen (volle Stunden, Tage, Monate); dafür ist aber die durchschnittliche Zahl der erforderlichen Operationen pro Aufgabe höher; einige Aufgaben sind pure Zahlenrätsel. Weitere Unterschiede sind: die äußeren Testbedingungen genügten bei *Mitschka* formalen Anforderungen besser; die Probanden waren Hauptschüler der 5. Klasse; als Arbeitszeit stand ihnen 60 Minuten zur Verfügung.
Dagegen richtet sich der vorliegende Test an Grundschüler im 4. Schuljahr. An Zeit wurde ihnen an zwei Tagen für je 5 Aufgaben (A1 - A5 bzw. B1 - B5) je 45 Minuten zur Verfügung gestellt. In einem Vortest, der noch zur Verbesserung einiger Formulierungen beitrug, ergab sich zwar, daß die Zeit sehr reichlich bemessen war; damit sich aber kein Schüler unter Zeitdruck fühlen brauchte, blieb es bei zweimal 45 Minuten. Im Test wurden bei einer Schulklasse, deren Ergebnis mit 52 % der erreichbaren Punkte durchschnittlich war, Zeitverbräuche festgestellt: 24 (= 77 %) von 31 Schülern hatten in beiden Tests zusammen weniger als 50 Minuten gebraucht.
Die Mitglieder des Arbeitskreises haben nun an ihren Schulen Kollegen mit 4. Schuljahren für die Durchführung des Tests geworben. In einem Anschreiben wurden diesen Kollegen die Ziele und die gedachte Durchführung des Tests dargestellt: Sie sollten keine erläuternden Kommentare zu den Aufgaben geben, sie sollten die Kinder auffordern, nicht nur die Antwort, sondern auch den Lösungsweg aufzuschreiben, und sie sollten das ,Abgucken' unterbinden. Es wurde ihnen anheimgestellt, den Test als Klassenarbeit zu werten. Damit sollten sie auch einen ,materiellen' Vorteil von dem Test haben; vor allem ging es aber darum, den Kollegen ein Mittel in die Hand zu geben, den Schüler nötigenfalls zu einer gewissen Ernsthaftigkeit bei der Bearbeitung zu verhelfen (auch hier zeigt sich Schulwirklichkeit!). Auf diese Weise ergab sich eine halb-zufällige Auswahl von 1120 Schülern aus 43 vierten Klassen von ländlichen, mittel- und großstädtischen Schulen des Regierungsbezirks Arnsberg (eine Klasse aus Neuss) mit unterschiedlichsten sozialen Schichtungen.
Noch ein Wort zur Stichhaltigkeit des Tests in statistischer Hinsicht: Für einen formal einwandfreien Test sind die Ziele des Tests zu allgemein (formuliert) und waren die Bedingungen der Probanden nicht homogen genug. In einigen Klassen wurde der Test als Klassenarbeit gewertet, in anderen nicht; in einigen wurde das Abgucken nicht genügend unterbunden, in anderen wohl; der Test war den Lehrern vorher bekannt, und einige Lehrer haben augenscheinlich ihre Schüler gezielt auf gewisse Aufgaben vorbereitet (pädagogisch sinnvoll, aber dem Test abträglich). Ungeachtet seines informellen Status kann der Test aber dennoch wertvoll für den Unterricht und die Didaktik des Sachrechnens sein, gibt er doch einen Überblick über die Leistung im Sachrechnen, jedenfalls soweit es durch die Aufgaben abgedeckt ist, und macht typische Fehler sichtbar — dies auch dadurch, daß infolge der großen Teilnehmerzahl manche Fehler sich überhaupt erst als typisch erweisen.

3. Analyse der Ergebnisse

3.1. Überblick

Im Juni 1978 wurde dieser Test in 43 Klassen an je zwei Tagen geschrieben. Es nahmen 1120 Schüler des 4. Schuljahres teil; dazu kommen 36 Schüler, die jeweils nur eine der beiden Hälften bearbeitet haben, die nicht in der Statistik, wohl aber bei der Ergebnisanalyse berücksichtigt sind. Die Klassenstärke, d. h. die Zahl derjenigen Schüler einer Klasse, die beide Testteile bearbeitet haben, schwankt zwischen 19 und 38, im Mittel beträgt sie 26 mit einer Standardabweichung von 4,3.
Die Lehrer bewerteten die Lösungen mit + (richtig), — (falsch) und o (nicht bearbeitet). Während der weiteren Auswertung habe ich von den insgesamt 11200 Bewertungen 131 von + in — und 51 von — in + geändert. Manchmal hatten einfach Übertragungsfehler vorgelegen; manchmal hatten Schülerantworten Teile enthalten, die der Lehrer übersehen hatte (z. B. der Teil ,und eine halbe' bei: „40 Flaschen und eine halbe werden voll."); in einigen Fällen habe ich die Bewertung vereinheitlicht (z. B. haben einige Lehrer die Antwort ,12.000 DM' in B5 (Preis eines Wagens) als falsch gewertet, besonders, wenn der Punkt zu sehr nach einem Strich aussah, andere haben sie als richtig gewertet, diesen habe ich mich angeschlossen); und schließlich gab es auch echte Auffassungsunterschiede: Bei B3 (Länge der Ferien) war in 2 Klasse auch ,16' als richtig bewertet worden. Die inhaltlichen Anforderungen an eine Lösung, damit sie als richtig anerkannt wurde, habe ich recht hoch gesetzt, z. B. wurde in B5 die Antwort ,1200 DM' als falsch gewertet, auch wenn bei der schriftlichen Ausrechnung sich der richtige Betrag ergeben hatte. Dagegen wurden keine besonderen formalen Ansprüche gestellt, z. B. führte es nicht zur Abwertung, wenn die Rechnung nicht in einwandfreier Notation aufgeschrieben war oder der Antwortsatz fehlte; es mußte lediglich irgendwie das Ergebniss kenntlich gemacht sein. In diesen Grundsätzen stimmten alle an der Bewertung Beteiligten überein. Natürlich wird man der individuellen Schülerleistung mit dem Richtig-Falsch-Raster und der weniger großzügigen Bewertung nicht gerecht. Aber um die individuelle Beurteilung geht es im Test nicht, und einige der Lehrer, die ihn für sich als Klassenarbeit gewertet haben, haben dieses Raster auch wesentlich verfeinert.
Gewisse Schwierigkeiten bereitete ab und zu die Frage, ob eine Aufgabe als bearbeitet anzusehen sei. Dies wurde von den Lehrern nach un-

terschiedlichen Prinzipien entschieden. Hat ein Schüler seinen Lösungsversuch ausradiert oder durchgestrichen, so müßte man seinen Willen berücksichtigen und die Aufgabe als nicht bearbeitet auffassen. Andererseits weiß man jedoch, daß die Aufgabe bearbeitet worden ist. Allerdings auch da, wo auf der zum Arbeiten vorgesehenen Fläche nichts steht, kann durchaus eine (möglicherweise schon sehr weitgehende) Bearbeitung im Kopf stattgefunden haben. Umgekehrt: So mancher Schüler läßt so manches auch ihm selbst falsch erscheinende Ergebnis stehen: ein anderer streicht im entsprechenden Fall seine ganze Rechnung. Hat letzterer die Aufgabe deswegen nicht bearbeitet? Schließlich habe ich genau die Aufgaben als nicht bearbeitet gewertet, bei denen keinerlei Ansatz von Bearbeitung (auch kein ausradierter oder gestrichener) zu erkennen ist. Allerdings kann man aus den entsprechenden Zahlen keinerlei Rückschlüsse auf die absolute Zahl der Kinder ziehen, die mit gewissen Aufgaben nichts anfangen konnten; es ergibt sich bestenfalls ein Bild, wie dabei die einzelnen Aufgaben im Verhältnis zueinander liegen.
Der Test hatte folgendes Ergebnis:

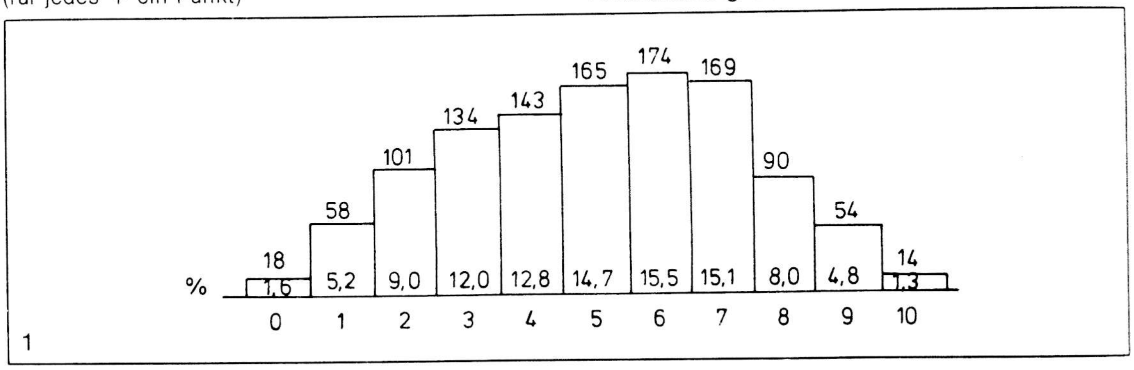
1120 Schüler	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	Ges.
+	607	552	558	773	357	903	743	179	56	904	5632
%	54	49	50	69	32	81	66	16	5	81	50
—	492	429	537	294	659	216	331	892	1008	195	5053
%	44	38	48	26	59	19	30	80	90	17	45
○	21	139	25	53	104	1	46	49	56	21	515
%	2	13	2	5	9	0	4	4	5	2	5
528 Mädchen											
+	261	221	225	372	126	426	340	76	11	415	2473
%	50	42	43	71	24	81	64	15	2	79	47
—	255	223	287	129	357	102	161	435	493	103	2545
%	48	42	54	24	68	19	31	82	93	19	48
○	12	84	16	27	45	0	27	17	24	10	262
%	2	16	3	5	8	0	5	3	5	2	5
534 Jungen											
+	301	302	299	361	199	427	365	86	29	443	2812
%	56	57	56	68	37	80	68	16	5	83	53
—	224	183	228	151	279	106	150	418	473	81	2293
%	42	34	43	28	52	20	28	78	89	15	43
○	9	49	7	22	56	1	19	30	32	10	235
%	2	9	1	4	11	0	4	6	6	2	4

Tab. 1: Gesamtergebnis des Tests
(Da auf den Bögen zweier Klassen nicht die (Vor-) Namen der Schüler angegeben waren, ist die Zahl der nach Geschlecht differenzierten Schüler kleiner als die Gesamtzahl.)

3.2. Zur Strukturierung der Analyse

In der Testauswertung sind naturgemäß vor allem die fehlerhaften Lösungen Gegenstand der Betrachtung, in einigen Fällen auch auffällige richtige Lösungen. Über Fehler beim Mathematiktreiben gibt es zwar ein umfangreiches Schrifttum, besonders aus Amerika; dies befaßt sich jedoch vor allem mit der Analyse von Fehlern numerischer Art, die wiederum bei dem vorliegenden Sachrechentest von sekundärem Interesse sind. Aus Deutschland sind aus neuerer Zeit vor allem *Schlaak* (1968) und *Mitschka* (1971) zu nennen. Für die didaktische Mit-Absicht eines Tests, nämlich Material für die Verbesserung des Unterrichts zu liefern, aber

Abb. 1: Verteilung der Punktzahlen auf die Schüler (für jedes + ein Punkt)



auch zum Zwecke der Bestandsaufnahme, reicht die Bekanntschaft mit den vorkommenden Fehler*techniken* und ihren Häufigkeiten allein nicht, vielmehr sind auch die Fehler*ursachen* aufzuspüren.
Bei der Suche nach solchen hat sich das Abarbeiten der einzelnen Phasen des Problemlöseprozesses nach allgemeinen Mustern als nicht sehr ergiebig erwiesen: Die Aufgaben des vorliegenden Tests sind fast alle so einfach strukturiert, daß z. B. Zielerfassung, Bedingungsanalyse, Handlungsplanerstellung und -verwirklichung (Zerlegung in Anlehnung an *Pippig* (1977)) oft fast simultan ablaufen und starke Wechselwirkungen aufeinander ausüben (das gehört ja gerade zu den oben angeschnittenen — hier unvermeidlichen — Schwächen vieler Sachaufgaben). *Radatz* schlägt ein Raster für mögliche Fehlerursachen vor (1977) und verfeinert einen Teil der Punkte wesentlich (1979):
(Ra) „Affektiv-situationsspezifische Fehlerursachen",
(Rb) „Mängel und Lücken im Beherrschen der vorauszusetzenden Fertigkeiten, Kenntnisse und Begriffe",
(Rc) „Fehler aufgrund der Anwendung unangemessener oder falscher Strategien und Regeln",
(Rd) in der „Informationaufnahme und Informationsverarbeitung" liegende Fehlerursachen,
(Rdi) „Fehlerursachen im Sprach- und Textverständnis der Schüler",
(Rdii) „Fehlerursachen in der Analyse von Veranschaulichungen oder Darstellungen im Mathematikcurriculum",
(Rdiii) „falsche Assoziationen und Einstellungen während des Informationsverarbeitungsprozesses als Fehlerursache",
(Rdiv) „Fehler aufgrund des Gebundenseins einer Begrifflichkeit an sehr einseitige Repräsentationen und Vorstellungen",
(Rdv) „relevante Bedingungen eines mathematischen Problems werden bewußt oder unbewußt nicht berücksichtigt",
(Rdvi) „Störungen des Kurzzeitgedächtnisses während des Problemlösungsprozesses",
(Rdvii) „nicht ausreichendes Reflektieren der Lösungshypothesen bzw. auch Versuch-Irrtum-Lösungsstrategie",
(Rdviii) „Nicht-Abschließen der Informationsverarbeitung bzw. unvollständiges Anwenden einer ‚Regel'".

Die einzelnen Fehlerursachen (-felder) lassen sich nicht immer klar voneinander trennen. Etwa ist (Ra) (Motivationsmangel, Konzentrationsschwäche, Beeinflussung durch Mitschüler) bei vielen Fehlern beteiligt, kann aber bei schriftlichen Leistungen nur in Ausnahmefällen nachträglich diagnostiziert werden (z. B. unpassende Korrekturen am Text, offenbar absichtliche Absurditäten oder Nichtbearbeiten geben Anlaß zum Suchen in (Ra)). (Rc) ist jedenfalls in den Fällen ein Unterpunkt von (Rb), in denen das Anwenden von richtigen Strategien oder Regeln zu den vorauszusetzenden Fertigkeiten, Kenntnissen und Begriffen (bei einer entsprechend weiten Fassung des jeweiligen Begriffs) gehört. Die Analyse von Ursachen aus (Rb) führt zu inhaltlichen Aspekten. Eine geringe Ausprägung von (Rb) dürfte sich auch günstig bezüglich (Rd) auswirken.

Jedoch läßt sich die Auswertung des Tests auch nicht an diesem Raster ausrichten. Von der Fragestellung und der Art des Tests her erscheint vielmehr eine Strukturierung entlang der Aufgaben und der Lösungen sinnvoller: Die jeweils relevanten Aspekte werden herausgestellt, je nach dem ein bemerkenswerter Weg zu einer Lösung, eine auffällige Fehlertechnik oder eine besondere Fehlerursache. Dafür wird dann das Raster herangezogen; und keinesfalls soll eine Einordnung in eine Taxonomie erfolgen.

Anmerkungen

(*) Herrn *Winter* gilt mein Dank für wertvolle Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Damerow, P./Elwitz, U./Keitel, C./Zimmer, J.: Elementarmathematik: Lernen für die Praxis? Stuttgart 1974.
Fettweis, E./Schlechtweg, H.: Didaktik und Methodik des Rechenunterrichts. 1929, 4. neubearb. Aufl. Paderborn 1965.
Kühnel, J.: Neubau des Rechenunterrichts. 1916, 10. Aufl. hrsgg. von *E. Koller*, Bad Heilbrunn (Obb.) 1959.
Mitschka, A.: Schülerleistungen im Rechnen zu Beginn der Hauptschule. Hannover 1971.
Pippig, G.: Psychologische Überlegungen zur Überwindung von Denkfehlern. In: Mathematik in der Schule 15, S. 26—28, 37—41 (1977).
Radatz, H.: Schülerfehler und ihre möglichen Ursachen im Mathematikunterricht. In: Westermanns Pädagogische Beiträge 29, S. 366—369 (1977).
Radatz, H.: Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht. Erscheint in: Journal für Mathematik-Didaktik (1979).
Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Kastellaun / Düsseldorf / Ratingen 1969, 2. Aufl. 1973.
Schlaak, G.: Fehler im Rechenunterricht. Hannover 1968.
Strehl, R.: Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg / Basel / Wien 1979.
Weber, H.: Problemlösen und Kreativität im Mathematikunterricht: Der Stand der mathematikdidaktischen Reflexion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1973, S. 274—282. Hannover 1974.
Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen 1972.
Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule *7*, S. 337—353 (1976).
Winter, H.: Kreatives Denken im Sachrechnen. In: Die Grundschule *9*, S. 106—110 (1977).
Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974, 5. Aufl. 1978.
Zitterbart, E.: Das Text- und Sachrechnen in der Grundschule. In: Lauter, J. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht in der Grundschule, S. 149—188. Donauwörth 1976, 2. Aufl. 1977.

(Fortsetzung folgt)

Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres, Teil 2

Von *Peter Bender* in Neuss

Teil 1 enthielt:

3.3. *Aufgabenspezifische Aspekte*

Im folgenden möchte ich nun die Aspekte diskutieren, die sich mehr auf einzelne Aufgaben oder Aufgabengruppen des Tests beziehen. Dabei gehe ich Aufgabe für Aufgabe durch, und zwar nach zunehmendem Schwierigkeitsgrad (der durch die Zahl der Fehllösungen definiert ist). Zuvor noch einige Erläuterungen: An zahlreichen Fehllösungen treten mehrere Fehlertechniken zugleich auf; je mehr Techniken beteiligt sind, desto seltener ist die Fehllösung und gehört dann nicht mehr zu den sogenannten ‚häufigsten'. Entsprechend können Fehlertechniken mehrere Ursachen beim selben Schüler und erst recht bei verschiedenen Schülern haben. Über diese Ursachen lassen sich nur Vermutungen von mehr oder weniger hohem Gewißheitsgrad äußern. Entsprechend sind meine Ausführungen zu verstehen. Oft nenne ich die mir am wahrscheinlichsten vorkommende Ursache oder schlage eine Alternative zu einer scheinbar auf der Hand liegenden (vor allem zu solchen aus (Ra)) vor, ohne diese zu explizieren. Insbesondere sind keine genaueren quantitativen Angaben über Fehlerursachen möglich. Tritt eine Fehlertechnik nur bei Schülern einer einzigen Klasse auf, so erwähne ich das. Die Prozentzahlen beziehen sich auf die Gesamtzahl aller Schüler (%S), auf die Zahl aller Lösungsversuche einer Aufgabe (einschließlich + und —, ohne o; %L), auf die Zahl der richtigen (%R) oder der falschen Lösungen (%F) einer Aufgabe (nicht auf die Zahl der Fehler, die i. a. wesentlich höher ist), oder der Bezug ist angegeben (%).

B5 Ein Autohaus kauft bei einer Autofabrik 9 Wagen, die alle gleichviel kosten. Der Autohändler überweist für die 9 Wagen 108000 DM an die Autofabrik. Wieviel DM kostet ein Wagen?

904 (= 81%S) +, 195 (= 17 %S) —, 21 (= 2%S) o

Verteilungsprozeß; Typ: Preis pro Stück bei gegebenem Gesamtpreis gesucht (Division). Zu verstehen, zu wissen, zu überlegen, zu rechnen ist:

(a) Bei einem Autohaus gibt es Autos (Wagen) zu kaufen. Das Autohaus seinerseits bezieht die Autos von der Autofabrik und muß sie dort bezahlen. (Sachwissen)

(b) Überweisen bedeutet bezahlen. (Kompetenz in der Umgangssprache und Sachwissen)

(c) 108000 DM ist der Gesamtpreis für die 9 Wagen. (Kompetenz in der Umgangssprache)

(d) Gesucht ist der Stückpreis (Preis für einen Wagen). (Zielerfassung)

(e) Dabei ist zu beachten, daß die Wagen „alle gleichviel kosten".

(f) Die 108000 DM sind gleichmäßig auf die 9 Wagen zu verteilen. (Übersetzung in mathematisches Wissen)

(g) Rechnen: 108000:9 (zwar einstelliger Divisor, aber Nullen beim Dividend am Ende und zwischen anderen Ziffern)

Tab. 2: Häufigste Fehllösungen bei B5

Lösung	1200	972000	13500	120	102(0)(0)(0)	112(0)(0)(0)	108000	13000
Vork.	38	8	7	7	7	5	3	3
%F	19	4	4	4	4	3	2	2

Die meisten Fehler sind übliche numerische Fehlertechniken, vor allem Schwierigkeiten beim Abzählen der Nullen, sowie

$$\begin{array}{l} 108000:9 = 112\ldots \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{\ 9}\quad \text{(Stellen)} \\ \ 18\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} 108000:9 = 13\ldots \\ \underline{\ 9} \\ \ 18\ldots \text{ (Einmaleins)} \end{array}$$

und zahlreiche weitere typische Fehler beim schriftlichen Dividieren. ‚13500' entsteht aus der Division durch 8 (Perseveration der 8 aus 108000?); die Ziffernfolge 102 aus den verschiedensten Fehlertechniken.

Insgesamt 12 (= 6%F) Schüler führen eine Multiplikation (9·108000 = 972000) durch. Sie interpretieren offenbar die Wendung ‚für die 9 Wagen 108000 DM' als ‚für die 9 Wagen je 108000 DM'. Ob sie die Frage gar nicht mehr richtig aufnehmen oder sie bewußt oder unbewußt umdeuten — ihr Verständnis der Aufgabenstellung ist jedenfalls für sie ein Signal für eine Multiplikation (irgendwie muß ja die 9 berücksichtigt werden). Die meisten von diesen antworten mit: „Ein Wagen kostet 972000 DM" und übernehmen damit formelhaft den Fragesatz. Hier liegt einer der typischen Fehler im Sachrechnen in seiner einfachsten Form vor. Zwei Zahlen nach einem scheinbar passenden Rechenschema verknüpft, das der Sachsituation nicht entspricht. Die Schüler mit der Lösung ‚108000' sind wohl demselben Mißverständnis über den Preis eines Wagens unterlegen, sind aber mit mehr Sinn vorgegangen und haben dabei die Zahlenangabe 9 als unbeachtlich betrachtet. Besonders die Schüler, deren Lösung um Zehnerpotenzen zu klein ist (1200, 120, 1020 usw.), erweisen sich als unkritisch gegenüber ihrem absurden Ergebnis (für 1200 DM erhält man kaum noch einen ordentlichen Gebrauchtwagen). Dies ist eine Folge der Lebensferne des Mathematikunterrichts.

3 Schüler haben mit 99 statt mit 9 gerechnet. Hierfür ist wohl das doppelte Vorkommen der 9 im Text ursächlich.

B1 Wie oft schlägt ein Herz in einer Stunde, wenn es in einer Minute 72 Schläge macht? 903 (=81%S) +, 216 (=19%S) —, 1 (=0%S) o

Vervielfältigungsprozeß; Typ: Gesamtwert gesucht bei gegebenen Wert pro Einheit und Anzahl der Einheiten. Zu verstehen, zu wissen, zu überlegen, zu rechnen ist:

(a) Das Phänomen des Herzschlags. (elementares Sachwissen)

(b) Für eine Zeitspanne (Minute; Einheit) ist die Zahl der Schläge angegeben. (ansatzweise Sachwissen: Herzschlag = Anzahl / Zeit)

(c) Für eine andere Zeitspanne (Stunde) ist die Zahl der Schläge gesucht. (Zielerfassung)

(d) Dabei ist vorausgesetzt, daß der Herzschlag konstant ist. (unproblematisch für die Schüler)

(e) 1 Stunde ist ein Vielfaches von 1 Minute, nämlich das 60-Fache. (Sachwissen)

(f) In der Stunde sind es 60mal so viel Schläge wie in der Minute. (Umdeutung der Minutenzahl in einen Vervielfacher für die Schlägezahl)

(g) Rechnen: 60·72

Lösung	540	432	1728	4220	4320/min	7320	4500	4320/min	1520
Vork.	31	30	24	14	13	9	8	6	6
%F	14	14	11	6	6	4	4	3	3

Lösung	5400	4392	5320	4380	5020	4520	4200	4752	42120
Vork.	5	5	4	4	4	3	3	3	3
%F	2	2	2	2	2	1	1	1	1

Tab. 3:
Häufigste Fehllösungen bei B1

Die meisten Fehler sind übliche numerische Fehlertechniken, z. B.

60·72	60·72	72·60	72·60	72·60	60·72	60·72	60·72	60·72	72·60
42120	120(0)	7320	4320	4320	4200	4900	4200	4200	120
	420(0)		72	432	180	120	120	120	1400
	540(0)	Persev.	4392	4752	4380	5020	4520	5320	1520
Stellen			Null falsch beh.		Einmaleins		Addition		2·7

9 (=4%F) Schüler ändern 72 in 75 (75·60 = 4500) ab (graphische Verwandtschaft der Ziffern 2 und 5?); 33 (=15%F) Schüler nehmen nicht den Faktor 60, sondern vor allem 24 (24·72=1728) und 12. Mögliche Gründe: Das Tag-Stunden-Verhältnis 24 ist weniger einfach und eindrucksvoller; häufig sind Ziffernblätter in 12 Teile à 5 Minuten eingeteilt. Die Antworten: „Das Herz schlägt 4320mal in der Minute." und „Es schlägt 4320 Minuten." sind wohl Perseverationen, die wegen des ansonsten geringen Anspruchs der Aufgabe vergleichsweise häufig auftreten.

Daß die Schüler hier geringfügig schlechter (statt deutlich besser) abschneiden als bei B5, obwohl die Operation hier (Multiplikation) ‚leichter' ist als die Operation dort (Division), liegt wohl an der abstrakteren Begrifflichkeit (Schläge pro Stunde, und zwar nicht in einer einzigen, sondern andauernd, gegenüber: Kosten eines Autos), an der erforderlichen Umdeutung von 60 min in 60 als Faktor, an der nur impliziten Vorgabe dieses Faktors und daran, daß der Divisor in B5 einstellig ist.

A4 Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind 3 Mädchen mehr, als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse? 773 (=69%S) +, 294 (=26%S) —, 53 (=5%S) o

Aufteilungsprozeß (in Teile von *unterschiedlicher* Mächtigkeit); Typ: Gesucht sind zwei Zahlen, für die Summe und Differenz gegeben sind. Zu verstehen usw. ist:

J J J J J J J J J J J J J
I I I I I I I I I I I I I
M M M M M M M M M M M M M M M M

Abb. 2: Strukturbild von A4

(a) In einer Klasse sind Jungen und Mädchen, insgesamt 29 Kinder. (Verständnis der umgangssprachlichen Wendung ‚hat')

(b) Gesucht ist die Zahl der Jungen und die der Mädchen. (Zielerfassung)

(c) Es ist eine zusätzliche Bedingung gegeben, die das Problem erst eindeutig lösbar macht. (Überblick über Text und Aufgabenstellung)

(d) „3 Mädchen mehr" steht für eine Differenz; die Differenzenbildung ist jedoch nicht Wegnehmen einer Teilmenge, sondern ‚Neutralisierung' durch Paarbildung und Abzählen des Rests. (mathematische Deutung der Wendung ‚mehr')

(e) Ohne den Überschuß von 3 Mädchen hätte die Klasse 26 Kinder, und zwar gleichviel Jungen und Mädchen. Oder: Es sind etwas weniger

als die Hälfte Jungen und etwas mehr als die Hälfte Mädchen. (Mathematisierung)
(f) Rechnen:

29—3 = 26   26:2 = 13   13 + 3 = 16
Oder:
29:2 = 14 R 1   14 + 15 = 29   13 + 16 = 29

Lösung	12J 17M	29:3 usw.	14J 17M	12J 15M	11J 18M	26J 3M
Vork.	38	28	18	16	15	14
%F	13	10	6	5	5	5

Lösung	16M	26J 29M	14J 15M	15J 18M	15J 14M	23J 26M	13J 19M
Vork.	10	10	8	5	5	4	4
%F	3	3	3	2	2	1	1

Tab. 4: Häufigste Fehllösungen bei A4

Bis auf ca. 50 (= 17%F) ist bei allen Fehllösungen eine der beiden Bedingungen j + m = 29 und m—j = 3 gewahrt und die andere nicht. Dies ist jedoch nicht allein ein bewußtes oder unbewußtes Nichtberücksichtigen der jeweiligen anderen Bedingung (Rdv), sondern wohl auch Ergebnis einer Versuch-Irrtum-Strategie (Rdvii) bzw. einer jedenfalls nicht schriftlich fixierten (und schlecht fixierbaren) halb-sinnvollen Ad-hoc-Strategie in Ermangelung eines passenden Rechenschemas (auch (Rc)). Auch zahlreiche der richtigen Lösungen dürften so zustandegekommen sein, und oft ist ihnen wohl nachträglich noch eine wenig stringente und häufig falsche Rechnung untergeschoben worden.

Einige bemerkenswerte korrekte Lösungen (etwas anders als im Original aufgeschrieben):

j	3	6	9	10	11	12	13		j	10	11	12	13	13
m	6	9	12	13	14	15	16	oder	m	10	11	12	13	16
k	9	15	21	23	25	27	29		ü	9	7	5	3	0

	j	10	3	0	13		2mal	29:2±3:2 = 14½±1½ = 13 bzw. 16
oder 2mal	m	10	3	3	16	oder	1mal	(29±3):2 = 13 bzw. 16
	k	20	6	3	29		7mal	14 + 15 = 29 ⇒ 13 + 16 = 29

Die richtigen Lösungen verteilen sich wie folgt auf die einzelnen ‚Wege':

(a)	(29—3):2 usw.	436	56%R
(b)	29:2 (meist ad hoc vom Ergebnis aus)	50	6%R
(c)	13 + 16 = 29 bzw. nur Ergebnis genannt	245	31%R
(d)	sonstige richtige Rechnungen	28	4%R
(e)	falsche Rechnungen	14	2%R

Der Ansatz ‚29:2' ist wohl Ausfluß der Häufigkeit von Gleichverteilungsaufgaben im Mathematikunterricht (besonders bei Behandlung der Division), zumal die beiden Gruppen, in die aufzuteilen ist, fast gleichgroß sind. Er ist besonders fehlerträchtig, weil die Schüler dabei i. a. zu eng an der Division kleben und das Zwischenergebnis, besonders den Divisionsrest, häufig nicht sinnvoll weiter verarbeiten. Einige Beispiele:

29:2 = 14R1	14—2 = $\underline{12}$	14 + 2 + 1 = $\underline{17}$		29:2 = 15	15—3 = $\underline{12}$	$\underline{15}$
29:2 = 14	14—3 = $\underline{11}$	29—11 = $\underline{18}$		29:2 = 14	14 + 3 = $\underline{17}$	$\underline{14}$
29:2 = 14R1	15—3 = $\underline{12}$	14 + 3 = $\underline{17}$				

Die Schüler, deren Lösung mit 29:3 beginnt, haben wohl erkannt, daß die Gesamtzahl irgendwie aufzuteilen ist, und geschlossen, daß zu dividieren ist. Dazu haben sie dann die im Text vorkommenden Zahlen verwendet und nicht die implizit gegebene Zweizahl der Geschlechter. Als Ergebnis wird hier oft ‚9 Jungen und n Mädchen' genannt, wobei fast immer n≠20 ist. Es kommen auch in drei Fällen 9,2 bzw. 6,3 bzw. 14,1 Jungen vor (Divisionsreste hinter dem Komma).

Wenn nur die Zahl der Mädchen (der Jungen) genannt ist, ist die Aufgabe unvollständig gelöst. Daß allein die Zahl der Jungen genannt ist, kommt nur 2 mal vor, da diese Zahl beim Lösungsweg der meisten Schüler auch ein noch weiter zu verarbeitendes Zwischenergebnis ist. Die Zahl der Mädchen allein wird in 13 Fällen angegeben, davon 10 mal richtig mit 16. In all diesen Fällen ist mit dem Ansatz (29—3):2 gearbeitet worden. Eine Mitursache ist wohl auch die Formulierung des Fragesatzes in der Aufgabenstellung: Die Frage nach der Zahl der Mädchen kann unabhängig vom ersten Teil des Satzes (Frage nach der Zahl der Jungen) gelesen werden.

A4-typische Fehler(-ursachen)
— ungeeignete (beginnend mit 29:3) bzw. nicht genügend beherrschte Lösungsstrategie (beginnend mit 29:2) (Rc)
— Ad-hoc-Lösungsstrategie (Rdvii)

B2 Der km-Zähler im Auto steht gerade auf 301090. Welche Zahl zeigte der km-Zähler direkt davor? 743 (= 66%S) +, 331 (= 30%S) —, 46 (= 4%S) o

Umgang mit Stellenwertsystem; Typ: Suche den Vorgänger einer gegebenen Zahl (im Zehnersystem). Zu verstehen usw. ist:
(a) Der km-Zähler zeigt in jedem Augenblick eine natürliche Zahl an, die die Zahl der (vollen) Kilometer darstellt, die das Auto in seinem ganzen Dasein zurückgelegt hat. (Sachwissen)
(b) Nach jedem gefahrenen Kilometer erhöht sich die angezeigte Zahl um 1. (Sachwissen)
(c) Mit ‚direkt davor' ist der (zeitliche) Vorgänger der genannten Zahl auf dem km-Zähler gemeint. (Sachwissen und umgangssprachliche Kompetenz)
(d) In der Zählreihe der natürlichen Zahlen ist also der Vorgänger von 301090 gesucht (die Zahl ist so gewählt, daß zwar ein Zehner, aber kein Hunderter überschritten wird, insbesondere die Eins und die beiden vorderen Nullen nicht zu verändern sind, obwohl sie in Analogie zu üblichen Zählaufgaben zum Verändern verleiten).
(e) Rechnen: Vorgänger notieren (der Vorgänger der 0 ist 9, dann wird aber auch die Ziffer der vorletzten Stelle um 1 vermindert) oder 1 subtrahieren

Lösung	300090	300089	301080	300000	300080	301091	301090	301000
Vork.	42	33	23	17	15	14	11	9
%F	13	10	7	5	5	4	3	3

Lösung	301089,9	290989	0	301089,999	201090	30189	301099	201090
Vork.	7	6	6	4	4	4	4	4
%F	2	2	2	1	1	1	1	1

Lösung	300999	301081	000000
Vork.	3	3	3
%F	1	1	1

Tab. 5: Häufigste Fehllösungen bei B2

Bei vielen Schülern mit fehlerhafter Lösung kann man davon ausgehen, daß sie sich nicht einer echten Sachsituation gegenübersehen, sondern die Aufgabe im wesentlichen als eingekleidete Rechenaufgabe auffassen. Dann ist das ‚direkt davor' nicht mehr durch die Funktion des Zählers bestimmt, sondern kann allerlei arithmetische Operationen bedeuten, die den Schülern schon einmal begegnet sind: Welche Zahl muß subtrahiert werden, damit es eine möglichst glatte Zahl gibt? (1090). Oder: ‚eine weniger' wird zu ‚ohne die Eins'. Oder: An jeder von 0 verschiedenen Ziffer muß 1 subtrahiert werden, mit Ausnahme vielleicht der führenden (ein Ergebnis: „200089 oder 301089". Oder: An jeder Stelle, auch an denen mit der Ziffer 0, wird 1 subtrahiert (und dann falsch gerechnet: 290989). Tatsächlich haben 76 (=23%F) Schüler eine schriftliche Subtraktion mit anderen Zahlen als 1 ausgeführt. Oder: Der Kalkül mit Metern wird herangezogen (19 (=6%F) Schüler). In der Tat gibt es Entfernungsmesser, die volle Meter oder wenigstens volle 100 Meter anzeigen. Diese Schüler benutzen die arithmetische Identität 301090 = 301090,0 = 301090,000 (und zwar meist Schüler mit höherer Punktzahl) und unterstellen, daß im Text nicht die ganze Ziffernfolge, sondern nur die km-Zahl angegeben ist. Möglicherweise ist ihnen, und auch denen, die etwas anderes als 1 subtrahiert haben, sonst in der Aufgabe zu wenig zu tun. Für diese Vermutung spricht auch, daß bei 302 (=41%R) der richtigen Lösungen die Subtraktion schriftlich durchgeführt ist (wobei hier nicht Schreibweisen wie ‚301090—1 = 301089' mitgezählt sind); möglicherweise werden die Schüler dazu aber auch ‚von Amts wegen' verpflichtet.

Eine ähnliche Interpretation bietet sich auch für die Lösung ‚300090' an. Die Schüler haben die Ziffernfolge 301090 als 301,090 km aufgefaßt und 1 km zurückgerechnet (in einigen Fällen explizit so); zwei Schüler haben einfach ein Komma in die Ziffernfolge gesetzt.

‚Davor' ist in 6 Fällen auch als Ziffer vor den 6 Ziffern verstanden worden, also die 0 in 0301090; in 3 Fällen als der Anfangszustand des km-Zählers, also 000000 (alles Ursachen im Sprachverständnis (Rdi)). Von den Lösungen 301091 sind drei ausdrücklich als ‚danach' deklariert. Hier wirken sich möglicherweise Erfahrungen mit Aufgaben aus, bei denen entgegengesetzte Bedeutungen durch einander ähnelnde Formulierungen ausgedrückt werden, etwa: „Wovor steht...?" vs. „Was steht vor...?" Solche Schwierigkeiten können bei einer sinnvollen Behandlung von Relationen in der Primarstufe bewußt gemacht und geklärt werden.

Selbstredend sind auch rein numerische Fehlertechniken in den Lösungen enthalten (ca. 30 (=9%F)). Zwei Schüler interpretieren die 1 in 301090 als l und rechnen mit Litern (wohl in Erinnerung an die vorher dagewesene Aufgabe A2). Es ist bemerkenswert, mit welcher Findigkeit in diese Interpretation noch ein Sinn gelegt wird: 30 l : 0,90 = 2,70 l (zeigt der km-Zähler direkt davor).

B2-typische Fehler(-ursachen)

— unpassendes Verständnis von ‚davor' (Rdi) ca. 90%F

— Einbezug kleinerer Einheiten als km (Rdiv) ca. 6%F

A1 Herr Adler hatte im Jahr 1977 ein Monatsgehalt von 2000 DM. Im Dezember erhielt er zusätzlich ein halbes Monatsgehalt als Weihnachtsgeld. Wieviel DM verdiente Herr Adler im Jahre 1977? 607 (=54%S) +, 492 (=44%S) —, 21 (=2%S) o

Typ der Aufgabe: Vervielfachen einer Größe und anschließende Addition einer Größe derselben Art. Zu verstehen usw. ist: (s. Abb. 3).
(a) Monatsgehalt ist ein Betrag, der jeden Monat gezahlt wird. (Sachwissen)
(b) Das Jahr 1977 ist ein Zeitraum, der (wie jedes Jahr) 12 Monate umfaßt. (Sachwissen)

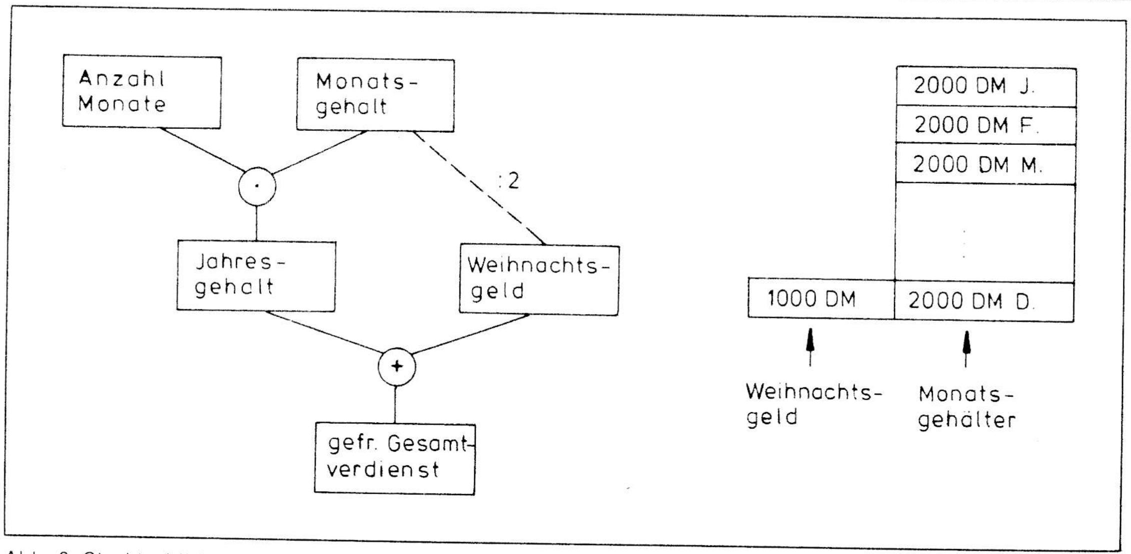


Abb. 3: Strukturbild von A1

(c) „Halbes Monatsgehalt" ist die Hälfte von einem ganzen Monatsgehalt, ein Monatsgehalt durch 2. (math. Wissen)
(d) „Zusätzlich" heißt: darüberhinaus, außerdem, plus. (umgangssprachliche Wendung in math. Verknüpfung umdeuten)
(e) „Verdiente ... im Jahr 1977" ist die Frage nach dem gesamten Verdienst eines bestimmten Jahres. (Sprachkompetenz)
(f) Der Jahresverdienst setzt sich additiv aus 2 Teilen zusammen: 1. Verdienst (Gehalt) in jedem der 12 Monate und 2. Weihnachtsgeld. (Sachwissen und math. Wissen)
(g) Der normale Verdienst besteht aus 12 Stücken von je 2000 DM. (Umdeutung der Zeitspanne 12 Monate in den reinen Multiplikator ·12 bzw. 12·; Mathematisierung)
(h) Rechnen (aus (f) und (g)):
2000 DM · 12 = 24000 DM bzw. 12 · 2000 DM = 24000 DM
2000 DM:2 = 1000 DM bzw. die Hälfte von 2000 DM ist 1000 DM
24000 DM + 1000 DM = 25000 DM

Lösung	3000	24000	1000	36000	23000	2500	15000(0)	26000
Vork.	184	48	24	24	17	10	9	8
%F	37	10	5	5	3	2	2	2

Lösung	6000(0)	27000	166	3400	2400	3954000	2083	4000	3977
Vork.	8	6	4	4	3	3	3	3	3
%F	2	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 6: Häufigste Fehllösungen bei A1

Die Hauptursache für den Fehler ‚3000' ist ein falsches Verständnis vom Begriff ‚Monatsgehalt' ((Rb) bzw. im Zusammenhang mit der Wendung ‚im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von' auch (Rdi)). Diese Wendung wird interpretiert als ‚im Jahre 1977 ein Gehalt von 2000 DM (das monatlich in gleichen Teilen ausbezahlt wird)'. Auch die 9 Lösungen, in denen 2000:12 berechnet ist, z. B. ‚166' und speziell ‚2083' (2083 = 2000 + 1/2 · 1/12 · 2000), beruhen wohl auf dieser Interpretation.
Eine weitere mögliche Ursache des Fehlers ‚3000' und weiterer ist das Außerachtlassen einer relevanten Bedingung (Rdv) (oder auch das Nichtabschließen der Informationsverarbeitung (Rdviii)), z. B.: die erforderliche Multiplikation mit 12 (die ja nur einer impliziten Angabe zu entnehmen ist), oder im Fall ‚24000' das Hinzufügen des Weihnachtsgeldes, im Fall ‚36000' die nur einmalige Gewährung des Weihnachtsgeldes, im Fall ‚1000', bei dem in 11 von 24 Nennungen vom Jahresgehalt gesprochen wird, die Addition des eigentlichen Gehalts.
Der Fehler ‚24000' läßt sich vielleicht auch darauf zurückführen, daß das Weihnachtsgeld nicht zum Verdienst gezählt wird (Rb); ein Schüler schreibt: „Er verdient 14000 DM" (Rechenfehler) „und kriegt 1000 DM geschenkt." Auch erscheint 7 mal die Antwort: „1000 DM Weihnachtsgeld".
Bei den Lösungen ‚26000' und ‚4000' ist ein volles Monatsgehalt als Weihnachtsgeld addiert. ‚27000' entsteht durch eine zweimalige Addition des Dezembergehalts, bei ‚23000' fehlt es ganz. Die Fälle ‚3954000' und ‚3977' sind Ergebnisse von Verknüpfungen mit der Jahreszahl. Insgesamt 15 (= 1%S) Schüler beziehen die Jahreszahl in die Rechnung mit ein. Die sonstigen der häufigsten und viele der ein-, oder zweimal vorkommenden Fehllösungen beruhen meist auf numerischen Fehlertechniken.

A1-typische Fehler(-ursachen)
— falsches Verständnis von ‚Monatsgehalt' (= Jahresgehalt) ((Rb) bzw. (Rdi)) über 80%F

A3 Ein Fernsehmonteur reparierte von 14.10 Uhr bis 17.40 Uhr ein Gerät. Er berechnete pro Arbeitsstunde 40 DM. Wie hoch war der Arbeitslohn für diese Reparatur? 558 (= 50%S) +, 537 (= 48%S) —, 25 (= 2%S) o
Vervielfältigungsprozeß; Typ: Gesamtwert gesucht, wobei der Wert pro Einheit gegeben ist, die (nicht ganze) Zahl der Einheiten (Stunden) noch als Spanne zwischen zwei Zeitpunkten zu errechnen ist. Zu verstehen usw. ist: (s. Abb. 4).
(a) Die Dauer der Reparatur ist durch Anfangs- und Endzeit gegeben. (math. Wissen)

14.10 – 15.10	15.10 – 16.10	16.10 – 17.10	17.10 – 17.40	
1h	1h	1h	½h	3½h
40 DM	40 DM	40 DM	20 DM	140 DM

Abb. 4: Strukturbild von A3

(b) Der Arbeitslohn bemißt sich an der Dauer. (Sachwissen)
(c) „Pro Arbeitsstunde" ist zu lesen als:
1. Für jede volle Arbeitsstunde ist der Stundenlohn zu zahlen.
2. Für jede angebrochene Arbeitsstunde ist der entsprechende Bruchteil des Stundenlohns zu zahlen (andernfalls würde es heißen: „pro volle..." oder „pro angefangene..."). (Sachwissen, fachsprachliche Kompetenz)
(d) Gefragt ist nach dem gesamten Arbeitslohn für die Reparatur. (Zielerfassung)
(e) Die Gesamtzeit 3½ h setzt sich aus 3 vollen und einer halben Stunde additiv zusammen. (math. Wissen)
(f) Der Arbeitslohn setzt sich zusammen aus 3 Stücken zu je 40 DM und noch einmal der Hälfte von 40 DM (bzw. 40 DM:2). (Umdeutung der Zeitspannen 3 h und ½ h in die reinen Operatoren ·3 (bzw. 3·) und ‚die Hälfte von' (bzw. ‚durch 2'); Mathematisierung)
(g) Rechnen (beginnt bereits bei (e)): Von 14.10 Uhr bis 17.10 Uhr sind es 3 Stunden; von 17.10 bis 17.40 Uhr 30 Minuten (= ½ Stunde). (Die Zahlen sind bewußt so gewählt, daß ohne Stundenüberschreitung gerechnet werden kann.) (math. Wissen über Größen; hier Stunden und Minuten) Schließlich:
40 DM · 3 = 120 DM bzw. 3 · 40 DM = 120 DM
40 DM:2 = 20 DM bzw. die Hälfte von 40 DM ist 20 DM
120 DM + 20 DM = 140 DM

Lösung	120	132	150	100	180	13200	1320	13,200	330	160	120,30
Vork.	94	61	29	18	18	15	12	11	11	8	8
%F	18	11	5	3	3	3	2	2	2	1	1

Lösung	3.30 h Dauer	84	220	1200
Vork.	5	4	4	4
%F	1	1	1	1

Tab. 7: Häufigste Fehllösungen bei A3

Viele Schüler verstehen den Text so, daß der Monteur nur volle Arbeitsstunden berechnet ((Rb) bzw. (Rdi)). Dies führt dann in der Regel dazu, daß die angebrochene Stunde nicht berechnet wird (11 Schüler rechnen sogar mit 14.10 — 17.10 Uhr bzw. 14.40 — 17.40 Uhr), bei 3 Schülern, daß die angebrochene Stunde voll berechnet wird (3·40 + 40), was sachkundlich durchaus zu rechtfertigen wäre. Die meisten Schüler addieren zu dem Betrag, der sich aus den vollen Stunden ergibt, noch einen Betrag, der meist kleiner ist als 40 (auch zu 80 oder 160, wenn eine andere Zahl voller Stunden angenommen ist):

Betrag	150	140	120	60	50	45	40	35	34	30	25	23	20	17
Vork.	1	2	1	5	1	1	5	3	1	30	1	1	566	1

Betrag	15	10	6	5	4	3,60	3,30	2	1	0,90	0,60	0,50
Vork.	3	6	4	2	1	1	1	2	1	1	1	1

Betrag	0,40	0,33	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05 (DM)
Vork.	2	1	10	3	2	1	1

Tab. 8: Beträge, die zum Lohn der vollen Stunden addiert werden (in 4 Fällen wird das Ergebnis als ungefähr bezeichnet)

Der von dem Stundenbruchteil stammende DM-Betrag wird oft in Pfennige konvertiert oder sonstwie klein gehalten. Dies ist die ‚Regel', mit der diese Schüler Größenordnungen berücksichtigen (Rc), jedenfalls, wenn sie nicht auf das Halbieren kommen. Der häufig vorkommende Betrag 30 stellt eine direkte Gleichsetzung von Minuten- und DM-Anzahl dar. Fast alle Antworten ‚100' und ‚180' beruhen auf Fehlern bei der Zeitdauerberechnung (2½ bzw. 4½ h). 84 stammt aus 210·40, wobei zwar die Zeitdauer richtig mit 210 Minuten ermittelt ist, dann aber in Analogie zum Rechnen mit Größen mit Dezimalsystem ohne Rücksicht auf die Bündelung der Minuten im 60er-System ohne Berücksichtigung der Stellen gerechnet wird und am Schluß das Komma zwei Stellen von rechts aus bzw. willkürlich gesetzt wird. Noch deutlicher wird diese Fehlertechnik bei den Ergebnissen mit der Ziffernfolge 132 (aus 3,30·40) und ansatzweise auch 1200 (= 30(min)·40). Hierfür ist eine Ursache wohl in der Schreibweise 14.10 Uhr und 17.40 Uhr zu sehen (eine Art (Rdii)). Wenn die dezimale Subtraktion der beiden Uhrzeiten nicht das auch im 60er-System richtige Ergebnis liefern würde, läge der Fehleranteil bestimmt höher. Am einfachsten sind die Schüler vorgegangen, die ihre ermittelte Zeitspanne 3.30 h zunächst direkt in 330 min und dann in 330 DM umgewandelt haben. Offenbar ist der Unterschied zwischen Zeitspannen und Zeitpunkten nicht deutlich genug, was sich in der Schreibweise 3.30 (ca. 40%S) (davon ein Viertel sogar 3.30 Uhr) zeigt. Ein Hinweis auf schematisches Vorgehen: 89 (= 8%L) Schüler nehmen nicht den Rechenvorteil bei der Ermittlung der Zeitdauer (Stunden für sich und Minuten für sich), sondern gehen nach dem Schema vor, jeweils immer bis zur nächsten Stunde zu ergänzen, und müssen dann umständlicher rechnen: 50 min + 2 h + 40 min = 3 h 30 min.

A3-typische Fehler(-ursachen)
— Unterschied zwischen Zeitpunkt und -raum noch nicht genügend ausgebildet (Rb)
— übliche Schreibweise von Zeitpunkten als 17.40 Uhr führt zur selben Schreibweise bei Zeit-

spannen und zum Rechnen wie mit Dezimalzahlen ((Rdii) und (Rb)) ca. 50%F
— Fehlinterpretation von ‚pro Arbeitsstunde' als ‚pro volle Arbeitsstunde' (Rb) ca. 10%S

A2 10 l Kakao werden in kleine Flaschen von je ¼ l Inhalt gefüllt. Wie viele Flaschen werden voll? 552 (=49%S) +, 429 (=38%S) —, 139 (=13%S) o
Aufteilungsprozeß; Typ: Zerlegen einer gegebenen ‚Menge' in (gleiche) gegebene Teil‚mengen', oder: Aufteilen einer gegebenen Größe durch gegebene Teilgrößen, oder: Messen einer Größe (10 l) mit einer ‚Meßgröße' (¼ l). Zu verstehen usw. ist:
(a) „10 l Kakao" ist eine ‚Menge' (ein Quantum) Kakao von der Größe 10 l; Vorstellung: ein großer Eimer gefüllt mit Kakao. (Wissen über Größen (Volumen))
(b) „¼ l" ist der vierte Teil von einem (ganzen) Liter, 1 l:4 (Vorstellung: Abb. 5a) (math. Wissen über Bruchgrößen einfachster Art)

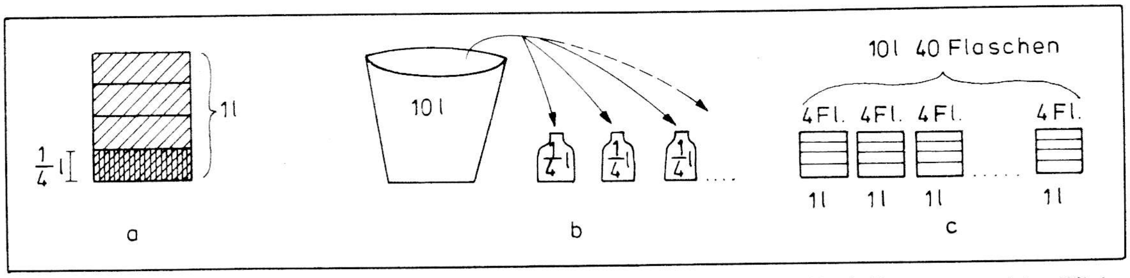


Abb. 5: Sachsituation in A2

(c) „Kleine Flaschen (von je ¼ l Inhalt) gefüllt" steht für einen Umfüll- (Abfüll-) vorgang (Vorstellung: Abb. 5b). (Sachwissen über Um-, Abfüllen)
(d) Es ist nach der Anzahl der vollen kleinen Flaschen gefragt, d. h. wie viele volle Flaschen sind am Ende des Vorgangs zu sehen, wenn also der Behälter leer ist? (Zielverständnis bzgl. Sachwissen)
(e) So viele Flaschen werden voll, wievielmal man ¼ l Kakao herausschöpfen kann (in wie viele ¼-l-Portionen die 10-l-Menge zerlegt werden kann, wie oft ¼ l in 10 l enthalten ist). (Mathematisieren des Umfüllvorgangs; Identifizieren als ‚Aufteilen')
(f) Rechnen: $\underbrace{\tfrac{1}{4}\,l + \tfrac{1}{4}\,l + \ldots \tfrac{1}{4}\,l}_{\text{wieviel mal?}} = 10\,l$
Oder: $\underbrace{10\,l - \tfrac{1}{4}\,l - \tfrac{1}{4}\,l - \ldots \tfrac{1}{4}\,l}_{\text{wieviel mal?}} = 0\,l$
Oder: Aus 1 l gäbe es 4 Flaschen, denn 1 l besteht aus 4 Viertellitern,
aus 2 l gäbe es 8 Flaschen,...
aus 10 l gibt es 40 Flaschen.
Oder direkt: Aus 1 l gäbe es 4 Flaschen, also aus 10 l 10 mal so viel.
Oder mit einer zeichnerischen Lösung (Abb. 5c).

Lösung	4	2	25	8	10	5	2½	20	7	250	14	22	140	400
Vork.	60	39	29	18	15	13	13	12	8	8	7	7	5	4
%F	14	9	7	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1

Lösung	50	9	240
Vork.	4	4	3
%F	1	1	1

Tab. 9: Häufigste Fehllösungen bei A2

Bei dieser Aufgabe bemühen sich viele Schüler, gleich zu einem einfachen Rechenschema zu gelangen und die Lösung mit einer einzigen Operation zu erzielen. Dabei scheinen sie im Kopf gewisse Vor-Rechnungen durchzuführen und sich danach um eine schriftliche Notierung zu bemühen, die aber sogar bei vielem mit richtiger Lösung mißlingt. Oft werden drei Werte zu einer korrekten oder inkorrekten Gleichung kombiniert und einer als Lösung deklariert, unter Mißachtung des Operationszeichens, des Stellenwerts oder auch der korrekten Größenbezeichnung. Dabei wird ¼ häufig wie 4 behandelt. 4 Schüler sprechen von 40 l Kakao, die gefüllt werden. Insgesamt ca. 20 Schüler interpretieren ¼ bzw. ¼ l als 14. Dies führt zu den Ergebnissen 7 (mit Rest), 14, 140 u. ä. (Division oder Multiplikation). Die Größenangabe 10 l ist von ca. 20 Schülern als 101 gelesen und entsprechend weiter verarbeitet worden (eine Art (Rdii), ein Schüler dividiert sogar 101:¼ l = 25, wobei er die Schreibfigur ¼ l wie 4 behandelt).

Auffällig ist auch die vergleichsweise hohe Zahl der Schüler, die die Aufgabe nicht bearbeitet haben.

7 Schüler haben korrekt durch Zeichnungen oder 40-faches Aufschreiben von ¼ gelöst. Wie sehr aber i. a. die schriftliche Darstellung zu wünschen übrig läßt, zeigt folgende Übersicht über die Notationen, die bei den *richtigen* Lösungen vorkommen:

Korrekte Schreibweisen:

ohne Rechn.	4·10	10 l : ¼ l	10 : ¼	10 l = ¼ l·40	10 = ¼·40	10 l:40 = ¼ l
67	177	43	19	18	1	1

40/4 l = 10	40/4 = 10 l	10000 ml:250 ml	10000:250	10000 l:250 l	1000:25
3	1	1	6	1	2

10,000 l:0,25 l	40·0,25 l = 10,0 l	10 l = 40 Fl.	sonst.	korrekt
1	2	48	4	395

Unkorrekte oder nicht aufgabenzugehörige Schreibweisen:

10 l · 4	10 l · 4 = 40 l	10 l · 4l	10 l · 4 l = 40 l	10 · 4 = 40 l	10 · 4 l	10 · 4 l = 40 l
36	15	7	5	8	3	1

10 l:4	10:4	10 l:¼	10:¼ l	10 l:¼ l = 40 l	10 · ¼ l	10 · ¼ l = 40 l	10 · ¼
1	1	8	3	4	8	2	23

10 l · ¼ l = 40 l	10 l · ¼ l	10 l · ¼	10 l · ¼ = 40 l	10 l = ¼ · 40	10 = ¼ l · 40	10 · 4/4
4	5	3	1	6	1	1

10 l · 4/4 l = 40	10 l:4/4	10 · 4/4 l	10 · 4/4 l = 40/4	10 l · 0,25	10000 ml:250 ml = 40 ml
1	1	1	2	1	1

10,000 l:0,250	10 l:2,50 l	inkorrekt
3	1	157

Tab. 10: Notation der Rechnungen bei richtigen Ergebnissen (wo nur Terme stehen, ist noch ‚= 40' einzufügen; die Vielfalt war noch größer; jedoch wird bei dieser Tabelle Kommutativität der Multiplikation ausgenutzt und die Anzahlbezeichnung ‚Flaschen' nicht geschrieben)

Eine besonders schöne Lösung: „Mit 10 l würden 20 ½-l-Flaschen voll, also werden 40 ¼-l-Flaschen voll."

A2-typische Fehler(-ursachen)

— keine Klarheit über die beteiligten Größen und deren Zusammenhänge (noch kein bewegliches Rechnen in Größenbereichen) (Rb)

— unangemessene Lösungsstrategien (möglichst rascher Einsatz einer Grundrechenart) (Rc)

— Fehlinterpretation der Schreibfigur ¼ l (meist als 4) (von vornherein oder beim Rechnen) (Rb)

— Fehlinterpretation von 10 l als 101

(Fortsetzung folgt)

Medien im naturwissenschaftlich-technischen Sachunterricht

Von *Heribert Kaiser* in Paderborn

I. Medien und Medienverbund im Sachunterricht

Zur Vermittlung der grundlegenden naturwissenschaftlich-technischen Ziele des kognitiven, psychomotorischen und affektiven Bereichs müssen dem Lehrer des Sachunterrichts geeignete Hilfsmittel oder Medien bzw. Arbeitsmittel zur Verfügung stehen.

Als weitgefaßter Begriff können Medien wie folgt definiert werden:

„Medien für den Raum der Schule sind alle Mittel, die in den Lernprozessen für die Schüler zur Vermittlung von Wissen dienen" (1).

Diese umfassende Definition beinhaltet, daß Unterricht immer an Medien gebunden ist, sagt aber nicht aus, nach welchen Kriterien Medien beurteilt und ausgewählt werden sollen. Folgende Kriterien dienen der Beurteilung von Unterrichtsmedien: (2)

1. *Adäquate Repräsentation der Sachverhalte*
2. *Berücksichtigung der individuellen Situation der Schüler, für die die Medien eingesetzt werden*
3. *Steigerung der Effektivität von Lehren und Lernen*

Die o. g. Kriterien zur Auswahl von Medien gelten generell, es folgen Kriterien, die nur partielle Gültigkeit haben. Sie sollen

4. *dem didaktischen Prinzip einer mehrfachen Exposition der zu lehrenden Sachverhalte gerecht werden*
5. *die Schüler für das Lernen motivieren und*
6. *den Schülern Freiraum für eigene Aktivitäten lassen.*

Besonders in der Primarstufe müssen Medien dem Prinzip der Anschauung (3) dienen, dabei soll nicht nur der visuelle Aspekt der Medien angesprochen sein, sondern auch der handelnde Umgang mit ihnen. Es gilt durch geeignete Medien, durch Arbeitsblätter, Schulbücher, Dias, Filme, Experimentiermaterial, die Umwelt in den Unterricht hereinzuholen. Diese Medien sind in den Wirkungen auf die Schüler unterschiedlich und müssen deshalb gezielt im Medienverbund eingesetzt werden (4), wobei eine sachgerechte Auswahl die Vielfalt der Medien beschränkt (5).

In der folgenden Übersicht werden die gebräuchlichen Lehr- und Arbeitsmittel zusammengestellt (6):

— Der Gegenstand als solcher, das Original, sowie Bearbeitung bzw. Herstellung, Zwischen- und Endprodukt.

dung in der Grundschule, in: Die Grundschule 4/1971, S. 4—11, S. 7f.
[4] *Dröge, F.:* Positionen und Perspektiven der Medienerziehung, in: medien + erziehung 2/1976, S. 90—93, S. 92.
[5] *Schwarz, R.:* Schule und Massenmedien, in: Schwarz, R. (Hrsg.): Manipulation durch Massenmedien — Aufklärung durch Schule? Stuttgart 1974, S. 1—20, S. 19.
[6] *Maspfuhl, R.:* Medienanalyse und Schüleröffentlichkeit, in: Mitteilungen des Bundes deutscher Kunsterzieher, 3/1976, S. 32—34, S. 32.
[7] *Ehmer, H. K.:* Stellungnahme zum Thesenpapier: „Medienpädagogik" — was ist das? in: medien + erziehung 2/1976, S. 93—96, S. 94.
[8] ders., ebd.
[9] ders., ebd.
[10] „Das Bekanntmachen mit gesellschaftlicher Wirklichkeit und den in ihr enthaltenen Problemen wird nun besonders kompliziert, wenn der Schüler diese Wirklichkeit nicht mehr unmittelbar erfahren kann; wenn er — und das ist zumeist der Fall — zum Erkennen der Wirklichkeit auf Informationen, etwa Presse, Funk und Fernsehen, angewiesen ist." *Engelhardt, R.:* a.a.O., in: Die Grundschule 4/1971, S. 4
[11] *Klein, F. / Müller-Egloff, P.:* Zeitungsfibel oder Ich mach' mir meine Zeitung selbst, Weinheim 1975, S. 2 und vgl. *Lohrer, K.:* Vergessenes Medium Tageszeitung, in: Blätter für Lehrerfortbildung 6/1974, S. 214—219, S. 214.
[12] Es wurden folgende Fragen gestellt, wobei außer bei Frage 5 Antwortmöglichkeiten vorgegeben waren:
1. Wird bei dir zu Hause regelmäßig eine Tageszeitung gelesen?
2. Wenn du bei der ersten Frage „ja" angekreuzt hast: welche Tageszeitung wird oder welche Zeitungen werden bei dir zu Hause gelesen?
3. Liest du selbst manchmal in der Zeitung?
4. Wenn du in der Zeitung liest, welche Zeitung liest du dann?
5. Was liest du in der Zeitung?
[13] „Die (auch) im Bereich der ästhetischen Erziehung ansatzweise mögliche Verbindung von theoretischer und praktischer Arbeit zur Herstellung sinnvoller, d. h. brauchbarer, Bedürfnisse befriedigender Produkte und Prozesse unter einem verhältnismäßig geringen Selektionsdruck ist deshalb für den Erziehungsprozeß so wichtig und zu sichern, weil sie Elemente lebendiger, normaler, also nicht schulisch verzerrter Lern- und Arbeitsprozesse enthalten kann, die zur Entfaltung der selbständigen, selbstbewußten Persönlichkeit unverzichtbare Voraussetzung sind." *Beck, J.:* Das ästhetische Lernen und die Bedingungen der Institution Schule, in: *Dunkel/Jentzsch* (Hrsg.): Ästhetische Erziehung und gesellschaftliche Realität, Ravensburg 1976, S. 19, zit. nach: Hamburger Lehrerzeitung 11/1978, S. 24.
[14] *Beck, G.:* Medien und politisch-soziales Lernen, in: Arbeitskreis Grundschule e.V.: Mediengebrauch in der Grundschule, Frankfurt/M. 1977, S. 49—60, S. 54.
[15] vgl. dies., ebd., S. 53—55

Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahrs, Teil 3

Von *Peter Bender* in Neuss

Teil 1 und Teil 2 enthielten:
1. Zur Problematik des Sachrechnens
2. Der Test
3. Analyse der Ergebnisse
3.1. *Überblick*
3.2. *Zur Strukturierung der Analyse*
3.3. *Aufgabenspezifische Aspekte zu den Aufgaben B5, B1, A4, B2, A1, A3 und A2*
Anmerkung
Literatur

A5 Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere fährt pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach 1½ Stunden Fahrzeit voneinander entfernt? 357 (=32%S) +, 659 (=59%S) —, 104 (=9%S) o

Typ: Vervielfältigung zweier Größen mit anschließender Addition; bzw. zuerst Addition und anschließend Vervielfältigung, da gleicher Faktor (Zeit für beide Züge gleich). Zu verstehen usw. ist: s. Abb. 6, S. 227

(a) Durch ihre Bewegung legen die beiden Züge jeder eine Strecke zwischen sich und dem Bahnhof zurück; dabei ist der Bahnhof gemeinsamer Anfangspunkt beider Strecken. (Geometrisches Verständnis)

(b) Diese Strecken werden umso größer, je länger die Züge unterwegs sind. „Fahrzeit" bedeutet: die gesamte Zeit, in der die Züge unterwegs sind. (math. Wissen, Sachwissen, umgangssprachliche Kompetenz)

(c) „Fährt pro Stunde..." heißt: In jeder Sekunde, die der 1. (2.) Zug unterwegs ist, legt er 80 km (60 km), in Stundenbruchteilen entsprechend kürzere Strecken zurück. (math. Wissen aus Sachwissen)

(d) Es ist aber nicht nach der Entfernung der Züge vom Bahnhof gefragt, sondern nach der Entfernung voneinander. (Zielauffassung; beachten der Wendung ‚voneinander')

(e) „Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen" bedeutet, daß zur Entfernung des 1. Zugs vom Bahnhof die des 2. Zugs vom Bahn-

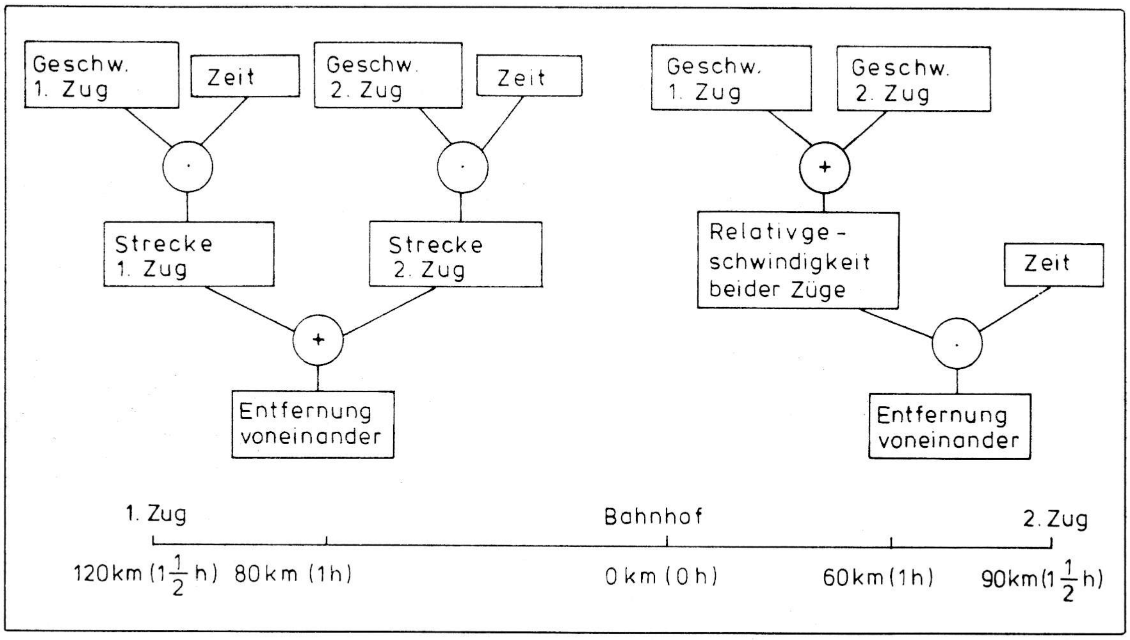


Abb. 6: Strukturbild von A5

hof hinzugezählt werden muß. (Umdeutung der umgangssprachlichen Wendung in eine math. Operation; dabei ist zu beachten, daß ‚entgegengesetzt' hier Addition nach sich zieht)
(f) Jede der in der Fahrzeit durchfahrenen beteiligten Strecken setzt sich aus der in 1 h und der in ½ h durchfahrenen zusammen. (Umdeutung von 1½ h in einen zusammengesetzten Operator; Mathematisierung)

(g) Rechnen: 80 km:2 = 40 km 60 km:2 = 30 km
80 km + 40 km = 120 km 60 km + 30 km = 90 km
120 km + 90 km = 210 km
Oder: 80 km + 60 km = 140 km 140 km:2 = 70 km
140 km + 70 km = 210 km
(der zweite Lösungsweg ist begrifflich schwieriger, weil es hier keinen Ruhepunkt als Anfang der zu berechnenden Strecken gibt (Bahnhof))

Lösung	30	20	120 u. 90	140	1800	70	12600	230	4800	10
Vork.	166	67	36	16	14	14	13	11	8	6
%F	25	10	5	2	2	2	2	2	1	1

Tab. 11: Häufigste Fehllösungen bei A5

Etwa 56 Schüler haben Skizzen angefertigt (davon waren 8 (= 14%) inkorrekt und führten auch zur falschen Lösung); 36 (= 64%) der Schüler mit Skizzen lösten die Aufgabe richtig.
Wie befürchtet nehmen die Fehler aufgrund von Differenzenbildung (314 (= 48%F)) den Löwenanteil ein. Eine Ursache sind wohl falsche Assoziationen mit dem Wort ‚entgegengesetzt' oder auch mit anderen Aufgaben, wo zu berechnen ist, welcher der beiden Züge weiter vom Bahnhof entfernt ist.
Der zweite Hauptfehler ist das Außerachtlassen oder Verfälschen der Fahrzeit: Entweder werden die Zahlenwerte direkt aus dem Text entnommen und damit eine 1stündige Fahrzeit unterstellt, oder 1½ wird als ½ gelesen und eine ½stündige Fahrzeit angenommen bzw. die Verarbeitung wird nicht abgeschlossen (Rdviii), es unterbleibt die Addition der Werte für ½ zu denen für 1.
Weiterhin geben 63 (= 10%F) Schüler für jeden Zug einen eigenen Wert an, weil sie wohl das Wort ‚voneinander' vor ‚entfernt' außer Acht gelassen haben (Rdv). Dies kommt bezeichnenderweise nicht vor bei den Schülern, die die Multiplikation mit 1½ nicht durchgeführt haben, denn dann wären ja die Zahlen des Textes direkt in die Antwort zu übernehmen gewesen, und das kann ja wohl bei einer Aufgabe nicht sein!

1800; 12600 und ähnliche Werte sind Differenz und Summe aus 80·90 und 60·90 (Stundenweg mal Minuten); insgesamt tauchen solche und ähnliche Fehler 77mal (= 12%F) auf, darunter 8mal die Multiplikation mit 130 (1h 30min). Möglicherweise sehen diese Schüler nur die Multiplikation mit 1½ (und nicht die Addition) als Alternative und scheuen sich vor dieser oder akzeptieren sie gar nicht. Tatsächlich bereitet diese Multiplikation Schwierigkeiten: 1½ · 80 = 96 (2mal), bzw. 112 · 80 = 89,60, bzw. 84, bzw. 80,40, bzw. 80½ und die entsprechenden Werte für 60 (je 1mal). Überraschend selten (im Vergleich zu A3) 80 + 30 (7mal), noch seltener 60 + 40 (3mal). 4800 ist das Produkt aus 80 und 60, ebenso 480, 48,00, 4,800 (insgesamt 16mal). Hier sind willkürliche Operationen mit Zahlenwerten aus dem Text durchgeführt. Recht häufig ist die Antwort keine Entfernung sondern eine Zeit (25mal (= 4%F)), etwa ‚2h 10min voneinander entfernt' (3mal) u. ä. Der Begriff der Fahrzeit scheint nicht immer einer Zeitspanne zugeordnet zu sein, sondern bei manchen eine Fahrstrecke zu bedeuten (9mal explizit). Oder auch: „210 km und 3 h Fahrzeit sind sie nach 1½ h voneinander entfernt."

A5-typische Fehler(-ursachen)
— Subtraktion statt Addition der Fahrstrecken (Rdiii) ca. 50%F
— Entfernung beider Züge vom Bahnhof angegeben (Rdv) ca. 10%F

— Fahrstrecke pro Stunde als Gesamtfahrstrecke (Rdv) ca. 20% F
— Unverständnis gegenüber ‚1½ Stunden' (Rb) ca. 20% F

B3 Die Weihnachtsferien begannen am 23. 12. 1977. Das war der erste Ferientag. Sie endeten am 8. 1. 1978. Das war der letzte Ferientag. Wie lange dauerten die Weihnachtsferien? 179 (= 16% S) +, 892 (= 80% S) —, 49 (= 4% S) o
Abzählaufgabe (oder: mehrere Subtraktionen mit Sortenverwandlung von Zeiträumen); Typ: Zwei Tagesdaten sind gegeben, die Länge der Zeitspanne zwischen ihnen ist gesucht (mit Monats- und Jahresüberschreitung; der Tag mit dem Anfangsdatum ist mitzuzählen). Zu verstehen usw. ist:
(a) „Weihnachtsferien" bezeichnen eine Zeitspanne (in Tagen). (Sachwissen)
(b) Diese Zeitspanne ist durch die Angabe des ersten und des letzten Tages bestimmt. (Sachwissen)
(c) Kenntnis des Kalenders, insbesondere Anzahl der Tage im Dezember, Bedeutung der Datum-Schreibweise usw. (Sachwissen)
(d) Die Länge der Zeitspanne ist gesucht. (Zielerfassung)
(e) Sie ist die Anzahl aller in der Zeitspanne liegenden Tage, und diese Zahl kann durch Abzählen ermittelt werden. (Mathematisierung durch Operationalisierung der Aufgabe)
(f) ‚Rechnen': Durchzählen. Oder: Die Tage im Dezember (9) und die im Januar (8) zählen und die beiden Zahlen addieren (17).
(g) Alternative (die für größere Zeiträume ökonomischer ist): Für jeden Monat separat die Zahl der Ferientage durch Subtraktion ermitteln: Im Dezember dauern die Ferien vom 23. bis zum 31., im Januar dauern die Ferien vom 1. bis zum 8. Von den 31 Dezembertagen gehören 22 nicht zu den Ferien, von den ersten 8 Januartagen gehören 0 nicht zu den Ferien.
Also im Dezember 31 Tage — 22 Tage = 9 Tage, und im Januar 8 Tage — 0 Tage = 8 Tage, zusammen 17 Tage.
Oder: Vom 31. Dezember bis zum 39. Dezember (= 8. Januar; 39 = 31 + 8) weiterzählen, dann subtrahieren: 39—22 = 17.

Lösung	16	15	2 Wochen	18	3 Wochen	8	9	31	39	15.11. Tage	26	1 Mon 15 Tage
Vork.	506	136	21	21	13	10	6	5	5	4	4	3
% F	57	15	2	2	1	1	1	1	1	0,4	0,4	0,3

Tab. 12: Häufigste Fehllösungen bei B3

273 der Schüler, die 16 angegeben haben, haben (verständlicherweise) nur den Zahlenwert (ohne Ausrechnung) hingeschrieben, bei 82 kann aus der Rechnung (8 + 8 o. ä.) nicht entnommen werden, ob sie beim Dezember 31 Tage angenommen haben, bei 136 dagegen läßt sich dies feststellen: 4 (= 3%) haben 30, 132 (= 97%) haben 31 Tage angenommen, und deren Fehler ist durch die Subtraktion 31—23 entstanden. Dies läßt den Rückschluß zu, daß auch fast alle anderen Schüler mit der Lösung ‚16' (und die mit ‚17' sowieso) dem Dezember 31 Tage zumessen. Bei der Lösung ‚15' sieht es anders aus: Von den 31 ‚erkennbaren' Lösungen haben 11 (= 35%) ‚31' und 20 (= 65%) ‚30' angenommen. Eine vorsichtige Hochrechnung läßt den Schluß zu, daß mehr als 90 % aller Schüler 31 Tage annehmen. In zwei Klassen hatte der Lehrer auch die Lösung ‚16' als korrekt gewertet mit der Begründung, die Schüler hätten mit Zinstagen gerechnet (in diesen Klassen etwa 50 % der Schüler). Nach dem oben dargestellten statistischen Befund und nach allen pädagogischen Erfahrungen ist dies unwahrscheinlich, es sei denn, in diesen Klassen wäre erst kurz zuvor über Zinsen (und Zinstage) (im 4. Schuljahr?) gesprochen worden. Aber auch dann müssen die entsprechenden Antworten als inkorrekt bezeichnet werden, da die Begriffe ‚Ferien-' und ‚Zinstage' verschieden sind: Die Schüler hätten einen abwegigen Begriff angewendet (Rb).
Zahlreiche Lehrer lehnten diese Aufgabe als sogenannte Fang-Aufgabe (nicht wegen der 31 Tage im Dezember, sondern wegen des Verleitens zur falschen Subtraktion 31—23) ab. — Nun ist diese Aufgabe ja keineswegs gekünstelt; sie verwendet noch nicht einmal erfundene Zahlen. Solchen Fragen, und zwar auch und gerade in dieser (scheinbar!) irreführenden Form, begegnet man immer wieder einmal: Wie viele Kopien fallen an, wenn aus einem Buch die Seiten 18—24 kopiert werden sollen? (7). Weitere Beispiele sind etwa bei *Zitterbart* (1976/1977), S. 153f, zu finden. Die ‚Fang-Eigenschaft' solcher Aufgaben ist daher eher ein Grund *dafür,* sie im Unterricht zu behandeln und auch einmal zu testen, wie sie beherrscht werden.
Die Tage sind öfters in Wochen umgerechnet; manchmal wird die Zeit direkt in Wochen angegeben. Daraus resultiert ein Gutteil der Lösungen ‚2 Wochen': Zweimal 8 Tage sind 2 Wochen; ein Schüler schließt direkt weiter: 14 Tage. Ein anderer zieht von den 16 Tagen 2 Sonntage ab (die er sowieso frei hätte). Die 18 setzt sich, soweit erkennbar, aus 2mal 9 zusammen, möglicherweise: die erste 9 abgezählt von 23 bis 31 und die zweite 9 dann im Kurzschluß vielleicht so: von 23 bis 31 sind es 8 (fälschlich subtrahiert), man muß aber 1 mehr nehmen (wie sich durch Abzählen ergibt); von 1 bis 8 sind es auch 8 (direkt abgelesen; jedenfalls korrekt), also auch 1 mehr (ein Beispiel für Interferenz von Strategien). Bei ‚3 Wochen' handelt es sich wohl um Schätzungen bzw. Rundungen. ‚8', ‚31' und ‚39' sind Ergebnisse nicht abgeschlossener Informationsverarbeitung (Rdviii). Bei ‚9' ist womöglich nur bis zum 1. 1. gerechnet, da ja damit die Klippe der Monatsüberschreitung überwunden ist (ebenfalls Rdviii). Ursachen für ‚26' sind nicht erkennbar. Insgesamt 65 (= 7% F) Schüler haben dezimal mit dem vollen Datum gerechnet, etwa:

23.12.1977	23.12.1977	23.12.	2312
+8. 1.1978	−8. 1.1978	−8. 1.	− 81
31.13.3955	31.9999	15.02 Tage	2231

und antworten „dauern 15 Wochen 1 Tag", „dauern 31. 13. Tage", „dauern 15. 11.", „bis zum 31. 13. 3955" oder knapp „15. 10. 9999", da ein solches Ergebnis für die Dauer der Weihnachtsferien doch zu seltsam erscheint. Auch die Lösung 23—8 = 15 gehört in diesen Zusammenhang (31mal (= 3%F)): Es werden Zahlen aus dem Text willkürlich miteinander verknüpft. Vielen Schülern ist jedoch offenbar nicht wohl beim Subtrahieren von Tagesdaten. Bei den 408 Lösungen ‚17', ‚16', ‚15' mit irgendeiner schriftlichen Rechnung ist in 70 (= 17%) Fällen eine Pfeilschreibweise benutzt, etwa 23. 12. $\xrightarrow{17}$ 8. 1., und in 28 (= 7%) Fällen gezählt, d. h. alle Tage aufgeschrieben, davon jedoch nur 20 korrekt, da in vieren dieser Zählreihen der 31. 12. und in vieren der 23. 12. fehlt. Die explizite Subtraktion mit 22 führen 10 Schüler aus (einmal: „Von 22 bis 31 fehlen 9."), die dann auch alle die richtige Lösung erzielen.

Vier Schüler sprechen von Sommerferien, einer rechnet sogar mit den zugehörigen Daten. Etwa 10 Schüler meinen, „die Weihnachtsfeier dauert n Tage".

B3-typische Fehler(-ursachen)

— falsche Subtraktion von Ordinalzahlen ((Rb), (Rc)) über 80%F

— dezimales Rechnen mit Kalenderdaten ca. 10%F

— 30 Tage im Dezember (Rb) ca. 5%F

— 8 Tage = 1 Woche

B4 Ein rechteckiger Tisch ist 1 m lang und 0,70 m breit. Darauf liegt eine rechteckige Tischdecke. Die Tischdecke hängt an allen Seiten des Tisches 20 cm über. Wie lang ist der ganze Rand der Tischdecke? 56 (= 5%S) +, 1008 (= 90%S) —, 56 (= 5%S) o

Typ: Vervielfältigung und Addition von Strecken (Größen); die Faktoren müssen durch geometrische Betrachtungen gewonnen werden. Zu verstehen usw. ist:

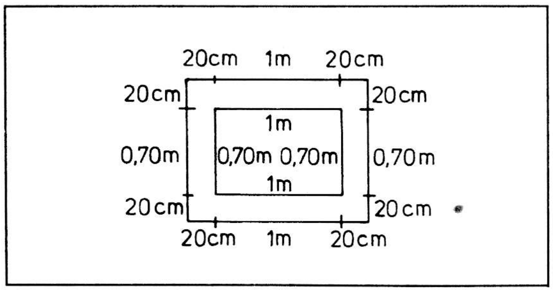


Abb. 7: Plan von Tischdecke und Tisch

(a) „Rechteckig" kennzeichnet eine Form: Ein Viereck (mit vier Seiten) und lauter rechten Winkeln (math. Wissen bzw. Sachwissen)

(b) „Tisch" bedeutet die Oberseite des Tischs (die genauere Bezeichnung ‚Tischoberseite' hätte eher Verwirrung gestiftet und unterblieb deshalb). (Sachwissen und umgangssprachliche Kompetenz)

(c) Länge und Breite sind die Längen zweier (nicht einander gegenüberliegender) der vier Seiten des Rechtecks. (math. Wissen)

(d) Das Rechteck ist durch Angabe von Länge und Breite ‚bestimmt', insbesondere sind die Längen aller vier Seiten bekannt, weil gegenüberliegende Seiten gleichlang sind. (math. Wissen; Raumanschauung)

(e) 1 m und 0,70 m sind Längenmaße. (Wissen über Größen)

(f) Die Tischdecke ist größer als der Tisch, sie liegt auf dem Tisch und hängt an allen vier Seiten ein Stück herunter, und zwar je 20 cm weit. (Raumanschauung; umgangssprachliche Kompetenz) (hier liegt eine echte Schwierigkeit darin, daß die Decke, wenn sie auf dem Tisch liegt, nicht wie in Abb. 8f eng anliegend herunterhängt, sondern an den Ecken Falten schlägt und $20\cdot\sqrt{2}$ cm weit herunterhängt)

(g) „Rechteckige Tischdecke" bedeutet: Wenn sie flach auf dem Fußboden o. ä. ausgebreitet ist, hat sie die Form eines Rechtecks (Raumanschauung)

(h) Der Rand der Tischdecke besteht aus den vier Seiten des Rechtecks, das die ausgebreitete Tischdecke darstellt. (geom. Wissen; zugleich Idealisierung)

(i) Gesucht ist die Länge dieses Randes als Summe der vier Seitenlängen. (Zielerfassung; math. Wissen; Umdeutung eines geometrischen Sachverhalts in einen arithmetischen)

(j) Aus den Größen des Tischs lassen sich die der Decke folgendermaßen berechnen: 4 Personen heben die auf dem Tisch liegende Decke gleichzeitig an den vier Ecken an, so daß sie in einer Ebene liegt. Dann werden Tisch- und Deckenrechteck miteinander verglichen. (Raumanschauung)

(k) Am besten fertigt man sich nun eine Zeichnung der beiden Rechtecke in der mittels der Vorstellung in (j) erzeugten Lage an. (Zeichnerische Modellbildung)

(l) Jede der vier Seiten des Tischrechtecks ist an jedem ihrer beiden Enden um je 20 cm zu verlängern. (Umdeutung des Überhängens in eine arithmetische bzw. geometrische Operation)

(m) 20 cm = 0,20 m. (Sachwissen über Größen (Strecken))

(n) Rechnen: $1\,m + 2\cdot 0{,}20\,m = 1{,}40\,m$

$0{,}70\,m + 2\cdot 0{,}20\,m = 1{,}10\,m$

(o) Es gibt an der Decke zwei Seiten von 1,40 m Länge und zwei Seiten von 1,10 m Länge. (math. Wissen, Raumanschauung)

(p) Rechnen: Länge des Rands:

$2\cdot 1{,}40\,m + 2\cdot 1{,}10\,m = 5\,m$

Bei 29 (= 52%R) der richtigen Lösungen befindet sich eine Zeichnung während insgesamt 128 (= 12%L) Zeichnungen vorliegen. Besonders erfolgreich sind die Zeichnungen, wo an den äußeren Rand gleich die richtigen Längen geschrieben sind (Abb. 8a; 5 (= 100%) Richtige) oder die zusätzlichen Breiten ähnlich wie in Abb. 8b oder 8c eingezeichnet sind (8 (= 100%) Richtige); weniger erfolgreich solche, wo an alle vier Seiten ‚20 cm' geschrieben ist (ähnlich Abb. 8d) oder wo nur ein Rechteck eingezeichnet ist

Lösung	0,80 m	4,20 m	3,40 m	1,20 m × 0,90 m	2,50 m	2,10 m	1,40 m × 1,10 m
Gesamt	202	143	90	41	39	36	29
%F	20	14	9	4	4	4	3
Rand	152	141	82		35	35	
Decke	14			41	1		29
hängt ü.	31		2				
Tisch	1	2					
Stellen	4		6		3	1	

Lösung	68 m	14 m	1,90 m	3,60 m	4,60 m	0,90 m	1,20 m	3,80 m	0,60 m
Gesamt	22	21	19	12	11	11	10	9	8
%F	2	2	2	1	1	1	1	1	1
Rand	7	14	17	10	11	6	6	9	5
Decke		1	2			2	3		1
hängt ü.	6					3	1		2
Tisch									
Stellen	9	6		2					

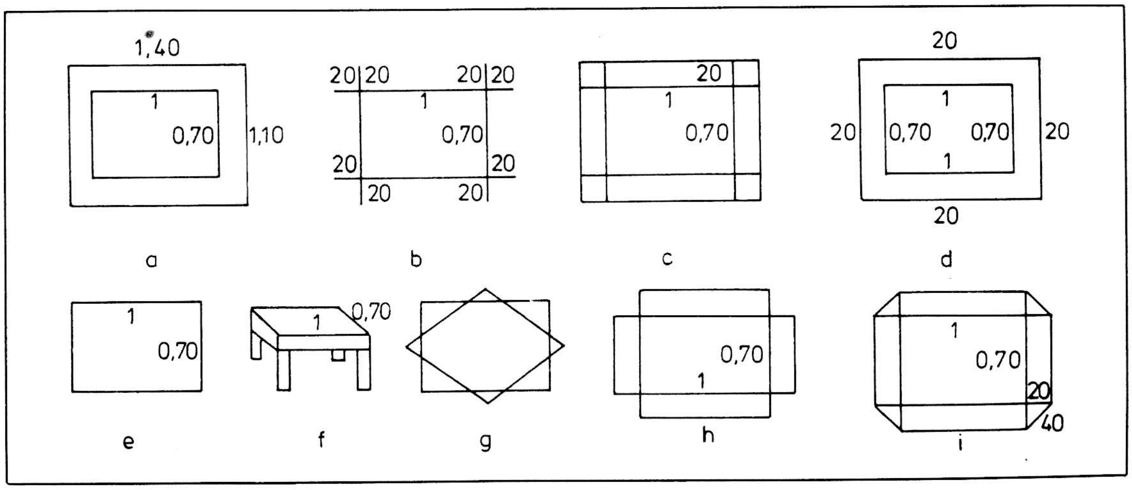
Lösung	0,50 m	1,40 m	1,50 m	2,22 m	1,42 m	1,70 m
Gesamt	8	7	7	6	6	5
%F	1	1	1	1	1	0,5
Rand	3	2	6	4	4	4
Decke		5		1	1	1
hängt ü.						
Tisch	4		1			
Stellen	1			1	1	

Tab. 13: Häufigste Fehllösungen bei B4 (die Angaben sind nach den Schülerantworten differenziert, etwa nach „der Rand", „die Decke", „der Tisch ist...lang", „hängt...über"; ‚Stellen' bedeutet: dieselbe Zahlenfolge mit anderem dezimalen Wert)

(Abb. 8e kommt nur bei Fehllösungen vor, und zwar 16mal (von 22) ‚3,40 m', aber wenigstens sind die Seitenpaare doppelt gerechnet worden). 2mal (in einer Klasse) wurden Zeichnungen wie in Abb. 8f und je 4mal wie in 8g und 8h angefertigt. Ein Schüler erhält aus Abb. 8i die richtige Lösung. Sein Vorgehen habe ich als korrekt gewertet. Die Zeichnungen wie in Abb. 8g und 8h zeugen von den Schwierigkeiten bei der Raumanschauung, nämlich sich die normalerweise mit Falten auf dem Tisch teils liegende, teils hängende Decke ganz eben vorzustellen. Auch ein Sachverhalt wie in Abb. 8f läßt eigentlich gar keine ebene Lage für die Tischdecke zu. Wie viele Schwierigkeiten müssen erst die Schüler gehabt haben, die keine Skizzen angefertigt haben. Das Vorkommen von Skizzen ist stark klassenabhängig. In zwei Klassen ist die Zahl korrekter Lösungen so hoch und sind diese Lösungen so ordentlich und untereinander gleichartig, daß zu vermuten ist, daß hier ein gewisses Training auf diese Aufgabe hin stattgefunden hat. Zur Interpretation der Fehllösungen:

‚0,80 m', ‚68 m', ‚14 m': Viele dieser Schüler gehen von einem anderen als dem geometrischen Randbegriff aus (evtl. (Rb)); für sie ist der Rand die über die Tischoberseite hinausragende (herabhängende) Fläche der Decke. 0,80 m ist dann die Gesamtbreite der vier Randstücke, auch häufig durch „hängt über" angedeutet. $2 \cdot (0{,}7 + 1) \cdot 20 = 68$ ergibt die Gesamtfläche des Randes (in geeigneten Maßeinheiten) (jedoch ohne die vier Quadrate in den Ecken, was den Schülern nicht auffällt; vgl. auch Abb. 8h). Bei $14{,}00 = 0{,}70 \cdot 20$ ist die Fläche nur für eines die-

Abb. 8: Einige Schülerzeichnungen zu B4



ser vier Stücke berechnet. Natürlich ist den Schülern nicht bewußt, daß sie eine Fläche berechnen. Auch die 2mal vorkommende Antwort „3,40 m lang und 0,20 m breit" beruht auf dieser Interpretation des Randes.

‚4,20 m', ‚1,20 m; 0,90 m', ‚2,10 m' usw.: Zu jeder Rechteckseitenlänge des Tischs wird nur einmal 20 cm addiert, da (besonders bei ‚4,20 m') die Decke an vier Seiten je 20 cm übersteht (evtl. (Rdv)).

‚3,40 m', ‚1,70 m': Hier liegt möglicherweise folgende Begriffsbildung vor (Rb): Als Rand der Tischdecke wird die Faltlinie am Rand der Tischplatte, also dieser selbst aufgefaßt. Für diese Interpretation sprechen die Werte der Schüler mit Zeichnungen wie in Abb. 8e und 8f (nämlich jeweils 3,40 m).

Angabe von Länge und Breite: In Analogie zu üblichen Aufgaben aus diesem Themenkreis, d. h. unvollständige Informationsverarbeitung (Rdviii).

‚2,50 m', ‚2,10 m', ‚1,90 m', ‚1,70 m' usw.: Umfang ist Summe aus einfacher Breite und Länge.

‚68 m', ‚14 m', ‚2,22 m', ‚1,42 m': Die unterschiedlichen Maßeinheiten bei den Zahlenangaben im Text sind nicht beachtet. Z. B. ergibt sich 68 als Produkt aus Metern und Zentimetern, oder „2,22 m = 2 · 0,70 m + 4 · 0,20 m + 2 · 1 m", wobei die Kommazahlen bei der schriftlichen Addition so geschrieben werden, als ob sie kein Komma hätten.

‚1,90 m', ‚3,80 m', ‚3,60 m': Die 20 cm werden in zu geringer Anzahl addiert, nämlich pro 2 oder sogar pro 4 Rechteckseiten nur einmal. Diese Schüler sind von einer Vorstellung von den räumlichen Verhältnissen noch weit entfernt. Sie haben lediglich bedacht, daß die 20 cm aus dem Text noch irgendwie addiert werden müssen (geht schon in Richtung (Rdvii)).

‚0,90 m', ‚1,40 m', ‚1,20 m': Diese Größen bezeichnen die Länge (Breite) der Decke. Entweder wird dies in der Antwort auch so ausgedrückt oder aber unter dem Rand wird nur eine Seite des Rechtecks verstanden.

‚0,50 m', ‚1,50 m': Entstehen aus Subtraktion von 20 cm. In den Antworten werden diese Maße oft auf den Tisch bezogen, was die Vermutung nahelegt, daß die Schüler die gegebenen Maße für die der Tischdecke halten und daraus die für den Tisch bzw. die Faltlinie berechnen wollen (evtl. Rdiii). Allerdings enthalten diese Ergebnisse weitere Mängel, z. B. sind 20 cm jeweils nur einmal abgezogen.

‚4,60 m', ‚0,60 m': Arithmetische Fehlertechniken; es hätte sich 4,20 m bzw. 0,80 m ergeben müssen.

B4-typische Fehler(-ursachen)

— anderer Begriff von Rand als der geometrische
— für jede Seite nur einmal 20 cm addiert (Raumvorstellung, Rb))
— Länge und Breite, aber nicht Umfang angegeben (Rdviii)
— nur halber Umfang angegeben (Raumvorstellung, (Rb))
— Maßeinheiten nicht beachtet (Rb)
— 20 cm unabhängig von geometrischen Verhältnissen addiert (Rb)

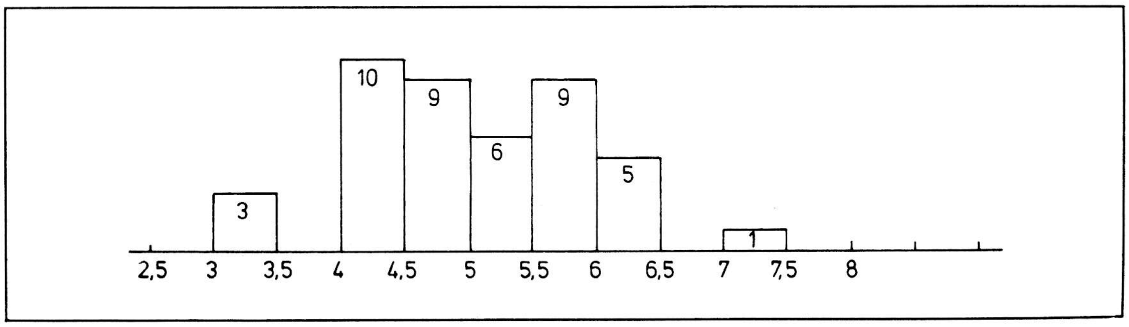
3.4. Aufgabenübergreifende Aspekte

Ei.e Würdigung des Gesamtergebnisses des Tests hängt natürlich von den persönlichen Vorstellungen darüber ab, was Viertklässler leisten können sollten. Ganz so ernst, wie sie seinerzeit *Kühnel* gesehen hat und wie sie in mancher pauschalen Kritik auch heute noch beschrieben wird, ist die Lage wohl nicht. Immerhin haben trotz scharfer Korrektur mit jeweils nur den beiden Alternativen + und — 666 (= 59%S) Schüler die Hälfte der möglichen Punktzahl erreicht. Bei der Analyse der Einzelergebnisse sieht dieses Bild eher besser aus. Erwähnenswert sind insbesondere A4 (Jungen und Mädchen) mit 69% + und A5 (Züge), eine Aufgabe aus einem Eignungstest für Höhere Schulen (AZN), mit 32% +.

In Tab. 1 sind die statistischen Ergebnisse auch nach Geschlechtern differenziert: Die Mädchen schneiden etwas schlechter ab. Einen ähnlichen Befund, jedoch mit etwas kleinerer Differenz, hatte auch *Mitschka* (1971, S. 55ff) erhalten. „Wahrscheinlich ist nur ihr Interesse geringer, und das rührt von der Rolle her, die dem Mädchen in der Gesellschaft zugewiesen wird" (S. 56). Bemerkenswert ist, daß allein in Aufgabe A4 (Jungen und Mädchen in einer Klasse) die Mädchen besser abschneiden. Dies hat möglicherweise auch seine Ursache in der gesellschaftlichen Rolle der Mädchen.

Die Mittelwerte der erreichten Punktzahlen streuen bei den 43 Klassen von 7,45; 6,34; 6,33; 6,20; 6,08; 6,05 (sechs besten Werte) bis 4,04; 4,04; 4,04; 3,44; 3,21; 3,15 (sechs schlechtesten Werte). Wie Abb. 9 zeigt, stechen drei Klassen nach unten und eine nach oben besonders ab. Die restlichen Klassen liegen zwischen 4 und 6,5 Punkten scheinbar dicht beieinander. Man muß jedoch beachten, daß diese Punktzahlen Mittelwerte sind. Dann fallen diese Unterschiede schon mehr ins Gewicht. Insgesamt gesehen

Abb. 9: Verteilung der Mittelwerte der Klassen (richtiger Lösungen)



besteht doch ein erhebliches Gefälle, dessen Ursachen zu untersuchen sich bestimmt lohnen würde.

Im folgenden möchte ich noch einige Beobachtungen notieren, die die Aufgaben allgemein und den Test insgesamt betreffen. Z. T. sind diese Beobachtungen in den einzelnen Aufgaben schon angedeutet.

Fehlertechniken aus dem arithmetischen Bereich finden sich nicht nur in den Aufgaben B5 und B1, sondern in allen anderen auch. Nur treten sie dort gegenüber den besprochenen Fehlern in der relativen Zahl und auch von der Zielsetzung des Tests aus gesehen in der Bedeutung zurück. Die Lösungswege, die, von den Testkonstrukteuren her, auf der Hand liegen, enthalten kaum arithmetische Schwierigkeiten; aber sobald ein Schüler von ihnen abweicht, begibt er sich in die Gefahr des Verrechnens. Dies ist sicher einer der Gründe, warum Schwächen in der, global gesprochen, Sachauffassung und -mathematisierung einerseits und im Rechnen andererseits oft gemeinsam auftreten.

Erwähnenswert sind etwa vereinzelt aufgetretene Mängel in der Behandlung von Divisionsresten (z. B. in A1: „2000 DM:12 = 166R8 = 166,08 DM"; in A2: „10:4 = 2 + 2 = 4" oder „ = 22"; in A4 extrem: „29:2 = 14R1 = 14,1 Jungen") oder bei stellengerechter Addition von Größen in Dezimaldarstellung mit gleichen oder verschiedenen Benennungen (in B4: ‚0,70 m + 1 m = 0,71 m"; aber „0,70 m + 20 cm = 0,90 m").

In den Stoffschwerpunkten dieses Tests ‚Größen' und ‚Brüche' kann man noch keine allzu reifen Leistungen erwarten. Zu diesen Themenbereichen haben die Grundschüler ja bis jetzt nur erste Erfahrungen gemacht. Die Ergebnisse speziell von A2 zeigen, daß ein beweglicher Umgang mit Brüchen meist noch nicht möglich ist. Dagegen bereitet das Rechnen in einzelnen Größenbereichen (auch bei Zeiten in Stunden und Minuten) weniger Schwierigkeiten, und der disziplinierte Gebrauch von Benennungen bei vielen Schülern (und zwar meistens korrekt) erlaubt die Vermutung, daß zumindest die Notation bei Rechnungen mit Größen an den Schulen geübt wird. Sobald allerdings mehrere Größenbereiche zugleich beteiligt sind, werden die Erfolge geringer.

Ein Fehler ganz besonderer Art ist bis jetzt nicht angesprochen worden: Der Antwortsatz mit falschem Zahlenwert trotz richtigen Werts bei der Ausrechnung (im Test ca. 60mal (= 0,56 % L)). Hier liegen wohl Ursachen der Art (Rdvi; Störungen des Kurzzeitgedächtnisses) oder (Ra; affektiv-situationsspezifische) vor.

Bei einfachen Aufgaben kann man manchmal Komplizierungen durch die Schüler beobachten: In B1 ist die Stunde mit 24 Minuten (statt 60) gerechnet, in B2 ist das Zählwerk des km-Zählers auf Meter ausgedehnt bzw. es werden andere Zahlen als 1 subtrahiert. Dies sind wohl nicht gezielte Abwandlungen. Aber auch bewußte Komplizierungen treten auf, vor allem als Folge entsprechender Einschleifübungen im Unterricht, aber auch der Anweisung auf den Arbeitsblättern („Rechne und antworte hier:"), der Hinweise der Lehrer, die Rechnungen und Gedanken schriftlich zu fixieren, und des grundsätzlichen Charakters von Sachrechenaufgaben, zum Rechnen aufzufordern: Da subtrahieren Schüler in B2 schriftlich 1 oder dividieren in A1 schriftlich (mit allen Nullen) 2000 durch 2, aber bezeichnenderweise nur die, die das Gehalt als Jahresgehalt interpretieren und für die daher die Aufgabe wohl zu anspruchslos ist. Oder gewisse Rechenschritte werden (überflüssigerweise) hingeschrieben, etwa in B3: ‚8 + 8'; oder in A3: „Wir fragen:.... Wir rechnen: 120 DM. Wir antworten: ...." (falsches Ergebnis); und A2 (Kakaoflaschen) und A4 (Jungen und Mädchen) enthalten viele Beispiele, wo einem Ergebnis noch eine schriftliche Rechnung hinterhergeliefert wird.

In diesen Zusammenhang gehören auch Probe und Überschlag. So bedeutsam beide, besonders der Überschlag, für jede arithmetische Aktivität auch sind, ihr Wert im Sachrechnen ist doch begrenzt: Den Schülern, die in B5 die Kosten eines Wagens mit 9 · 108000 DM = 972000 DM veranschlagt haben, hätte auch die Probe (972000:9 = 108000) und der Überschlag (10 · 100000 = 1000000) nichts genützt; sie haben ja richtig gerechnet, ihr Fehler liegt woanders. Die wenigen Proben, die bei dem Test durchgeführt sind, sind denn auch auf richtige und falsche Antworten gleichmäßig verteilt.

Über die Wirkung des in einigen Klassen eingeführten schriftlichen Lösungsschemas („Wir wissen: ... Wir fragen: ... Wir antworten: ...") läßt sich nichts sagen, ebensowenig über den Erfolg der Methode, den Zusammenhang dreier Größen in einem Relationsdiagramm darzustellen: Solche Diagramme sind vor allem bei A2 zu sehen, richtige und falsche. Ergiebiger als ein solcher statischer, innermathematischer Relationengraph wäre eine Darstellung der Sachsituation oder des Lösungsplans in einem Diagramm. Prompt scheinen sich lediglich die zeichnerischen Darstellungen in B4 (Tischdecke) und z. T. in A5 (Züge) deutlich günstig auszuwirken. Es ist jedoch fraglich, ob die Zeichnung für den Durchblick durch den Sachverhalt oder ob dieser für sie eine Voraussetzung ist; vermutlich besteht eine Wechselwirkung. Und in vielen Klassen scheint es bis jetzt versäumt worden zu sein, diesen Wechselwirkungsprozeß bei den Schülern zu initiieren; Zeichnungen wurden nämlich nur in wenigen Klassen, dann aber von der Mehrzahl der Schüler angefertigt.

Recht unterschiedlich, und zwar von Klasse zu Klasse, aber auch innerhalb einzelner Klassen ist das Niveau des ‚Anschriebs' (und der Rechtschreibung, Bsp.: „Tischtege"). Besonders A4 (Jungen und Mädchen) verleitet zu einer Kette „29—3 = 26:2 = 13 + 3 = 16", weil da nicht schriftlich (untereinander) gerechnet werden braucht. Es kommt aber auch „72:60 = 12" oder „301090—1 = 301091" (falsches Operationszeichen) vor. In diesem Feld ist noch einiges zu tun.

Nach diesen mehr methodischen und mathematikbezogenen Erwägungen noch einige *grundsätzlichere Anmerkungen:* Die Mehrzahl der Schüler hat wohl mit der Mehrzahl der Aufgaben etwas anzufangen gewußt, d. h. die Situationen werden durchschaut, eine Fragestellung

erfaßt, Bedingungen analysiert, ein Handlungsplan aufgestellt und ausgeführt — dies alles nur nicht in jedem Fall und vor allem nicht in jedem Fall korrekt.
Von den Fehlerursachen im Informationsprozeß wäre vielleicht besonders das Nichtabschließen der Informationsverarbeitung zu erwähnen (neben dem wohl geläufigeren Nichtberücksichtigen von relevanten Bedingungen): Dies tritt besonders dann auf, wenn zur Erlangung gewisser Ergebnisse, meist zweier Größen, bereits einiges an Anstrengung eingesetzt worden und die Ermittlung der Lösung dann nur noch ein kleiner Schritt ist (in fast jeder Aufgabe, besonders in A4: nach der Zahl der Mädchen wird nicht mehr die Zahl der Jungen ausgerechnet; in A5: die Entfernungen der Züge werden nicht addiert; in B4: Länge und Breite der Tischdecke werden angegeben, jedoch nicht die Gesamtlänge des Randes). Maßnahmen gegen diese Erscheinungen sind vor allem im methodischen Bereich anzusiedeln (etwa Aufsplitterung der Frage, optische Hilfen usw.): diese Maßnahmen müssen sich aber letztendlich auch überflüssig machen.
Aber besonders die beiden folgenden Fehlerursachen haben sich als verantwortlich für aufgetretene Fehllösungen gezeigt:
(Fi) bei manchen Begriffen ein Abweichen vom üblichen Verständnis bzw. ungenügende Ausbildung (Rb) (oft eine Sache der persönlichen Entwicklung und des weiteren Unterrichts),
(Fii) der Drang, den Sachverhalt sofort auf ein geläufiges, einfaches Rechenschema zurückzuführen (Rc) (weil die Aufgaben ja zur Mathematik gehören und Mathematik sich nach wie vor in erster Linie als Rechnen darstellt).
Diese Ursachen hängen mit zahlreichen Ursachen bei Informationsaufnahme und -verarbeiten beim Sachrechnen eng zusammen und werden von diesen verstärkt.

4. Konsequenzen?

Was kann man gegen diese Hauptursachen (Fi) und (Fii) tun?
Zu F(i): Eine Konsequenz kann nicht darin bestehen, solche Fachtermini wie ‚pro Arbeitsstunde', ‚Monatsgehalt', ‚Fahrzeit' oder Wendungen wie ‚voneinander entfernt' oder ‚der km-Zähler zeigt davor' kindertümelnd umschreiben zu wollen oder solche Probleme wie die Zählung der Ferientage im Unterricht von den Kindern fernzuhalten. Das würde einmal die Texte aufblähen, unübersichtlich machen und nur neue Quellen für Mißverständnisse schaffen. Ein zweiter, viel wichtigerer Grund verbietet diese Konsequenz: Der Mathematikunterricht mit dem Sachrechnen steht auch im Dienste der Umwelterschließung, und das heißt speziell: die Schüler sind an die Auseinandersetzung mit solchen unverstandenen Begriffen oder scheinbaren ‚Fallen' heranzuführen. Unterricht ist immer auch Sprach- und Sachunterricht, und wo, wenn nicht im Mathematikunterricht können solche Begriffe und Probleme, die eng mit Zahlen verknüpft sind, erworben bzw. bezwungen werden (eventuell fächerübergreifend).
Eine zu enge Sicht des Mathematikunterrichts (bei Lehrern, Schülern und Gesellschaft) als Rechenunterricht ist letzten Endes auch für (Fii) verantwortlich. Abhilfe könnte auch hier eine stärkere Orientierung an der umwelterschließenden Funktion des Mathematikunterrichts schaffen. Für das Sachrechnen heißt das: Noch intensivere Hinwendung zur Sachsituation und Abkehr vom eingekleideten Zahlenrechnen (das an anderer Stelle durchaus wertvoll sein mag). Das bedeutet keineswegs, daß die Einbindung solcher Sachsituationen in kleinere Sachaufgaben aufgegeben werden müßte, sondern daß dem ‚Schema-Rechnen' ein Ende gemacht wird. Möglichkeiten sind vor allem in den Aufgaben A2, A4, B3, B4 und in zahlreichen Vorschlägen in der Literatur aufgezeigt. Im Zuge solcher Auseinandersetzungen mit der Sache erwerben die Schüler auch ein Gespür für realistische Situationen, insbesondere für Größenordnungen, und werden in Zukunft mißtrauisch, wenn sich bei ihrer Rechnung ein Jahresgehalt von 3000 DM oder ein Neuwagenpreis von 1200 DM oder 972000 DM ergibt. Dann sind sie auch in der Lage, schon vorher eine Schätzung vorzunehmen, und schon einen Schritt weit von der Strategie weg, sich möglichst rasch auf Rechenoperationen zurückzuziehen.