Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion

Peter BENDER, Kassel

Kaum ein Inhalt des Mathematikunterrichts erfreut sich derzeit einer so dauerhaften Ruhe in der Diskussion in der deutschen Mathematikdidaktiköffentlichkeit wie die Geometrie: Es ist weitgehend unumstritten, daß Geometrieunterricht stattfinden soll, eine Propädeutik in der Primarstufe (und) bis zum 6. Schuljahr und ein mehr systematischer Durchgang in der Sekundarstufe I. Dabei sind (die) zentrale(n) Objekte der Beschäftigung geometrische Abbildungen. Das heißt dann „Abbildungsgeometrie", „abbildungsgeometrische Methode" oder „Abbildungsmethode" (Bosch 1933b, Faber 1956, Brankamp 1958).

Es ist kein großes Geheimnis, daß die Schulwirklichkeit dem im Schrifttum manifestierten Anspruch an Umfang und Inhalt des Geometrieunterrichts kaum gerecht wird. Warum Lehrer dazu neigen, gerade den Geometrieanteil am Mathematikunterricht zu kürzen, wenn sich im Laufe des Schuljahrs Zeitmangel einstellt (oder auch ohne Not), hat vielerlei Ursachen: Isolierung der Geometrie vom restlichen Stoff, fehlender bzw. oberflächlicher Wirklichkeitsbezug, schlechtere und aufwendigere Effektivitätskontroll- und Leistungsmeßmöglichkeiten, gerade in der Abbildungsgeometrie eine für Lehrer und Schüler anspruchsvolle Begrifflichkeit usw.

Es fehlt keineswegs an inhaltlichen und methodischen Vorschlägen zur Modifizierung des Geometrieunterrichts, insbesondere auch durch Realitätsbezug – das Axiom der abbildungsgeometrischen Methode bleibt dabei aber regelmäßig unangetastet.

Im folgenden möchte ich den historischen Gang der didaktischen Diskussion in Deutschland über die Abbildungsgeometrie nachvollziehen und die für sie vorgebrachten Argumente einer kritischen Prüfung unterziehen. Ich komme dabei zu dem Ergebnis, daß die mit der Abbildungsmethode angestrebte Verbesserung des Geometrieunterrichts nicht im versprochenen Umfang stattgefunden hat und in diesem Umfang gar nicht stattfinden konnte. Dazu gehe ich in folgenden Schritten vor:

Ich hatte zahlreiche Gelegenheiten, über meine Überlegungen zu diskutieren. Allen Gesprächspartnern, auch und gerade denen, die weniger meiner Meinung waren, danke ich. Mein besonderer Dank gilt Herrn KIRSCH, der nicht nur mit seinen scharfsinnigen Arbeiten zum Funktionsbegriff, sondern auch mit vielen Anregungen in persönlichen Gesprächen die vorliegende Arbeit beeinflußt hat.

1. Was ist eigentlich Abbildungsgeometrie?

Abbildungsgeometrie treiben heißt (in einer leichten Generalisierung dessen, was es im Schulunterricht bedeuten soll): Operationen von Gruppen auf geometrischen Räumen untersuchen, wobei es wesentlich um Untergruppen und deren Invarianten geht. In der Schule wird heutzutage fast ausschließlich die euklidische Ebene und die Gruppe ihrer geradentreuen bzw. oft nur ihrer längentreuen Permutationen behandelt. Das Schwergewicht der Betrachtungen liegt – in den üblichen verbindlichen Lehrgängen – eindeutig auf der Struktur des Raums, auf dem operiert wird, und weniger auf der der Gruppe, die operiert. D.h. die Unterrichtsobjekte sind weniger die Untergruppen der Abbildungsgruppe und mehr die Teilmengen der Ebene, aber durchaus auf Elemente der Abbildungsgruppe bezogen, also Fixpunktmengen, Fixmengen (symmetrische Figuren) und invariante Funktionale (Flächeninhalt, Winkelmaß, Länge).

Eine genetische, begriffssystematische (nicht mathematische!) Komplizierung tritt nun dann noch ein, wenn die Definition des zugrundeliegenden Raums mittels eines Axiomensystems vorgenommen wird, das bereits Axiome über Abbildungen enthält. Während etwa HILBERT zuerst den euklidischen Raum definiert, Kongruenz als Grundbegriff verwendet, eher beiläufig feststellt, daß durch zwei hinreichend allgemeine kongruente Punktmengen eine Kongruenzabbildung des ganzen Raums auf sich selbst bestimmt ist (Hilbert 1899/1972, S. 27f.), und damit die Möglichkeit eröffnet, zu untersuchen, wie solche (und allgemeinere) Abbildungen auf dem Raum operieren, sind diese z.B. bei WILLERS (1922) bereits Konstituenten des Axiomensystems, und der Begriff der Kongruenz ist ein aus ihnen abgeleiteter.

Nun ist Abbildungsgeometrie in dieser (schärferen oder schwächeren) Ausprägung nicht lediglich eine *Hintergrund*theorie (etwa im Sinne BECKERS 1977) für die Geometrie im Unterricht, sondern eine *Ziel*geometrie (s. Bigalke/Hasemann 1978, S. 195), selbstredend in Sprache, Umfang usw. für Schüler modifiziert.

Es ist – wenigstens heutzutage – eine mathematikdidaktische Trivialität, daß die Begriffe der Abbildungsgeometrie bei den Schülern durch handelnden Umgang mit realen Objekten anzubahnen sind. Es liegt nahe, hierfür Elementarkinematik zu treiben.

Die Kinematik befaßt sich mit Bewegungen, das sind Abbildungen der folgenden Form (gleich etwas spezialisiert): Sei E der euklidische Raum, $F \subseteq E$ eine Figur (Teilmenge), I das reelle Einheitsintervall, dann heißt eine stetige, hinreichend oft differenzierbare Abbildung $b: F \times I \rightarrow E$ Bewegung, falls $b(F,O)=F$, $b(F,t)$ kongruent zu F für alle $t \in I$ und die Geschwindigkeit jedes Punkts konstant ist. Zur *Elementar*kinematik sollen nur solche Bewegungen gehören, für die der Weg jedes Punktes $P \in F$ (die orientierte Menge $b(P \times I)$) konstante Krümmung und Windung hat, also eine Schraubenlinie (mit den Spezialfällen der Geraden und des Kreises) ist. Außerdem sind auch Hintereinanderausführungen mit geeigneten Parametrisierungen solcher Bewegungen zugelassen.

Da Elementarkinematik in der Schule regelmäßig nur in der euklidischen Ebene getrieben wird, gibt es zunächst nur Translationen und Rotationen. Zugleich wird dabei die Möglichkeit eröffnet, Spiegelungen einzuführen: Die Ebene ist in den Raum eingebettet, die Figur F wird dann im Raum um die Spiegelachse rotiert, die in der Ebene liegt. Wesentlich ist, daß $b(F,1)$ wieder eine Teilmenge der Ebene ist.

Bei zeichnerischen Konstruktionen kann man sich mit einem solchen Verlassen der Ebene nicht mehr helfen. Da nun aber (auch schon bei Translation und Rotation möglich) die Figuren nicht mehr als Ganzes, sondern punktweise bewegt werden, kann man Spiegelungen dann doch komplett in der Ebene durchführen, nämlich die Punkte auf Geraden senkrecht zur Spiegelachse mit konstanter Geschwindigkeit transportieren, wobei allerdings die Zwischenfiguren nicht mehr kongruent zu F sind. Solche Abbildungen s_g:FxI→E, wo für jeden Punkt P von F der Weg s_g(PxI) die Strecke ist, die senkrecht auf der Spiegelachse g steht und die Länge 2·d(P,g) hat, sollen ebenfalls zur Elementarkinematik zählen. Auf naheliegende Weise lassen sich auch zentrische Streckung, Scherung, Schrägspiegelung usw. elementarkinematisch auffassen.

In der Schule werden zu vorgegebenen Paaren von Figuren elementarkinematische Bewegungen gesucht, die diese ineinander überführen, bzw. für solche Bewegungen werden Beziehungen zwischen Anfangs- und Endlage betrachtet. Elementarkinematik wird dabei anschaulich und ganz ohne den ihr adäquaten mathematischen Abbildungsbegriff getrieben. Wenn ich im weiteren Verlauf dieser Arbeit von ‚Bewegungs'geometrie rede, so sind damit Elementarkinematik nebst Weiterentwicklungen gemeint.

Anders als bei der Elementarkinematik soll bei der Abbildungsgeometrie der voll ausgebildete Abbildungsbegriff wesentlicher Bestandteil sein: Definitions- und Wertebereich sind hier sogar identisch, sie sind der (zwei- oder dreidimensionale) euklidische Raum (und nicht beschränkte Figuren), und es kommt nicht im geringsten auf irgendwelche stetige Übergänge zwischen Ur- und Bildfiguren an. Schließlich sind die geometrischen Abbildungen Gruppenelemente, mit denen ähnlich wie mit Zahlen zu operieren ist.

Noch ein Wort zur Bezeichnungsweise: In der älteren Literatur wird zwischen Funktion mit reellzahligem Wertebereich und Abbildung als geometrischer Transformation unterschieden. Ich gebrauche die Begriffe ‚Funktion' und ‚Abbildung' synonym und verwende ‚geometrische Abbildung' im Sinne der soeben erklärten Abbildungsgeometrie.

2. Wie bzw. mit welcher Begründung ist die Abbildungsgeometrie in die Schule gekommen?

In vielen Arbeiten wird mehr oder weniger direkt Klein, oft speziell wegen seiner mathematischen Arbeit „Erlanger Programm" (Klein 1872/1921) und der Meraner Reformvorschläge (Gutzmer 1908/1980), die Einführung der Abbildungsgeometrie in den Unterricht zugeschrieben, etwa: Baumsteiger 1949, Sengenhorst 1955, Niebel 1956, Michel 1958, Steiner 1966, S. 218, Griesel 1967, Lenné 1969, S. 266, Picker 1971, Palzkill/Schwirtz 1971, S. 43 u. v. a.

Tatsächlich hat Klein einen im Vergleich zu anderen Mathematikern des 19. Jahrhunderts großen Einfluß auf den Mathematikunterricht an den deutschen höheren Schulen gehabt: Zum einen hat er sich in den letzten dreißig Jahren seines Lebens (bis 1925) persönlich um die Belange dieses Unterrichts gekümmert und die Meraner Vorschläge mit beeinflußt, zum anderen hatte er Lietzmann als engen Mitarbeiter (Fladt 1950a, S. 116, siehe auch Lietzmann 1930 und 1950, S. 218), und Lietzmann war immerhin jahrzehntelang einer der führenden deutschen Mathematikdidaktiker, der den Mathematikunterricht nachhaltig mit seiner Methodik (Lietzmann 1916, 1961) und als Schriftleiter der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (ZMNU) geprägt hat. Teile dieser Methodik von 1916 können wohl als Interpretation der Meraner Vorschläge aufgefaßt werden (etwa S. 151–156, 178–183, 244–249).

So wenig wie dort steht in den Meraner Vorschlägen etwas von Abbildungsgeometrie, und die Idee, den Transformationen beim Geometrietreiben eine zentrale Rolle einzuräumen, war schon vor Klein in der Mathematik weit entwickelt und verbreitet und – unabhängig von Klein – bereits in Schulbüchern verwertet. Im Erlanger Programm geht es, grob gesagt, um die Abbildungsgeometrie der Projektiven Geometrie.

2.1 Anfänge der „Bewegungs"geometrie (ca. 1870 bis ca. 1930)

Jedenfalls versucht Wolff in seinem Vortrag auf der Jahresversammlung 1933 des Fördervereins die Akzente dahingehend zurechtzurücken (Wolff 1933): „. . . Es blieb ein letzter Schritt übrig, nämlich alle Geometrie zu klassifizieren. Diesen Schritt vollbrachte Felix Klein . . . Wir müssen uns hier überlegen, ob wir den Soennecken-Ordner des Erlanger Programms in die Schule einführen wollen, und wenn ja, in welchem Ausmaß" (S. 336). Er weist darauf hin, daß bereits in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts diskutiert wurde, ob die „neuere Geometrie" in den Schulunterricht einzubringen sei (Sturm 1870, ZMNU 1876, Hauck 1877, Schlegel 1877 u. a.). Dabei handelt es sich wesentlich um den Transformations- und Verwandtschaftsgedanken. Der Begriff der Verwandtschaft ist schon 1827 von Möbius eingeführt worden (Wolff 1933, S. 334): Zwei Figuren heißen (in heutiger Sprache) – z. B. affin – verwandt, wenn es eine – affine – Abbildung des Raumes gibt, die die eine auf die andere abbildet. Wolff sieht hauptsächlich die Arbeiten des Mathematikers Fiedler in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts und die Rede Hankels 1869 zum Eintritt in den Tübinger Senat als Grundlage bzw. Auslöser für diese Diskussion an.

Als „eines der ältesten deutschen Lehrbücher, in dem der Transformationsstandpunkt zur Geltung kommt", nennt Klein (1908/1925, S. 286) zwar „das unter dem Einflusse der Möbiusschen Arbeiten geschriebene ‚Lehrgebäude der niederen Geometrie', für den Unterricht an Gymnasien und Realschulen entworfen, von C. A. Bretschneider (Jena, Frommann 1844)." Allerdings besteht diese Geltung lediglich darin, daß, ohne weitere Bezüge zum sonstigen Inhalt, in dem Teil über Koordinatengeometrie die Transformatinsgleichungen für Translation und Rotation behandelt werden (S. 442, 445).

Erst in den 70er und 80er Jahren gibt es dann Lehrbücher für den Geometrieunterricht, in denen von der Beweglichkeit von Figuren stärker Gebrauch gemacht wird. Bei Kruse (1875) findet sich schon die Konstruktion eines „Situationspunkts" bzw. einer „Situationsaxe" (Rotationszentrum bzw. Translationsspiegelachse) für zwei kongruente Dreiecke (S. 57) bzw. analoge Konstruktionen für äquiforme Dreiecke (S. 171). Ähnliches bringt Müller (1874, z. B. S. 109).

Erheblich weiter gehen Henrici/Treutlein (1881–1883/1901–1910): Figuren heißen kongruent, wenn sie durch solche Bewegungen zur Deckung gebracht werden können, bei denen sie „unverändert bleiben" (1. Teil, S. 16). An Bewegungsarten werden unterschieden (in der Ebene): „Umdrehung", „Umwendung", „Verschiebung" und „Drehung", wobei „Umdrehung" Zentralspiegelung und „Umwendung" Rotation einer Halbebene um eine Gerade um 180° (im Raum) bedeutet (S. 17). Beweise werden „mit Hilfe von Bewegungen oder durch Hinzufügen weiterer Linien (Hilfslinien)" (S. 19) geführt. In der Tat wird von den Bewegungen als Beweismittel kräftig Gebrauch gemacht, z. B. auch bei der Kongruenz der parallelen Parallelogrammseiten (S. 67) oder beim Kathetensatz (S. 82). Es wird sogar festgestellt: „Die Umwendungen um zwei zueinander senkrechte Achsen bringen eine Figur in dieselbe Lage wie die Umdrehung um den Schnittpunkt der Achsen" (S. 33). Als Abbildungen werden die Bewegungen allerdings lediglich im Vorwort (zur 4. Auflage) des 1. Teils (S. III) bezeichnet. Im 2. Teil werden dann die restlichen drei der „vier Arten der Abbildung durch Bestrahlung" (S. 63), nämlich Ähnlichkeit, Affinität und Projektivität, behandelt. Im 3. Teil werden die Betrachtungen auf den Raum ausgedehnt, und auch die Darstellende Geometrie wird unter dem Oberbegriff der Abbildung behandelt.

Es handelt sich aber weder bei Henrici/Treutlein, noch bei anderen um eine präzise Fassung des mathematischen Abbildungsbegriffs, die ausgebildet oder gar thematisiert werden soll. Bewegungen sind Mittel zur Herstellung und Analyse von Verwandtschaften. Wichtig ist oft auch die ganze Schar transformierter Figuren.

Im Vergleich zu anderen, auch zu ‚bewegungs'geometrisch orientierten, Schulbüchern jener Zeit stehen Henrici/Treutlein der modernen Abbildungsgeometrie schon ausgesprochen nahe. Obwohl sie noch Auflagen bis 1921 erleben, „scheinen" sie (und die anderen) „doch nicht die nötige Resonanz gefunden zu haben" (Lietzmann 1916, S. 249). Auch weitere bis ca. 1930 erschienene Schulbücher, in denen ‚bewegungs'geometrische Betrachtungen mehr oder weniger umfangreich durchgeführt werden bis hin zur expliziten Behandlung des Gruppenbegriffs auf der Mittelstufe (nach Fladt 1933a), setzen sich nicht durch, auch nicht die „Raumlehre für den Arbeitsunterricht, durchgehend auf Bewegung gegründet" von Kusserow (1928), der wiederum – besonders anschaulich im Stil von (Treutlein 1911, S. 202f.) – den kontinuierlichen Bewegungsablauf auch bei Teilfiguren betont.

Zu beachten ist, daß das Schlagwort „Neuere Geometrie" (o.ä.) sich damals, und mit Modifikationen auch später noch, auf eine irgendwie geartete „Überwindung des Euklidschen Systems" in Wissenschaft und Schule bezieht und daß je nach Autor an folgende Veränderungen im Unterricht gedacht ist:

a) Projektive gegenüber Euklidischer Geometrie (z.B. Sturm 1870, Hauck 1877, Salkowski 1924)
b) Zurückdrängung der Analytischen Geometrie (z.B. Sturm 1870, Schlegel 1877)
c) Fusion von Geometrie und Arithmetik (z.B. Klein 1908/1925, S. 228, Schülke 1927)
d) Fusion von Stereometrie und Planimetrie (z.B. Klein 1908/1925, S. 228)
e) Betrachtung von Bewegungen und Verformungen (alle Zitierten)
f) Verwendung des Gruppenbegriffs (z.B. Salkowski 1924)
g) Behandlung von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten statt von Einzelheiten (zB. Sturm 1870, Hauck 1877, Schlegel 1877)
h) Lokales Ordnen statt starrem Beweisverfahren im dauernd wiederholten Dreischritt „Voraussetzung, Behauptung, Beweis" (nach Fladt 1962, S. 444)
i) Stärkere Berücksichtigung der Anschauung und der darstellenden Geometrie (z.B. Hauck 1877, Diekmann 1893, Klein 1908/1925, S. 228, Müller 1919)
j) Einführung einer Propädeutik (z.B. Treutlein 1911)

und nach einer exakteren Fassung des Abbildungsbegriffs und der Axiomatik

k) Kongruenzabbildung, speziell Spiegelung, statt Kongruenz als Grundbegriff
l) Abbildungen und ihre Gruppen statt Figuren als Betrachtungsobjekte.

Oft sind mehrere dieser Gesichtspunkte miteinander verwoben, und es ist nicht immer einfach, die Argumente aufzutrennen und einem bestimmten Aspekt zuzuordnen. Folgende Begründungen (in weitem Sinne) für die ‚Bewegungs'geometrie im Unterricht lassen sich aber ausmachen:

- die Beweglichkeit selbst (Aufhebung der „Starrheit")
- der Anschluß an die mathematische Forschung
- größere Allgemeinheit der Beweise
- Anschaulichkeit.

Gleichzeitig mit (und wohl auch gefördert durch) ‚bewegungs'geometrischen Betrachtungen tritt eine gewisse Lokkerung der äußerlichen Strenge im Geometrieunterricht auf. Nach wie vor hat dieser aber die Funktion, „logisches, formales Denken zu üben" (Lenné 1969, S. 265).

2.2 Zur Rolle Kleins und des Erlanger Programms

Die letzte der fünf Doktorthesen des 19jährigen Klein (er hat bereits mit 16 Jahren die Schule verlassen) lautet: „Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden" (Klein 1868/1921, S. 49). Dies wird in der Literatur ab und zu angeführt (Fladt 1962 als Motto und S. 442, Niebel 1956, S. 7, Griesel 1967, Lorenz 1974, S. 15). Man sollte dieser These nicht allzu viel Bedeutung beimessen. Ihr Zweck war, ein Thema für das Rigorosum zu liefern. Die dritte These Kleins ist z.B.: „Bei Erklärung der Lichtphänomene kann die Annahme eines Lichtäthers nicht umgangen werden" (Klein 1868/1921, S. 49).

Klein hat sich wohl erst um 1900 verstärkt Fragen des Schulunterrichts zugewandt (nach Lietzmann 1955, S. 215). Insbesondere findet sich im Erlanger Programm kein Bezug zu diesem (einen direkten Bezug sehen jedoch Niebel [1956, S. 9], Schupp [1968/1973] u.a.), und statt von „Verwirklichung des Erlanger Programms in der Schule" (o.ä.) spricht man vielleicht besser von „Einbringen von Ideen des Erlanger Programms in den Unterricht" (o.ä.).

Eine Übersicht über Kleins Gedanken zum Unterricht geben (Klein 1908/1925), S. 226ff. und auch die Meraner Vorschläge von 1905 (Gutzmer 1908/1980). Hauptsächlich geht es dort um Anwendungen und Infinitesimalrechnung, während der Geometrieunterricht vor allem durch die Forderung nach Pflege der Raumanschauung und des funktionalen Denkens mit erfaßt ist. Die Damnu-Lehrpläne von 1922 und die Richertschen Lehrpläne in Preußen von 1925 sind ausdrücklich im Sinne jener Meraner Vorschläge erstellt und werden auch so gesehen (Damnu 1922/1980, Richert 1925/1980).

Klein (1908/1925, S. 228) etwa erhebt nicht die Forderung nach Abbildungsgeometrie und Gruppen im Unterricht, sondern nach „Beweglichkeit einer jeden Figur". Und „diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet, z.B. bei Gestaltsänderung der Vierecke, Änderung in der gegenseitigen Lage zweier Kreise usw." (Gutzmer 1908/1980, S. 61). Das wesentliche Wörtchen, das den Unterschied zur Abbildungsgeometrie im heutigen Sinn klar gemacht, ist „fortwährend" (vgl. meine Diskussion des Arguments B [funktionales Denken] weiter unten im 3. Abschnitt).

Dieses Frageschema „was geschieht mit . . ., wenn . . ." liefert bei Wittmann (1974/1978, S. 73) eine Komponente des sog. (erweiterten) „operativen Prinzips".

Noch 1914 steht in der didaktischen Diskussion die projektive Geometrie im Vordergrund. Ihr wird (siehe Lietzmann 1916, S. 244) ein ganzes Heft der ZMNU (1914) gewidmet. Erst SALKOWSKI (1924) skizziert einen Unterrichtsgang in Projektiver Geometrie (als Fortsetzung der Darstellenden Geometrie und als Kegelschnittslehre), in dem Gruppen eine wesentliche Ordnungsfunktion haben: „In einem solchen Lehrgang wird zwar von Gruppentheorie nicht viel die Rede sein, trotzdem ist sie es, die die Entwicklung durchdringt und beherrscht“ (Salkowski 1924, S. 9). Durchgesetzt im Schulunterricht hat sich die Projektive Geometrie allerdings schon damals nicht.

2.3 Erste Bemühungen um Abbildungsgeometrie (ca. 1930 bis ca. 1955)

Nachdem HILBERT (1899/1972) nach wesentlichen Vorarbeiten durch PASCH (1882) überhaupt ein Axiomensystem für die Euklidische Geometrie und SCHUR (1909) eines mit Bewegung statt Kongruenz als Grundbegriff geliefert haben, entwickelt WILLERS (1922) nach Prüfung mehrerer vorliegender Axiomensysteme ein didaktisch orientiertes, das die Spiegelung als Grundbegriff verwendet. Dieses wird in dem grundlegenden Werk von SCHWAN (1929) weiter ausgeformt. (Hier, und nicht in dem Buch von BACHMANN (1959), das in diesem Zusammenhang öfters erwähnt wird, ist der angemessene fachliche Hintergrund für die Bestrebungen geschaffen worden, den Aufbau der Schulgeometrie auf den Spiegelungsbegriff zu gründen.)

„Der Förderverein hat sich auf seiner Hauptversammlung Ostern 1932 in Aachen mit dem Gruppenbegriff, Ostern 1933 mit dem Abbildungsbegriff beschäftigt“ (ZMNU 1933). U. a. berichtet Fladt (1933a) über Schulbücher und erwähnt besonders BEHREND/MORGENSTERN (1932), wo schon in dem Teil für die Mittelstufe der Transformations- und der Gruppengedanke voll zum Tragen kommen. Jedoch stellt BECK (1933, S. 259) fest, daß diese Gedanken schon bei den Lehrern längst noch nicht „lebendiger Besitz“ geworden sind.

Einige Didaktiker beteiligen sich dann an einer Aussprache in der ZMNU (Beck 1933, Bosch 1933b, Fladt 1933b, Hofmann 1933, Kerst 1933, Schülke 1933, Dreetz 1934, ZMNU 1934), begrüßen dabei einhellig die Einführung der abbildungsgeometrischen Methode schon auf der Mittelstufe und beurteilen lediglich die explizite Verwendung des Gruppenbegriffs zurückhaltender. Als Gründe werden angeführt: „Ordnung; Weg zur Auffindung von Aufgabenlösungen“, „‚Desarithmetisierung‘“, „Der Abbildungsgedanke ist dagegen genügend bekannt (Erdkunde, Lichtbildprojektion, Photographie!)“ (Bosch 1933b), „. . . gehört der Abbildungsbegriff in jeden gesunden Unterricht hinein“, „aber auch die Zusammensetzung der Abbildungen soll zur Sprache kommen“, „die Zusammensetzung der Abbildungen führt zum Gruppenbegriff“ (Fladt 1933b), „sie gestatten auch ohne weiteres, den geometrischen Lehrstoff an dem Schüler bekannte Tatsachen und geläufige Vorstellungen anzuknüpfen“ (Hofmann 1933), „die Eigenschaften einer Figur, die Beziehungen mehrerer Figuren zueinander sind zu untersuchen“, „gewisse Abbildungen sind äußerst fruchtbar . . . Ordnung und Zusammenhang . . . zu bringen“ (Kerst 1933), „die Durchführung des Erlanger Programms im Unterricht ist nur *eine Methode,* die den ganzen Unterricht durchsetzt“ (Bosch 1933b), „soll der Abbildungsbegriff den ganzen geometrischen Unterricht wie ein ‚Ferment‘ durchdringen und vereinfachen“, „neben der Methode der Abbildungen (sollen) andere (synthetische im Sinne von Euklid oder Steiner, stereometrische im Sinne von Dandelin u. a.) ihr Eigenrecht behalten . . . Allerdings: die Methode der Abbildungen wird als die umfassendste den ersten Platz beanspruchen“ (Fladt 1933b).

Allerdings betont BOSCH (1933a, S. 216), noch einmal ausdrücklich: „Der Lernende erfährt von dem tragenden Gerüst des Unterrichts (Postulate, Gruppen) nichts. Der Lehrende aber kann es nicht entbehren.“ Und es wird noch weitergehend zur Mäßigung gemahnt: „Vom didaktischen Standpunkte aus muß man das Bestreben, den Stoff des geometrischen Schulunterrichts immer mehr unter einheitlichen Gesichtspunkten zu betrachten, in jeder Hinsicht gutheißen. Der Funktionsbegriff und die Beweglichkeit der Figuren haben auch für den Schüler Zusammenhänge geschaffen, die für den Unterricht außerordentlich fruchtbar und belebend gewirkt haben. Auch der Abbildungsgedanke und der Gruppenbegriff können, wenn sie in der richtigen Weise in der für die Schule erforderlichen Beschränkung den Lehrstoff durchdringen, dem Schulunterricht immer wieder neue Anstöße geben. Aber man muß sich davor hüten, den Aufbau des Stoffes allzu systematisch gestalten zu wollen. Der Aufbau muß sich vom Schüler her in Etappen mit dem *Endziele* auf Systematik vollziehen; Kompromißlosigkeit, von der fanatische Gruppentheoretiker und Abbildner heute so gern sprechen, ist hier nicht am Platze, sondern es gilt auch hier die Kunst zu üben, einen Kompromiß zwischen dem Bedürfnis für wissenschaftliche Systematik und schülerhafter Einfalt zu schließen“. Soweit HOFMANNS (1933) Worte, die auch einige Jahrzehnte später hätten gesprochen sein können.

Den Ausführungen Boschs (1933a) ist auch zu entnehmen, daß die inhaltliche Grundlage der Aussprache der mathematische Abbildungsbegriff (im Sinne vom 1. Abschnitt) ist. In dieser Deutlichkeit ist dieser Begriff in der didaktischen Literatur bis dahin nicht aufgetaucht.

Die Ideologie des Nationalsozialismus unterdrückt jedoch in der Folgezeit die von FLADT vorhergesagte Entwicklung, bzw. verzögert sie um etwa zwanzig Jahre. Seinen Beitrag schließt KERST (1933) mit: „So sehr wertvoll und wichtig die Abbildungslehre für den Unterricht auch ist, so ist sie doch nicht alleinseligmachend. Ist z. B., bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes, der Erhebungswinkel für ein Geschütz zu bestimmen, damit bei gegebener Mündungsgeschwindigkeit ein gegebenes Ziel getroffen wird, so helfen alle Abbildungen und Gruppen nichts.“ Diese Bemerkung ist nicht nur bezeichnend für den militaristischen Zug jener Ideologie, sondern deutet auch schon an, wie dort platte Anwendungsorientierung mit Theoriefeindlichkeit gekoppelt ist. Entsprechende Ausführungen über den Mathematikunterricht findet man in den Jahrgängen der ZMNU ab 1933 reihenweise.

Im Lehrplan von 1938 (Reichsministerium 1938) liest es sich nicht ganz so schlimm: „Das räumliche Anschauungsvermögen ist . . . besonders zu pflegen“ (S. 188). „Mit der Raumanschauung ist zugleich der Sinn für Zusammenhänge, Abhängigkeiten und gleitende Übergänge zu entwikkeln. Die Schüler sind anzuleiten, ebene und räumliche Gebilde in sich beweglich zu sehen; der Einfluß der Veränderung einzelner Teile einer Figur auf die Größe der anderen ist deutlich zu machen. Selbstgefertigte bewegliche Modelle helfen dem Schüler mehr und mehr dazu, in nichtstarren Raumgebilden denken zu lernen. In dem Maße, wie dieses Ziel erreicht werden wird, treten auch hier die Hilfsmittel zurück. Projektionen von Raummodellen aus Stäben sind wirklich durchzuführen (Sonne, Bogenlampe ohne Linse). Immer wieder muß darauf hingewiesen werden, was bei geometrischen Verwandtschaften erhalten bleibt und was sich ändert. Die axiale und zentrale Symmetrie, die Drehung, Verschiebung und das Umklappen geometrischer Gebilde sind dauernd zu berücksichtigen. So soll der Schüler Verständnis gewinnen für einzelne Bewegungen und ganze Gruppen von Bewegungsvorgängen" (S. 191). Also: Ganz im Sinne der Meraner Vorschläge und sogar mit einer Andeutung des Gruppenbegriffs!

Im Stoffverteilungsplan (S. 194ff.) nehmen die geometrischen Inhalte, insbesondere die Darstellende Geometrie, einen vergleichsweise großen Anteil ein, und „die dem Stoffverteilungsplan der einzelnen Klassen beigefügten Anwendungsgebiete, (die) . . . als verbindlich zu betrachten" (S. 194) sind, beziehen sich (in der Mittelstufe ausschließlich) auf die Geometrie: „Schiffsortung, Flugzeugortung, . . . Vermessungsaufgaben im Freien, . . . Kartenkunde, . . . behelfsmäßige Mittel der Entfernungsmessung, . . . die Lehre vom Wurf, . . . Schallmeßverfahren, . . . Bildmessung" (S. 195ff). Allerdings steht auch dies (wie das Verhältnis 5:3 der Stundenzahl von Leibesübungen zu der von Mathematik oder die Verkürzung der Schulzeit auf acht Jahre) offensichtlich im Dienste einer Militarisierung des Volks.

Baumsteiger (1949) zitiert und diskutiert auch „die mathematischen Übergangslehrpläne für die Höheren Schulen in der Nord-Rheinprovinz vom Oktober 1945". Dort „wird u.a. das ‚Erfassen mathematischer Zusammenhänge in Form der Funktion, der Abbildung und der Transformation' verlangt. ‚Im Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts der Mittel- und Oberstufe steht der Funktions- und Abbildungsbegriff.' Etwas weiter heißt es, daß durch ‚die Projektionslehre (Eintafelprojektion, . . .)' das Anschauungsvermögen vertieft werden soll".

Er unterscheidet zwischen „Abbildung" (z.B. Zweitafelprojektion eines dreidimensionalen Körpers), „Verwandtschaft" (Relation zwischen Urbild und Bild bei z.B. einer solchen Zweitafelprojektion, wobei das Urbild eine ebene Fläche am abzubildenden Körper ist), „Transformation" („Abbildung" in der analytischen Geometrie) und „Allgemeines Abbildungsprinzip" (nicht ganz verständlich, möglicherweise eine Vorform des mathematischen Abbildungsbegriffs). Mit dieser Begrifflichkeit steht Baumsteiger keineswegs allein; sie stützt sich möglicherweise auf Henrici/Treutlein (1881–1883/1901–1910). Und speziell mit seinem Transformationsbegriff steht er durchaus in einer Traditon mit Klein, der sich als Mathematiker nie recht aus dem Denken in Zahlenmannigfaltigkeiten hat befreien können (Freudenthal 1960, S. 7).

Es ist Fladt, der in den 50er Jahren, anknüpfend an die Diskussion der 30er Jahre in seiner blumigen Diktion mit Erfolg die Abbildungsgeometrie „zum Sieg führen", ihr „zum Durchbruch verhelfen" will und für sie „streitet" (Fladt 1950a, 1950b, 1954, 1955, 1957, 1959, 1962, 1967 u.a., Schulbuch Fladt/Kraft/Dreetz 1955). Er würdigt zwar häufig Kleins Verdienste um die Schulreform, schreibt ihm aber – korrekt – nicht die Abbildungsgeometrie o.ä. zu. In seinem Schulbuch haben „meine Mitarbeiter und ich das etwas zweifelhafte Vergnügen . . ., in einem *Unterrichtswerk* die für die Schule neuen Gedanken als erste grundsätzlich vom Anfang in Quarta (Anm.: 7. Schj.) bis zum Ende in Oberprima (Anm.: 13. Schj.) durchzuführen" (Fladt 1962, S. 444).

Er liefert zahlreiche Argumente, die mehr oder weniger schlagkräftig sind (in Fladt 1962, S. 444, aber auch in anderen Arbeiten): ‚Bewegungs'geometrische „Gedanken" sind „leicht eingängig . . ., weil (sie) die Tätigkeit aus der *Hand* geradezu herausfordern und damit die Ansprüche der Jugendpsychologie erfüllen", und gerade nicht „‚viel zu schwer'". Sie *„entlasten"* „den Schulstoff von allem Unwesentlichen . . ., weil sie die vielen Sätze und Sätzchen der hergebrachten Elementargeometrie um wenige Grundgedanken ‚gruppieren'", (wozu noch nicht einmal Gruppen nötig sind). Sie „erziehen" „die Schüler zum Selbstdenken und zur Selbsttätigkeit".

Aus diesen Überlegungen ergibt sich (und das ist auch im Schulbuch durchgeführt), daß Abbildungsgeometrie über eine elementarkinematische Propädeutik vorbereitet werden soll. Dieses Prinzip wird auch später von keinem Autor ernsthaft in Frage gestellt und in den Schulbüchern grundsätzlich durchgehalten. Denn gerade das Argument der Selbsttätigkeit findet sich sehr oft.

Fladt empfindet es als „merkwürdige Duplizität der Ereignisse, daß gleichzeitig mit dieser Reform des geometrischen Unterrichts in der wissenschaftlichen Geometrie durch F. Bachmann (Anm.: 1959) und seine Mitarbeiter ebenfalls ein Neubau auf Grund des Spiegelungsbegriffs errichtet wird". Auch hier muß man Fladt zugutehalten, daß er klarer als andere sieht, daß diese mathematischen Arbeiten mit dem Unterricht zunächst sehr wenig zu tun haben, und daß er lediglich die Duplizität konstatiert.

Grundbegriff ist schon in (Fladt 1928–1931) und im Schulbuch (s. auch Fladt 1962, S. 444) die Geradenspiegelung. „Den *Gruppenbegriff* . . . explizite im Geometrieunterricht, vor allem der Oberstufe" einzuführen, schlägt er in Fladt 1954, S. 68, vor und tut dies auch (allerdings nur in wahlfreien Abschnitten) sogar auf der Mittelstufe im Schulbuch. Andererseits hält er die ‚richtige' Abbildungsgeometrie für die Oberstufe wegen der dort einzuhaltenden Strenge für zu schwer (Fladt 1957, S. 155f).

Darüber hinaus können Schwierigkeiten seines Erachtens dann auftreten, wenn „die für die Schulen neuen Gedanken . . . bloß an den mit üblichen Methoden traktierten üblichen Schulstoff am Ende (angehängt) oder ihm" aufgesetzt werden. Dem „Eindruck . . ., als sei die neue Methode nicht streng genug oder überhaupt nicht streng, und unsere Schüler würden nicht mehr zu streng logischem Denken erzogen", begegnet er mit dem Hinweis auf „die Bemühungen darum, die neue Methode auch beweistechnisch einwandfrei zu gestalten, (die) an vielen Orten eingesetzt" haben (Fladt 1962, S. 444).

Daß „Fladts Schulbuch . . . sich nicht durchgesetzt" hat, führt Steiner (1966, S. 218f) einmal darauf zurück, daß „es methodisch noch nicht ausgereift" gewesen ist, zum anderen aber auch darauf, daß „der axiomatische Aspekt . . . nicht richtig erkannt" worden ist. Er verweist ebenfalls auf eine „Reihe von Untersuchungen" zur „unterrichtlichen Verwirklichung des abbildungsgeometrischen Aufbaus".

2.4 Abbildungsgeometrie, axiomatisch (ca. 1955 – ca. 1970)

Diese Untersuchungen sind zum großen Teil in zahlreichen Heften der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* (MU) enthalten (1955/1, 1956/2, 1957/1, 1958/3, 1959/3, 1963/1, 1963/4, 1965/3, 1966/5, 1967/1, 1967/4, 1968/3, 1978/2). Dort wird immer wieder „der Vorwurf gegen die Abbildungsgeometrie, daß in ihr nicht sauber bewiesen werden könne" (Brankamp 1958, S. 5) zurückgewiesen (ähnlich Niebel 1956, S. 12f, Faber 1958a, Faber 1958b, S. 20, 22, Hürten 1964), etwa mit der durchaus korrekten Begründung, daß sich im Vergleich zur sog. euklidischen Methode lediglich das Axiomensystem geändert habe (Brankamp 1958, S. 5). (Griesel [1967]) gibt ein Muster für die Hinführung zum Beweisen auch in einem abbildungsgeometrisch aufgebauten Unterricht an.)

Als Beleg für die Überlegenheit der Abbildungsmethode wird einmal ihre Ordnungsfähigkeit, und zwar schon ohne Verwendung des Gruppenbegriffs, und erst recht mit dessen Verwendung (Faber 1956 u.v.a.) angeführt. (Speziell auf Symmetriegruppen weist Proksch 1956 hin, wenn auch ihr Argument für deren Behandlung bloß „Stilgerecht"heit ist [S. 20].)

Zum anderen soll die Abbildungsmethode i. allg. auch bei Beweisen von Einzelheiten günstiger sein. So entwickelt HÜRTEN sein „*Heuristisches Prinzip der Geometrie:* Bildet man eine Originalfigur durch eine (oder mehrere) Abbildungen so auf die Bildfigur ab, daß Original und Bild in irgendeinem Zusammenhang stehen, so ist zu erwarten, daß man aus der Gesamtfigur einen Lehrsatz ablesen kann." (1971, 1976). BREIDENBACH geht noch weiter: „Ein euklidischer Beweis besteht aus einem logischen Gefüge. Versucht der Lehrer, um der Fassungskraft der Kinder willen die Logik (den strengen Schluß) aus dem Gefüge zu entfernen, so löst sich der Beweis genau in Nichts auf. Bei den Abbildungsbeweisen liegt das anders. Auch sie sind strenge logische Beweise. Aber in ihnen lassen sich das logische und das anschauliche Moment in verschiedenen Graden mischen, ohne daß der innere Beweisgedanke aufgehoben wäre. Sie lassen sich so vereinfachen, daß der vereinfachte Beweis dem Volksschulkind voll zugänglich ist, ohne daß er an Beweiskraft verlöre." (1949/1966, S. 54).

Der neue Aufbau „erfolgt genetisch in der Weise, daß sich Anschauung (Konstruktion) und Denken (symbolische Gleichungen) in eindeutiger Weise entsprechen" (Faber 1958c, S. 54).

Die Vorteile gegenüber der euklidischen Methode werden darüber hinaus „in einer der Altersstufe angepaßten natürlichen Anschaulichkeit . . . und in der Auflösung aller starren geometrischen Einzelgebilde in bewegbare Figurenscharen, womit nach STRUNZ (Anm.: 1953) das *fluktuierende* und das *primitiv emotionale* Denken, ausgesprochen jugendaffine Formen, gepflegt werden", (Niebel 1956, S. 19) gesehen, es „lassen sich die Bewegungen anschaulich leicht erfassen" (Faber 1958b, S. 20). „Nicht nur, daß sie die *statische* Auffassung euklidischer Prägung zu einer *dynamischen* macht, sie entspricht auch viel mehr dem Streben nach Selbsttätigkeit . . . das Schöpferische, das Tun tritt in den Vordergrund . . . zur Beweglichkeit kommt eine Anschaulichkeit . . . ferner bietet sich der weitere, psychologische Vorteil, daß die einzelne Figur nicht zerstückelt, sondern als *Ganzheit* betrachtet wird" (Beckmann 1956, S. 31). „Der Stoff (tritt) aus seiner Starre heraus und gewinnt Leben und Farbe . . . die Schüler (tun) gerne mit . . ., und (sind) oft recht findig . . . Im heute herrschenden Arbeitsunterricht ist die abbildungsgeometrische Methode zweifellos der starren *Euklid*ischen Methode überlegen" (Faber 1956) usw. Mit diesen Argumenten wird an die Anschaulichkeit bei den Alten und die Selbsttätigkeit bei FLADT angeknüpft.

Während allerdings Fladt noch für Abbildungsgeometrie als ‚Bewegungs'geometrie wegen ihrer Anschaulichkeit auf der Unter- und Mittelstufe plädiert, hält er sie für die Oberstufe wegen der dort einzuhaltenden Strenge für zu schwer (Fladt 1957, S. 155f). Ähnlich äußert sich BEHNKE (1960, S. 143), allerdings auf die Euklidische Geometrie überhaupt bezogen, nicht nur auf die Abbildungsgeometrie.

FABER dagegen hält den Unterricht für „um so erfolgreicher, je früher der Schüler mit dem Begriff der Abbildung vertraut gemacht wird" (1958a, S. 4). „Ferner entspricht es nicht ganz dem Sinn der Abbildungsgeometrie, wenn man sich von fertigen Figuren, wie sie EUKLID angegeben hat, leiten läßt. Man treibt erst dann echte Abbildungsgeometrie, wenn man die Abbildungen selbst in den Vordergrund stellt und nach deren Beziehungen untereinander fragt" (1958b, S. 21).

Daß da ein Unterschied zwischen elementarkinetischen Bewegungen und geometrischen Abbildungen besteht, wird i. allg. gesehen, z. B. auch von SENGENHORST (1959). Aber „die bewegungsgeometrischen Betrachtungsweisen der ersten Monate gehen ohne Bruch in die logisch-strengen Abbildungsbeweise über" (Beckmann 1956, S. 32), und „das Abbildungsdenken entfaltet sich stufenweise abstrahierend" (Nickelsen 1963, S. 42), zumal ja Bewegungen als Repräsentanten für Abbildungen aufgefaßt werden können und eine solche „repräsentantenhafte Behandlung der Abbildungen . . . genau so legitim (ist), wie die Darstellung der Klasse der Brüche durch die irreduziblen Brüche . . . Didaktische Aufgabe des Lehrers ist 1. Die Abstraktion vom Bewegungsvorgang . . ." (Hürten 1964). Für diese „Aufgabe" sind zahlreiche Methoden entwickelt worden, angefangen von Fabers Aufforderung an die Schüler „Unterscheide immer streng zwischen der *Bewegung* (Bewegung der Folie) und der als *Ergebnis* dieser Bewegung entstehenden *Kongruenzabbildung* (Zuordnung: Anfangslage → Endlage)" (Faber 1971, 1 Teil 1, S. 39) bis hin zur Verwendung von Transparentpapier (zuletzt Lind 1978). Auch für STEINBERG (1974) handelt es sich „bei der Grundlegung des Abbildungsbegriffs" vor allem darum, „den Schülern . . . durch gestufte Interpretation zu helfen" (S. 480).

Die Gefahr einer Diskrepanz zwischen realen bzw. vorgestellten realen Bewegungen einerseits und abstrakten Abbildungen andererseits als Folge etwa einer Behandlung von Bewegungen in Anwendungskontexten besteht natürlich nicht, da solche Kontexte im Abbildungsgeometrieunterricht fehlen und die Bewegungen lediglich den Abbildungsbegriff vorbereiten sollen.

In den knappen Formulierungen der Lehrpläne ist eine parallele Entwicklung zu erkennen: Auf „Anregung einiger Vertreter deutscher Unterrichtsverwaltungen" entwickelt ein Ausschuß des Fördervereins den „Kasseler Lehrplan von 1953" als Rahmenlehrplan für die Länder (Kraft 1953). Es sollen „grundlegende Begriffe der modernen Mathematik wie Menge, Abbildung, Dualität und Gruppe an einfachen und anschaulichen Beispielen erläutert werden" (S. 287). In der Geometrie ist es „angebracht, bei der Betrachtung von Einzelfiguren aus diesen durch Veränderung einzelner Stücke Figurenscharen abzuleiten und an ihnen funktionale Untersuchungen anzustellen", noch ganz im Sinne der Meraner Vorschläge von 1905! Und „der Aufbau des geometrischen Unterrichts soll durch den Gruppenbegriff bestimmt und mindestens bis zur Gruppe der Affinität geführt werden." Dies ist offensichtlich nur auf den Hintergrund des Lehrers bezogen, denn im Stoffverteilungsplan kommt der Begriff „Gruppe" nirgends vor, und auf ‚Bewegungs'geometrie o. ä. gibt es nur im 7. Schuljahr einen Hinweis, dessen Geometriestoff komplett so beschrieben ist: „Symmetrie, geometrische Grundaufgaben, Parallelverschiebung und Drehung, Einführung in die Dreieckslehre" (S. 288).

SCHAFHAUS (1956) analysiert, wieso der „Abbildungsgedanke" der Bildung geometrischer Begriffe, wie etwa ‚Dreieck', förderlich ist, und zwar ist es „das für die Abbildungsgeometrie typische kinematische Denken . . . die Bewegung einzelner Teile der Figur . . . (die Erzeugung) einer größeren Schar . . ." für die fachliche Fundierung verweist er zugleich auf BACHMANNS Arbeiten (Bachmann 1959). Die Richtlinientagung, von der da berichtet wird, faßt übrigens eine Entschließung gegen „die Abbildungsgeometrie als einzige Arbeitsmethode", weil man sich „noch im Stadium des Experimentierens befindet" usw.

Bei dieser Reserviertheit in der Lehrerschaft ist es nicht verwunderlich, daß es zu der Zeit auch Schulbücher gibt mit

Parallelausgaben mit und ohne Abbildungsgeometrie (nach Kreutzer 1958, S. 287).

Die KMK-Richtlinien von 1958 (Ständige . . . 1958) knüpfen im wesentlichen an den Kasseler Lehrplan an: ‚Dualität' wird durch ‚Vektor' ersetzt; ‚funktionale Betrachtungen' entfallen. „Der Geometrieunterricht sollte weitgehend durch den Abbildungsgedanken bestimmt sein" (in der Mittelstufe), „beim Aufbau der Geometrie wird man sich . . . so weit wie möglich bewegungsgeometrischer Methoden bedienen" (gymnasiale Unterstufe), „. . . empfiehlt sich der Abbildungsgedanke als ordnendes Prinzip" (gymnasiale Mittelstufe), bei „Behandlung der Kegelschnitte" kommt „dem Abbildungsgedanken . . . besondere Bedeutung zu" (gymnasiale Oberstufe). Im 7. Schuljahr sind in Mittelstufe und Gymnasium „wichtige Abbildungen" vorgeschrieben, in allen anderen Schuljahren (und in der Volksschule insgesamt) sonst nichts.

In die Schulbücher (des Gymnasiums) hält der Abbildungsgedanke in den 60er Jahren endgültig Einzug. In Reidt/Wolff/Athen (Wolff 1963–1965/1967–1971) z.B. geht es auf der Mittelstufe bis zur affinen Gruppe, und es werden sogar projektive Abbildungen und Kreisinversionen behandelt.

2.5 Abbildungsgeometrie, strukturmathematisch (ca. 1965 – heute)

Abgesehen davon, „daß Klein sich bei seinen Ideen gern auf französische Schulbücher berief" (Lietzmann 1955, S. 8) und Willers (1922) für die Erstellung seines Axiomensystems auch ausländische Arbeiten inspiziert hat, ist die Entwicklung der Abbildungsgeometrie in Deutschland bzw. der Bundesrepublik Deutschland bis in die 60er Jahre weitgehend unabhängig von ausländischen Einflüssen verlaufen.

Dies ändert sich nun, als mit der „Neuen Mathematik" eine grundlegende Reform des Mathematikunterrichts eingeleitet wird unter den Leitbegriffen „Menge, Struktur, Abbildung" (Steiner 1965, Griesel 1965). Diese Reform ist in Lenné 1969 gründlich analysiert. Für den Geometrieunterricht stellt sich zunächst eine gewisse Bedrohung dar, da die Geometrie (als Unterrichtsfach) ihre Eigenständigkeit verlieren und in der Linearen Algebra aufgehen soll, – eine Tendenz, die am ehesten in der französischen Tradition der Sichtweise von Geometrie(unterricht) seit Descartes steht und namentlich von Dieudonné (z.B. 1961, S. 169), einem didaktisch interessierten Mitglied von Bourbaki, vertreten wird (siehe auch UNESCO 1972, S. 25ff). Begründet wird diese Vorstellung unter anderem damit, daß der (uns umgebende) Raum an sich nicht ein Untersuchungsobjekt der Mathematik ist, sondern höchstens möglicherweise ein Modell für die mathematische Theorie ‚Euklidische Geometrie', deren Axiomensystem wiederum, ob abbildungsgeometrisch gefaßt oder nicht, für den Unterricht viel zu umfangreich und schwerfällig ist (siehe Lenné 1969, S. 89f).

Andererseits erhält die Geometrie, zumindest auf der nun eingerichteten Sekundarstufe I, durch die neue Mathematik Auftrieb, insbesondere die Abbildungsgeometrie: Der Abbildungsbegriff gehört ja zu den neuen Leitbegriffen (Steiner 1965, S. 16: „universelle Bedeutung"), und die Propagierung der Abbildungsgeometrie in den Jahren davor kann ja so aufgefaßt werden, als hätte sie diese Modernisierung nur vorweggenommen. Auch zu der Betonung des Mengenbegriffs und algebraischer Strukturen, besonders der Gruppe, paßt Abbildungsgeometrie bestens, jedenfalls wenn man die Geometrie als eine ebensolche mathematische Struktur auffaßt.

Vielleicht ist es gerade die Abbildungsmethode, die die Geometrie für den Unterricht rettet. Ihren Niederschlag findet diese Rettung im „Nürnberger Rahmenplan für Mathematik", der 1965 vom Förderverein „herausgegeben" (Athen 1966) und trotz scharfer Kritik (z.B. durch Laugwitz 1965) weitgehend in die KMK-Empfehlungen von 1968 (Ständige . . . 1968) übernommen wird.

Wichtig sind dort „Durchdringung von Algebra und Geometrie", „Einsicht in mathematische Strukturen", die „axiomatisierende Methode" (S. 4). Bis zur Klasse 6 erfolgt „Schieben, Drehen, Spiegeln und das Verknüpfen dieser Abbildungen . . . in exemplarischer Behandlung an konkreten Gegenständen". In den Klassen 7/8 (auch auf der Hauptschule!) sind „Kongruenzabbildungen", in den Klassen 9/10 „Ähnlichkeitsabbildungen" und in den Klassen 11–13 „Geometrische Abbildungen" eigene Themenkreise im Rang von „Aussageformen" und „Analysis", allerdings ohne den Gruppenbegriff auf der Hauptschule.

‚Die' Didaktiker sind der Auffassung, „die Analyse der Bewegungsgruppe dürfte mittelstufengemäß durchführbar sein" (Steiner 1966, S. 219f, gemünzt auf das Gymnasium).

„Die Urheber des Nürnberger Lehrplans haben versucht, . . . den Plan nach rein innermathematischen Erwägungen . . . zu konstruieren" (Athen 1966, S. 87). „Praktische Anwendungen" und „moderne Anwendungsgebiete" (Ständige . . . 1968, S. 2) sind zwar vorgeblich zu berücksichtigen, zu finden ist dann aber in den Richtlinien der Empfehlungen nichts, insbesondere nicht bei den abbildungsgeometrischen Themen (wie denn auch?).

Die nach Athen berücksichtigten „schulpraktischen, pädagogischen und psychologischen Notwendigkeiten" (1966, S. 87) schlagen sich in den Richtlinien eigentlich nur in der Forderung nieder: „in den Klassen 5–10 muß sehr anschaulich-ordnend an die tragenden Grundbegriffe herangeführt werden" (Ständige . . . 1968, S. 2).

Da erhält dieses rein fachinhaltlich orientierte Curriculum, das ja seitdem dem Mathematikunterricht den Rahmen gibt, Unterstützung aus einem ganz anderen Bereich: Gegen Ende der 60er Jahre werden zunehmend Ergebnisse der Kognitionspsychologie und in deren Gefolge der allgemeinen Didaktik für den Mathematikunterricht herangezogen, wobei eine Richtung, fußend auf Piaget, „davon aus(geht), daß bei der Genese von Wissen in den Wissenschaften und im Individuum die gleichen Mechanismen maßgebend sind" (Wittmann 1974/1978, S. 53).

Die Analogie wird sogar noch weiter getrieben: Strukturen in der Mathematik und Denkstrukturen sind wesensverwandt, insbesondere geometrische Abbildungen als abstrahierte Bewegungen und ihre Gruppen mit Denkoperationen als verinnerlichte Handlungen und ihre Gruppierungen. Palzkill/Schwirtz (1971, S. 47) ziehen daraus den Schluß: „Hierin kann ein Vorteil der abbildungsgeometrischen Methode gesehen werden, denn es ist zu erwarten, daß ein Unterrichtsgegenstand, der Gesetze aufweist, welche den (von Piaget herausgestellten) Gesetzen des Denkens analog sind, auch vom Schüler leichter erfaßt wird." Dies ist zwar nur im Hinblick auf den Unterricht in der Hauptschule formuliert, kann wohl aber für Realschule und Gymnasium nicht mehr und nicht weniger gültig sein.

Wohl hat sich die Abbildungsgeometrie im Gymnasium inzwischen bereits durchgesetzt (Fladt 1967, S. 59), sie erlebt nunmehr aber einen weiteren Aufschwung, und zwar in allen Schularten, unterstützt durch eine veränderte Zielsetzung: ‚Argumentieren, insbesondere Generalisieren, Klassifizieren, Ordnen können' z.B. bezieht sich jetzt nicht mehr nur auf einen mathematischen Stoff, sondern soll als *allgemeine* intellektuelle Fähigkeit bzw. Fertigkeit ausgebildet werden, und der Stoff ist, von höherer Warte aus gesehen, lediglich ein Vehikel dafür.

Hinzu kommt, daß aus der alten Volksschule mit ihrem Rechen- und Raumlehreunterricht nun die Hauptschule mit Mathematikunterricht (in Anlehnung an den der höheren Schulen) geworden ist. Schon FLADT (1954, S. 67) hat eine „Parallelität der Problemlage in Höherer Schule und Volksschule" gesehen und sich mehrfach (1954, S. 67, 1955, S. 8, 1959, S. 4) auf den „Mitstreiter" BREIDENBACH (1949/1966) berufen, der Abbildungsgeometrie in der Volksschule schon seit einiger Zeit befürwortet, bis dahin aber noch ohne große Resonanz.

Nun aber führen WINTER/ZIEGLER in ihrem Schulbuch (1969–1974), das für alle Schularten gedacht ist, bis zum 10. Schuljahr einen Aufbau der Abbildungsgeometrie konsequent bis zur affinen Gruppe und einer expliziten Erläuterung durch, wie sich Gruppenstruktur und Geometrie entsprechen. Das Buch hat keinen Erfolg; es wird, auch wegen seines Geometrieteils, als zu ‚schwer' (nicht nur für Schüler!) empfunden. Trotzdem: Auch in der Hauptschule „setzt sich die Tendenz zu abbildungsgeometrischer Betrachtungsweise . . . endlich durch" (Schupp 1972, S. 457), und „nur auf der Basis der Abbildungsgeometrie (ist) es . . . möglich, die Geometrie in nennenswerten Umfang auch in diese Leistungsbereiche einzuführen", da nur auf dieser Basis „der Anteil der Anschauung . . . dem Niveau des Schülers angepaßt werden kann" (Griesel 1980).

Nach und nach werden die KMK-Empfehlungen von 1968 in den Länderrichtlinien konkretisiert. Die Hessischen Rahmenrichtlinien, die nach einigen Jahren der Erprobung und der Diskussion 1976 erlassen werden (Hessische . . . 1976), sehen z. B. noch als Fundamentum für Schüler, die das 9. Schuljahr mit einem qualifizierten Abschluß verlassen wollen, etwa das Lernziel an: „Zu zwei geeignet vorgegebenen Figuren eine Ähnlichkeitsabbildung angeben können, welche die eine Figur auf die andere abbildet" (S. 165).

In den letzten Jahren läßt sich nun ein Abrücken von der einstmals starken Strukturbetontheit des Mathematikunterrichts beobachten. Es kommen andere Aspekte ins Spiel, etwa algorithmisches Denken oder Anwendungen. In den Schulbüchern hat dies zur Folge, daß übertriebene Mengensprache, übertriebene algebraische Notation und übertriebene Abbildungsgeometrie zurückgenommen werden.

Während ROLLER/SCHEID/WALLRABENSTEIN (1971–1976) noch die affine Gruppe behandeln und auch einige Worte über die den Gruppen entsprechenden Geometrien verlieren, dringen BREIDENBACH (1974), SCHRÖDER/UCHTMANN (Schröder 1972–1979), HAYEN/VOLLRATH/WEIDIG (1976–1981) und ATHEN/GRIESEL (1971–1976) noch bis zur Ähnlichkeitsgruppe, SCHÖNBECK/SCHUPP (1976–1980) bis zur Gruppe der Dilatationen vor, und ATHEN/GRIESEL (1977–1982) behandeln, wenigstens bis zum 9. Schuljahr, gar keine Abbildungsgruppen mehr. Im langen Streit um die Priorität von Spiegelung, Drehung oder Schiebung verliert z. Z. die Spiegelung an Boden. Insgesamt treten wieder mehr die Figuren in den Vordergrund. Z. B. bemerkt VOLLRATH (1978, S. 7), „daß man zunächst die Kongruenzsätze in der Abbildungsgeometrie für überflüssig hielt, während man sie heute doch meist mit abbildungsgeometrischen Methoden begründet, um sie als nützliches Hilfsmittel zum Beweisen zur Verfügung zu haben".

Trotzdem wird noch nach wie vor der strenge Abbildungsbegriff sehr ausführlich aufgebaut und verwendet; man ‚braucht' ihn ja für die Gruppen bzw. wenigstens für die Hintereinanderausführung. Wofür man die wieder braucht, wird allerdings nicht recht deutlich. Und so läßt man sie in Schulbüchern für die Hauptschule einfach weg, und kommt den Hauptschülern auch noch in den sprachlichen Formulierungen „entgegen": Z. B. lernen die Gymnasiasten bei Hayen/Vollrath/Weidig (1976–1981) im 7. Schuljahr über die Drehung um Z, „ist A' der Bildpunkt zu A, so liegen A und A' auf demselben Kreis um Z" (s. 81), im 9. Schuljahr über die zentrische Streckung an O, „wenn $P \neq O$, dann liegt der Bildpunkt P' auf der durch P gehenden Halbgeraden . . ." (S. 110). Die Hauptschüler lernen, „dabei bewegen sich alle Punkte auf Kreisen um . . . Z" (S. 50) bzw. „alle anderen Punkte (Anm.: außer dem Streckzentrum) bewegen sich auf Halbgeraden . . ." (S. 74). (Die Realschüler schließlich lernen im 7. Schuljahr wie die Gymnasiasten (S. 78) und im 9. wie die Hauptschüler (S. 50). Oder: „Bei der Schiebung $\overrightarrow{AB}$ bleibt kein Punkt der Ebene an seinem Ort, wenn $A \neq B$ ist" (Bigalke 1974–1976, 8. Schulj., S. 60). Die Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Die hauptschulgerechte Zubereitung der Abbildungsgeometrie ist wohl *methodisch* gerechtfertigt oder gar unumgänglich, *didaktisch* aber unbefriedigend, wie auch DAMEROW (1980, S. 525) konstatiert: „Man behandele einige elementaren Begriffe und Grundkonstruktionen aus dem Euklid, ferner einige Begriffe aus der Abbildungsgeometrie, verzichte weitgehend auf Beweise und verknüpfe das Ganze möglichst durch Veranschaulichungen – Beweise sind in dieser Mixtur ja ohnehin etwas schwierig. Nun ist zwar verständlich, daß so etwas herauskommt, wenn man einen in den höheren Schulen möglicherweise sinnvollen Stoffkanon nach dem Kriterium der Schwierigkeit auf Hauptschulniveau zusammenstreicht. Es mag sogar richtig sein, daß durch einen solchen Lehrplan die oberen Leistungsgruppen den Anschluß an weiterführende Schulen finden. Aber ein sinnvoller Plan für eine wissenschaftsorientierte Grundbildung in der Hauptschule ergibt sich auf diese Weise nicht." Und, nicht nur auf die Abbildungsgeometrie bezogen: „Es ist eine Restmathematik für die Restschule entstanden." (S. 526). So braucht es einen nicht zu wundern, wenn HENNES (1978) feststellt, daß in sechs von ihm untersuchten 10. Schuljahren von Hauptschulen, „Geometrie durchweg euklidisch, ohne jede Abbildung behandelt" worden ist, obwohl der zuständige Lehrplan als eines der „Zentralthemen . . . geometrische Abbildungen, vor allem algebraisch" vorschreibt.

Im gymnasialen Bereich ist die Diskrepanz zwischen Lehrplan und tatsächlichem Unterrichtsgeschehen vielleicht weniger deutlich, aber auch hier werden Wünsche nach noch stärkerer Betonung der Figurenlehre laut (Andelfinger 1980); und mir ist auch schon berichtet worden, daß Lehrer, abweichend von Lehrplan und Schulbuch, über weite Strecken im Geometrieunterricht „abbildungsfrei vorgehen, weil sie dabei schneller zu handfesten Ergebnissen kommen". Diesen Lehrern eine Art Froschperspektive vorzuwerfen, greift möglicherweise zu kurz, denn: Vielleicht gilt doch auch für das Gymnasium, daß man sich mit der Abbildungsgeometrie einen Apparat verschafft, der seine Wirksamkeit erst in Bereichen erlangt, die man in der Schule nicht erreichen kann und daher auch gar nicht erst anstrebt, und man sich also fragen muß, ob man die Zeit, die für den Aufbau dieses Apparats gebraucht wird, nicht günstiger nutzen kann.

Der gymnasiale Abbildungsgeometrieunterricht wird aber schon seit einigen Jahren in der deutschen Mathematikdidaktik nicht mehr in didaktischen Kategorien diskutiert, da man die Diskussion für abgeschlossen hält. Das Spannungsfeld zwischen den Ansprüchen der auf den KMK-Empfehlungen von 1968 basierenden Lehrpläne und den Bedürfnissen von Lehrern und Schülern wird vor allem als methodisches Problemfeld angesehen. Die methodischen Lösungen werden dann oft direkt in die Schulbücher eingearbeitet.

2.6 Zusammenfassung der Begründungen

Der Gang durch die Historie mußte sich – je weiter die Ereignisse zurückliegen, dann um so mehr – auf schriftliche Veröffentlichungen beschränken. Wie rasch, wie weit und wie gut die Lehrer den Befürwortern der Abbildungsgeometrie jeweils folgten, läßt sich nicht sicher ausmachen. Anhaltspunkte für die Feststellung einer gewissen Zurückhaltung bieten sich durch die Jahrzehnte immer wieder, etwa die Resolution auf der Schulmännerversammlung von 1876 (ZMNU 1876, S. 513), wo wegen der befürchteten „Überbürdung . . . mit Lehrstoff" „die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen (bleiben und nur) . . . im Geiste der neueren Geometrie reformiert" werden soll, oder bei der Entschließung auf der Richtlinientagung von 1956 (Schafhaus 1956), wo „die Abbildungsgeometrie als einzige Arbeitsmethode (vorerst) nicht empfohlen werden" kann, u. a. weil „man sich noch im Stadium des Experimentierens befindet", oder bei den Berichten von ANDELFINGER (1980) über die Mittelstufe des Gymnasiums und von HENNES (1978) über das (freiwillige) 10. Schuljahr der Hauptschule. Auch die häufige Verteidigung gegen den Vorwurf des Unexakten in den 50er Jahren ist wohl mit eine Folge von Kritik aus der Lehrerschaft.

Doch auch eine ausführliche Auswertung von Tagungsberichten und Schulbüchern bringt noch nicht unbedingt sicherere Kenntnis über den tatsächlichen Geometrieunterricht; – dazu stellen Tagungsteilnehmer eine zu wenig zufällige Auswahl, nämlich besonders interessierter Lehrer, dar, und dazu haben Schulbücher dann doch zu sehr normativen und zu wenig deskriptiven Charakter. Vor allem findet man dort keine Begründungen, auf die es mir hier aber ankommt.

Im folgenden führe ich bei der Zusammenfassung nur solche Gründe auf, denen ich Rechtfertigungscharakter und auch eine gewisse Bedeutung zumesse, also z. B. nicht die Argumente, daß Abbildungsgeometrie auch exakt sei, oder daß die Abbildungsgeometrie gleichartiges Denken von der Volksschule bis zur Universität ermögliche (Beckmann 1956, S. 32).

A. *Universelle mathematische Idee:* Geometrische Abbildungen fördern die Ausbildung bzw. sind eine Erscheinungsform der universellen mathematischen Idee der *Abbildung*. Weiterhin kommt die zentrale algebraische Struktur der *Gruppe* ins Spiel.

B. *Funktionales Denken* (im Sinne der Meraner Vorschläge): Die Beschäftigung mit geometrischen Abbildungen (auch in ihrer elementarkinetischen ‚Vor'form) fördert das funktionale Denken.

C. *Anschaulichkeit, ‚Dynamik', Selbsttätigkeit:* Mit Abbildungsgeometrie wird der Geometrieunterricht anschaulicher, insbesondere die Beweglichkeit der Figuren ermöglicht mehr Aktivitäten bei den Schülern und wirkt anregend auf sie.

D. *Strukturverwandtschaft zwischen Abbildungsgruppen und (Denk-)Gruppierungen*: Diese Strukturverwandtschaft spricht für Abbildungsgeometrie.

E. *Globale Ordung:* Die Abbildungsmethode ist ein durchgängiges Prinzip beim Geometrietreiben, ein „Ferment", z. B. auch durch den Symmetriebegriff, und zwar auch ohne den Gruppenbegriff. Wird dieser noch herangezogen, dann liefert die Untergruppenstruktur der Affinen (bzw. Projektiven) Gruppe eine Strukturierung der Geometrie.

F. *‚Lokale' Ordnung:* Abbildungsbeweise, -konstruktionen, allgemein -betrachtungen sind – auf verschiedenen Stufen der Strenge – i. allg. näherliegender, gehaltvoller, leichter zu durchschauen und zwingender als „euklidische" Beweise, Konstruktionen, Betrachtungen.

(Nicht jeder Befürworter von Abbildungsgeometrie vertritt jeden dieser Gründe.)

Ehe ich nun daran gehe, diese Gründe zu diskutieren, möchte ich noch einen weiteren Gesichtspunkt anführen, den ich in den Veröffentlichungen weitgehend vermisse, den ich aber für bedeutend halte:

G. *Realitätsbezug:* Ist Abbildungsgeometrie einem realitätsbezogenen Geometrieunterricht angemessen, förderlich oder wenigstens nicht hinderlich?

3. Ist Abbildungsgeometrie in der Sekundarstufe I didaktisch sinnvoll?

Im folgenden skizziere ich, in Anlehnung an (nicht veröffentlichte) Vorstellungen von KIRSCH (s. auch Kirsch 1977, S. 178f), einen *typisierten* Stufengang für die Ausbildung des geometrischen Abbildungsbegriffs, und zwar speziell für die Kongruenzabbildung; denn mit dieser wird in aller Regel begonnen, sie kommt in der Propädeutik vor, denn sie läßt sich am bequemsten handelnd – oder wenigstens in der Vorstellung handelnd – realisieren; an ihr soll die „Abstraktion" geleistet werden.

1. Reale Handlung: Eine Pappfigur wird aus einer Lage (auf der Zeichenebene) in eine andere gebracht.
2. Eliminierung des Bewegungsvorgangs: Etwa Vorgabe von Anfangs- und Endlage und Rekonstruktion möglicher Bewegung(en).
3. Eliminierung der speziellen Figur: Statt der Pappfigur wird ein in der Vorstellung die ganze Zeichenebene bedeckendes Blatt Transparentpapier als Duplikat der Ebene (eventuell beide mit einem Quadratgitter) genommen.
4. Eliminierung des Ebenenduplikats: Zeichnerische Konstruktion von Bild- zu Urfigur, zunächst vielleicht noch mit Schablone.
5. Eliminierung des Handlungscharakters: Charakterisierung von Abbildungen durch gewisse Eigenschaften, z. B. echte Drehung um M als Isometrie mit genau dem Fixpunkt M.
6. Eliminierung des Mittelcharakters: Auffassung der Abbildungen als eigenständige Objekte, mit denen operiert wird, insbesondere als Gruppenelemente.

Vor dem Hintergrund des mathematischen Abbildungsbegriffs werden auf den verschiedenen Stufen dieses Prozesses (fast notwendig) Fehlvorstellungen aufgebaut, die dann auf den nächsten Stufen wieder abgebaut werden sollen. Im wesentlichen handelt es sich um folgende:

1. Die Handlung findet gar nicht in der Ebene statt, sondern oben drauf.
2. Nicht die ganze Ebene wird abgebildet, sondern nur die Figur; speziell auch bei Spiegelungen nur eine der beiden Halbebenen.
3. Der Bewegungsvorgang dominiert; der Zuordnungscharakter wird verwischt.

Eine weitere mögliche Fehlvorstellung ist

4. Die Urfigur wird als Menge von Dingen und die Bildfigur als Menge von Plätzen aufgefaßt.

Letztere kann vor allem bei Betrachtung von endlichen Symmetriegruppen entstehen (die Problematik hat KIRSCH [1977] eingehend analysiert).

Die Hauptschwierigkeit stellt, wie sich immer wieder zeigt, die Dominanz des Bewegungsvorgangs dar, die auf der 4. Stufe noch voll erhalten ist. Die Beweglichkeit bezieht sicht dabei nicht mehr notwendig auf die betrachtete Figur als Ganzes, sondern auf ihre Punkte, die los-„wandern" und sich am Schluß wieder ‚schön versammeln'.

Allerdings wird nicht hinterfragt, wieso sie sich eigentlich wieder zu einer Figur ordnen, die zur ursprünglichen in einer offensichtlichen und auch thematisierten Verwandtschaft (Kongruenz, Ähnlichkeit usw.) steht, obwohl die Bewegungsspuren der Punkte von der Ausgangsfigur völlig unabhängig sind (abgesehen vom Anfangspunkt). Diese Frage stellt sich schon dem Lehrer nicht, weil die Verwandtschaft ja axiomatisch gesichert ist, und den Schülern ist es auf den niederen Begriffsbildungsstufen schon ‚klar' gemacht worden. Wenn man dann den Schülern erzählt, daß „bei jeder Drehung eine Strecke und ihre Bildstrecke . . . dieselbe Länge" haben (Ähnliches in fast jedem Schulbuch), so ist dies entweder trivial oder ungenügend begründet.

Erschwerend kommt die Sprache hinzu: Da geht es um Schiebungen, Drehungen, Bewegungen, da tauschen Punkte ihre Plätze, werden Mengen verschoben, ändern Figuren nicht ihre Lage (obwohl sie könnten), da wird ein Dreieck vom einen Ende eines Parallelogramms ans andere verschoben, da sind Ersatzabbildungen für Verkettungen gesucht (obwohl dies dann doch dieselben nur mit anderem Namen zu sein hätten) usw. Dies ist alles wortwörtlich aus Schulbüchern übernommen; die Sprache im Unterricht ist gewiß noch irreführender (vgl. auch die Kritik Kirschs (1977, S. 179). Hier nützt es auch wenig, wie Palzkill/Schwirtz (1971, S. 43 Fußnote), die sich auf Faber berufen, bei Bewegungen von „Klappbewegungen oder Faltung; . . . Drehbewegung; . . . Parallelbewegung" und bei Abbildungen von „Geradenspiegelung . . .; Drehung . . .; Parallelverschiebung" zu reden.

Zugleich geht es fast durchweg nur um (echte, meist beschränkte Teil-) Figuren (der Ebene) und Teile von diesen, die umplaziert usw. werden, womit man wieder notgedrungen die Fehlvorstellung fördert, nur die betrachtete Figur werde abgebildet.

Mathematisch ist dieses Umgehen mit Teilfiguren durchaus haltbar, wie Palzkill/Schwirtz (1971, S. 45) richtig bemerken: Man muß sich nur aus der Vereinigung von Ur- und Bildfigur die passende Teilfigur aussuchen. Es ist auch vertretbar, wenn der mathematisch ‚Mündige' im Zusammenhang mit geometrischen Abbildungen die oben skizzierte mißverständliche Sprache benutzt oder gar an Bewegungen denkt. Dies ist für ihn dem Verständnis und der Verständigung förderlich; und er kann es sich erlauben; denn er kennt eben den dahinter stehenden Abbildungsbegriff und handhabt ihn souverän.

Der Schüler, der diesen Begriff erst ausbilden soll, wird aber durch den oben dargestellten Aufbau (auch wenn die ersten drei Stufen übergangen werden und aber auf der vierten an Bewegungsvorstellungen angeknüpft wird) nicht auf den richtigen Weg gebracht; er geht eher in Richtung eines elementarkinetischen Begriffs. Eine sehr sorgfältige methodische Behandlung mag zwar diesen Weg besser gangbar machen, kann aber schwerlich seine Richtung ändern, jedenfalls so lange sie ein anschauliches, handlungsorientiertes und damit notgedrungen bewegungsorientiertes Niveau einnimmt. Ich vertrete die folgende These:

‚Bewegungs'geometrie ist nicht die geeignete Propädeutik für Abbildungsgeometrie. Die Ausbildung des geometrischen Abbildungsbegriffs wird durch die ‚Bewegungs'geometrie eher behindert.

Es ist m. E. Hürten (1964) nicht zuzustimmen, daß Bewegungen Repräsentanten von Abbildungen seien wie Brüche von Bruchzahlen, wenn auch mathematisch diese Interpretation mögich ist. Abgesehen davon, daß schon die Abstrahierung von Brüchen zu Bruchzahlen durchaus ein Problem der Bruchrechendidaktik ist, ergeben sich im Begriffsbildungsprozeß doch Unterschiede:

Zwar ist die zweite Stufe (Rekonstruktion möglicher Bewegungsvorgänge aus Anfangs- und Endlage) hier aufgeführt, in den Lehrgängen kommt sie aber zu kurz, und das nicht unbegründet: es kommt ja bald nur noch auf eine ganz bestimmte Bewegung an zwischen zwei Figuren (z. B. Schiebung), die Verwandtschaft kann man nur aus dieser und nicht aus irgendwelchen beliebigen schließen. Die dahinterstehende Abbildung ist da erstens unwichtig, und zweitens ist sie nicht eindeutig bestimmt, nämlich nur bis auf die Symmetriegruppe der Figur. Hier an die Symmetriegruppe zu denken, ist weniger spitzfindig, als es erscheint. Es ist auch ein Lernschritt in diesem Aufbau, daß es auf die punktweise Zuordnung (zwischen zwei Figuren) ankommt. Aber setzen wir dies nun einmal voraus; auch, daß die Figur mindestens drei nichtkollineare Punkte hat; dann gibt es für jede Abbildung nur einen Repräsentant, und es ist nichts da zum Abstrahieren. Schließlich fehlt es bei Abbildungen auch an einer elementaren und anschaulichen Darstellung, wie sie die Bruchzahl als Punkt auf der Zahlengeraden hat; da ist die Auffassung einer Abbildung als Gruppenelement, mit dem ‚gerechnet' wird, doch von anderem Kaliber.

Die Diskrepanz zwischen ‚Bewegungen' und Abbildungen ist bisher keineswegs übersehen worden. Meistens hat man sich um methodische Abhilfe bemüht (wie im 2. Abschnitt kurz angedeutet), und nur Wenige haben sich deswegen (u. a.), jedenfalls mit guten Gründen, eher gegen die Reform zu ihrer Zeit ausgesprochen, nämlich Seebach (1958) und Lorenz (DDR, 1974).

Aus dieser Diskrepanz möchte ich nun nicht den Schluß gezogen haben, daß die ‚Bewegungs'geometrie eliminiert werden soll, weil sie nicht gut genug zur Abbildungsgeometrie paßt. Ich kann mir nicht vorstellen, wie Abbildungsgeometrie auf der Sekundarstufe I ohne einen solchen Vorlauf getrieben werden soll. Die Konsequenz müßte eine andere sein:

Auf der Sekundarstufe I, auch auf Gymnasiumniveau, kann Abbildungsgeometrie nicht die Zielgeometrie sein.

Hier kann man einwenden, und hat auch in Diskussionen eingewandt, daß man sich in den letzten zehn Jahren doch schon erheblich von dem übertriebenen Primat des strengen Abbildungs- und gar des Gruppenbegriffs, besonders auf der Hauptschule, entfernt habe. – Dieser Einwand wird im weiteren Verlauf der Arbeit mit behandelt.

Nun zu den am Schluß vom 2. Abschnitt aufgezählten Argumenten A–G. Bei jedem ist zu prüfen, ob es eigentlich als Begründung für ‚Bewegungs'geometrie oder als Begründung für Abbildungsgeometrie (oder beides) gedacht ist bzw. zählen kann. Diese Differenzierung ist in der Literatur i. allg. nicht durchgeführt. Die Befürworter, die den Bruch zwischen diesen beiden Formen wahrnehmen, halten ihn in der Regel für behebbar.

Argument A (Abbildungen als universelle mathematische Idee und Gruppen als zentrale algebraische Struktur) kommt in der strengen Abbildungsgeometrie natürlich voll zum Tragen. Geometrische Abbildungen sind schon etwas kompliziertere Sonderfälle, nämlich solche, bei denen Definitions- und Wertebereich übereinstimmen und deren Graph sich nicht isometrisch in den dreidimensionalen Raum einbetten läßt. Schon Hauck (1877, S. 94) kritisiert diesen Nachteil, als er das Schulbuch von Kruse (1875) bespricht. Als solche Sonderfälle sind geometrische Abbildungen wichtig zur Ausbildung des mathematischen Funktionsbegriffs. Sie gehören aber, gerade wegen der naheliegenden, den Funktionsbegriff jedoch verfälschenden Interpretationsmöglichkeit als Bewegungen, in eine sehr späte Phase des Funktionsbegriffsbildungsprozesses, wohl nicht mehr auf die Sekundarstufe I.

Der volle (Abbildungs-)Gruppenbegriff, bei dem die Abbildungen ja nicht mehr nur als Werkzeuge zur Untersuchung von Figuren, sondern als Objekte behandelt werden, mit denen ‚gerechnet' wird, setzt den vollen Abbildungsbegriff voraus und kann daher erst noch später angegangen werden.

In der ‚Bewegungs'geometrie dagegen wird die Ausbildung des Abbildungsbegriffs, wie oben festgestellt, eher behindert (vgl. Lorenz 1974, S. 16). Mit den Bewegungen einzelner Figuren hat man, da die Hintereinanderausführung nicht mehr gesichert ist, keine Gruppe mehr, sondern nur ein Gruppoid. Betrachtet man dagegen symmetrische Figuren, so bilden deren (Klassen von) Symmetriebewegungen doch Gruppen, deren wichtige Eigenschaften, nämlich Möglichkeit der Hintereinanderausführung und Umkehrung, schon Primarstufenschülern möglicherweise zugänglich sind. Es handelt sich dabei aber nicht um Abbildungsgruppen im Sinne des 1. Abschnitts.

Man könnte hier, und auch bei der Prüfung der nächsten Argumente, natürlich noch die für den Mathematikdidaktiker bzw. -lehrer vielleicht ketzerisch klingende Frage stellen, ob es überhaupt erstrebenswert ist, Schülern der Sekundarstufe I den mathematischen Abbildungsbegriff, funktionales Denken an mathematischen Stoffen oder die mathematische Struktur des Raums nahezubringen . . . Ich will die Frage nicht stellen, sondern gehe davon aus, daß es erstrebenswert ist.

Argument B (funktionales Denken) zieht in der Abbildungsgeometrie nicht und in der ‚Bewegungs'geometrie, so wie sie mit dem Ziel der Abbildungsgeometrie getrieben wird, ebenfalls nicht. Seit dem 19. Jahrhundert, expliziert z.B. in den Meraner Vorschlägen, bis heute versteht man unter funktionalem Denken das Denken in funktionalen *Abhängigkeiten*: Welche Änderungen im Wertbereich geschehen, wenn im Definitionsbereich Änderungen vorgenommen werden (und nicht etwa: Was geschieht auf dem Weg vom Definitions- zum Wertbereich)?

Bei Kongruenzabbildungen (auch noch bei ihren Verallgemeinerungen, den allgemeinen Ähnlichkeits- und den allgemeinen affinen Abbildungen) ist diese Frage aber ziemlich unergiebig, da es sich ja um lineare Funktionen handelt, bei denen besonders wenig los ist. Andere Funktionen in der Geometrie wären da interessanter:

- z.B. der Höhenschnittpunkt in Abhängigkeit von einer Ecke eines Dreiecks, wenn die zwei anderen festgehalten werden; wo ist er, wenn die laufende Ecke nacheinander einen stumpfen, rechten, spitzen Winkel hat?
- Flächeninhalt von Flächen; z.B. bei der stetigen Umwandlung eines Rechtecks in ein gleichgroßes Quadrat (konstante Funktion!).
- Umfangswinkel über einer Sehne, bei der Kreis und ein Punkt fest bleiben; was sind die kritischen Lagen?
- Diese Frage läßt sich auch beim stetigen Übergang eines Dreiecks zu einem gegensinnig kongruenten mittels einer stetigen Schar von (senkrechten) Affinspiegelungen (elementarkinematische Deutung der Geradenspiegelung) stellen; eine der Zwischenfiguren ist niederdimensional; im euklidischen Raum läßt sich die Orientierung nicht stetig ändern; Beispiel für einen Raum, wo das möglich ist . . .

Gewiß nimmt man solche Untersuchungen auch in der ‚Bewegungs'- und auch in der Abbildungstheorie vor. Nur stellt man dabei meist bloß fest, welche Funktionale (o.ä.) invariant sind und welche nicht; erst bei Ähnlichkeitsabbildungen wird dann auch einmal die Art der Änderung untersucht, die beim Flächeninhalt sogar nichtlinear ist.

Durch die Beschränkung aber auf elementarkinematische Bewegungen wird die Variationsbreite der möglichen Änderungen im Definitionsbereich ‚Ebene' gar nicht ausgenutzt. Darüber hinaus wird der geometrische Abbildungsbegriff nicht nur nicht gebraucht, sondern er behindert diese Variation, da bei ihm keine stetigen Übergänge oder wenigstens Scharen erzeugt werden, bei deren Durchlaufen etwas zu sehen ist, sondern es (in der Sprache der ‚Bewegungen') nur auf Anfangs- und Endzustand ankommt. Genau dieser Mangel haftet auch den Bewegungen an, wenn sie als Vorstufe von Abbildungen gelten sollen, wo die Übergänge zwar nicht vermieden werden können, sie aber quasi vertuscht werden.

Natürlich ist auch bei den oben angesprochenen Variationen im Definitionsbereich ‚Ebene' bei Verwendung der Mengensprache auf Sauberkeit zu achten. Statt „der Punkt läuft", sagt man vielleicht besser „wir betrachten nacheinander". Allerdings wirken sich fehlerhafte Ausdrucksweisen hier nicht so schlimm aus.

In sein „didaktisch orientiertes Axiomensystem" hat Kirsch (1972) übrigens solche Funktionen wie ‚Länge', ‚Winkelmaß' oder ‚Strecke zu zwei Punkten' aufgenommen und ihre Rolle betont (und außerdem die Spiegelung nicht als Grundbegriff eingeführt, sondern definiert, und lediglich ihre Existenz, anstelle eines Kongruenzaxioms, postuliert).

Argument C (Anschaulichkeit, ‚Dynamik', Selbsttätigkeit) kann für die Abbildungsgeometrie nicht in Anspruch genommen werden; denn diese ist ausgesprochen statisch (siehe auch Seebach 1958, Lorenz 1974 u.a.). Mit der Unterwerfung unter den mathematischen Abbildungsgedanken und gar unter die Algebra wird das kinematische Argument aufgegeben. Auch von Anschaulichkeit und Selbsttätigkeit kann dann keine Rede mehr sein.

Daß der ‚Bewegungs'geometrie als einer Propädeutik die Attribute ‚anschaulich', ‚beweglich' o.ä. und ‚die Selbsttätigkeit anregend' zukommen, ist kein Wunder, aber auch nicht einmalig: ein Aufbau, bei dem elementarkinetische Bewegungen keine Rolle spielen, muß nicht weniger anschaulich sein, aktiviert durch Zeichen-, Konstruktions-, Meß- und Beweisaufgaben die Schüler ebenso und kann auch hinreichend ‚beweglich' sein, durch funktionale Betrachtungen wie oben angedeutet oder auch durch Feststellen von Kongruenzen oder Maßverhältnissen o.ä. mit einem realen oder vorgestellten *starren Körper*. Da geht es dann nicht um elementarkinetische Bewegungen, sondern die Idee ist die der *freien Beweglichkeit* des starren Körpers in der Ebene bzw. im Raum. Über unterschiedliche Motivationsfähigkeit des einen oder anderen Zugangs liegen keine gesicherten Erkenntnisse vor.

Argument D (Strukturverwandtschaft von Gruppen und Gruppierungen) verliert deswegen schon etwas an Überzeugungskraft, weil eine Ursache dieser Verwandtschaft Piagets lebenslanges Interesse an der Mathematik und die gezielte Beschreibung von Denkschematen als gruppenähnliche Strukturen ist. Die Urheber dieses Arguments (Palzkill-Schwirtz 1971) drücken sich auch sehr vorsichtig aus, zumal sie sich nicht auf einschlägige Untersuchungen stützen können.

Argument E (globale Ordnung) tritt in dreifacher Gestalt auf:

Zum einen liefert der Abbildungsgedanke *Axiomensysteme*, die äquivalent etwa zum HILBERTschen sind. Vom didaktischen Standpunkt aus ist die Gleichwertigkeit nicht selbstverständlich. Diesen Gesichtspunkt möchte ich mit dem Argument G diskutieren.

Zum zweiten stellt die Untergruppenstruktur der projektiven Gruppe ein Ordnungsprinzip für die *Projektive Geometrie* dar (Erlanger Programm). Nun ist es mit der Relevanz der projektiven Geometrie für den Schulunterricht, besonders auf der Sekundarstufe I, nicht so weit her. Einem organischen Aufbau von der Euklidischen Geometrie aus, etwa als Ergänzung der Darstellenden Geometrie oder der Kegelschnittslehre, steht das Konstrukt unendlich ferner Punkte, in denen sich Parallelen dann doch schneiden, im Wege. Dieses Konstrukt ist nicht nur schwer zugänglich für Schüler, sie müßten es dann auch noch beseitigen und diese zusätzlichen Punkte als völlig gleichartig mit den gewöhnlichen auffassen, wenn die Ordnungsfähigkeit der Projektiven Gruppe wirklich greifen soll. Während der Weg von der Kongruenz- über die Ähnlichkeits- bis zur Affinen Geometrie leichter zugänglich erscheint, da man sich ja dauernd in derselben Menge aufhält und lediglich immer mehr von ihrer Struktur ‚vergißt', kommt also, jedenfalls in der heute üblichen Mengensprache, beim Übergang zur Projektiven Geometrie eine Schwierigkeit neuer Qualität hinzu: Die Menge muß um gewisse Punkte erweitert werden, und um was für welche!

Andererseits kann mit Gruppen nur geordnet werden, wo es etwas zu ordnen gibt, und je weniger weit man auf diesem Weg von der Kongruenz- zur Projektiven Geometrie vorstößt, desto weniger überzeugend ist die Entsprechung zwischen Obergruppenkette und Strukturvergröberung, weil diese Kette dann eben nur noch drei, zwei Glieder oder gar nur noch ein Glied hat. Und jetzt denke man nur daran, wie weit man im Unterricht kommt (vgl. auch Lorenz 1974, S. 16).

Zum dritten ist das Abbildungsprinzip ein *durchgängiges Prinzip*, das weite Bereiche einer systematischen Geometrie durchziehen kann, wobei der *Symmetriebegriff*, besonders im Bereich der Kongruenzabbildungen, eine tragende Rolle spielt. Hier liegt wohl wirklich eine Stärke der Abbildungsgeometrie, zu der die bei einem Aufbau etwa nach HILBERT bedeutenden Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze usw. möglicherweise kein volles Äquivalent bilden – wohlgemerkt: als durchgängiges Prinzip bei einem lokal- (oder global-)deduktiven Aufbau.

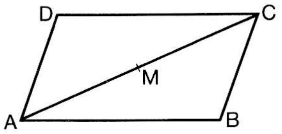
In der ‚Bewegungs'geometrie wiederum tritt die freie Beweglichkeit des starren Körpers mehr in den Vordergrund, womit eine Brücke zur Kongruenzgeometrie geschlagen wäre. Dann läßt sich auch die Symmetrie abbildungsfrei fassen (ähnlich die Kongruenz): Eine Figur (Punktmenge) heißt symmetrisch, wenn ein starrer Körper auf mindestens zwei Arten mit ihr zur Deckung gebracht werden kann. Hier gibt es erst Schwierigkeiten, wenn man räumliche spiegelsymmetrische Figuren betrachtet. Da bleibt nur das umständliche Verfahren, zu prüfen, ob es eine Ebene gibt, bei der die zu ihr orthogonalen Geraden auf ihren beiden Seiten im selben Abstand Punkte mit der Figur gemeinsam haben. Die abbildungsgeometrische Fassung ist selbstverständlich viel eleganter, tatsächlich verdeckt sie aber die dahinter stehende Handlungsvorschrift zur Prüfung oder Herstellung von Symmetrie und geht den damit zusammenhängenden Problemen, die sich aus dem Realitätsbezug ergeben, schlicht aus dem Weg. Zu einem linken Kotflügel gehört nun mal noch ein gegensinnig kongruenter rechter, für dessen Herstellung eine eigene Maschine erforderlich ist (wenn die Kotflügel nicht symmetrisch sind).

Argument F (‚lokale' Ordnung) ist in der Literatur breit diskutiert. ROTH (1956, 1959, zitiert nach Faber 1963, S. 43) stellt fest: „Der axiomatische Aufbau des geometrischen Lehrgebäudes durch Euklid wirkte sich bisher meist dahin aus, daß statt der für den Schüler unerwähnt gebliebenen Transformationen ihre Invarianten im Mittelpunkt standen. Um sie ins Spiel zu bringen, handelte es sich also immer darum, invariantenrechte Situationen zu schaffen. Das war vielfach die nicht immer durchsichtige und erkennbare Aufgabe von Hilfslinien." HÜRTEN (1964) und VOLLRATH (1978, S. 7) bemerken, daß hinter dem Konstatieren der Kongruenz zweier Dreiecke eine Abbildung steckt. Der Symmetriebegriff läßt sich mit Abbildungen besonders einfach fassen. Nach BREIDENBACH (1949/1966, S. 53f.) kann ein Abbildungsbeweis, im Gegensatz zu einem Kongruenzbeweis, beliebig elementarisiert werden, ohne von seiner Substanz zu verlieren. Hürten (1971, 1976) formuliert das heuristische Prinzip für die Abbildungsgeometrie.

Es ist nicht verwunderlich, daß man, wenn man als Hintergrund die Abbildungsgeometrie hat, dann auch solche Phänomene feststellt. Aus der Tatsache allein, daß mathematische Objekte Invarianten gewisser Abbildungen sind, folgt doch noch nicht, daß diese Objekte als diese Invarianten zu definieren sind oder daß überhaupt diese Abbildungen zu behandeln sind. SEEBACH (1958) bemerkt mit Recht, daß Abbildungsbeweise sich bei der üblichen Elementarisierung ebenfalls in Nichts auflösen. Dem abbildungsgeometrischen heuristischen Prinzip kann man ein kongruenzgeometrisches zur Seite stellen: ‚Zeichnet man zu einer Figur eine (oder mehrere) Hilfslinien, so daß diese mit ihr in irgendeinem Zusammenhang stehen, so ist zu erwarten, daß man aus der Gesamtfigur einen Lehrsatz ablesen kann.' Die formale Gleichwertigkeit zum Hürtenschen Prinzip ist offensichtlich, die mathematische ergibt sich gerade aus der Bemerkung Roths und die didaktische ist strittig. Hinter den beiden Vorgehensweisen stehen eben unterschiedliche Satzsysteme. Die abbildungsgeometrische hat den scheinbaren Vorzug, und wird auch immer wieder bewußt oder unbewußt dazu eingesetzt, Sätze dadurch einfacher erscheinen zu lassen, daß die Angabe einer geeigneten Abbildung eine genauere Überprüfung von Strecken- oder Winkelkongruenz o. ä. ersetzt. Tatsächlich sind solche Beweise lückenhaft, indem der Beweis für die Existenz einer solchen Abbildung (vgl. Vollrath 1978, S. 7) versäumt ist. Gerade diese Existenzbeweise erfordern dann wieder die Tüftelei, der man mit der Abbildungsmethode entgehen will. Oder man setzt die Existenz voraus – als ein Axiom, oder als vorläufiges Axiom, im Zuge eines etwas umfangreicheren lokalen Ordens. Dies kann aus didaktischen Gründen sehr sinnvoll sein, und ein solches Vorgehen ist auch nicht an die abbildungsgeometrische Methode gebunden, bietet sich dort aber leichter an und verführt dazu, Beweisfeinheiten beiseite zu lassen. Das muß nicht so sein; man erlebt es aber hin und wieder.

An zwei Sätzen führen PALZKILL/SCHWIRTZ (1971) einen Vergleich von kongruenz- und abbildungsgeometrischer Beweismethode durch, der bei ihren zugunsten letzterer ausfällt. ‚Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleichlang' (S. 41ff) und der Kathetensatz (S. 23ff). Die Beweise möchte ich im folgenden noch etwas variieren:

Abb. 1



Kongruenzbeweis: Zeichne die Strecke AC. Dann ist w(CAB)=w(ACD) und w(ACB)=w(CAD) (Wechselwinkel an Parallelen sind kongruent), also sind die Dreiecke ABC und ACD kongruent und die kongruenten Winkeln gegenüberliegenden Seiten sind auch kongruent.

Abbildungsbeweis: Zeichne die Strecke AC, und konstruiere ihre Mitte M (wir akzeptieren, daß diese existiert). Drehung um M um 180° ordnet A und C einander zu. Da Ur- und Bildgerade bei einer Drehung um 180° parallel sind, folgt aus dem Parallelenaxiom, daß die Geraden g_{AB} und g_{CD}, sowie die Geraden g_{BC} und g_{AD} einander zugeordnet werden, und damit auch die entsprechenden Schnittpunkte B und D. Nun ergibt sich die Kongruenz der gegenüberliegenden Seiten.

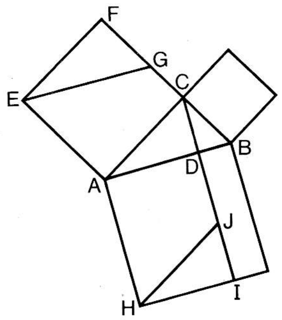


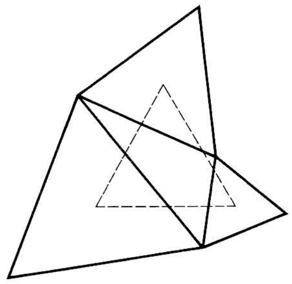
Abb. 2

Kongruenzbeweis: f(ACEF) = l(AE) l(EF) = f(ABGE) = f(AHJC) = l(AH) l(HI) = f(AHID) (Die ersten und letzten beiden Gleichheiten stellen die Flächeninhaltsformel des Parallelogramms dar; die mittlere gilt, weil die beiden Parallelogramme ABGE und AHJC kongruent sind, weil l (AE) = l (AC) und l (AB) = l (AH) und w (EAB) = 90°+w (CAB) = w (CAH) ist)

Abbildungsbeweis: f(ACEF) = f (ABGE) = f (AHJC) = f (AHID) (die erste und die letzte Gleichheit gelten, da die entsprechenden Figuren unter Scherung verwandt sind; die mittlere gilt, weil die beiden Parallelogramme ABGE und AHJC kongruent unter einer Rotation von 90° sind, und eine solche Rotation, die die beiden Parallelogramme aufeinander abbildet, existiert wirklich, weil l (AE) = l (AC) und l (AB) = l (AH) und w (EAC) = w (HAB) = 90°).

Bei beiden Beweisen des Kathetensatzes braucht man zunächst einmal die Idee mit den beiden Hilfsparallelogrammen, muß dann die entsprechenden Hilfslinien einziehen zur Konstruktion der Punkte G und J. Bei beiden Beweisen muß man die Kongruenz von bestimmten Winkeln und Strecken ausnutzen. Beim Abbildungsbeweis zeigt man damit die Existenz einer kongruenzstiftenden Rotation. Daß dieser Existenzbeweis zu führen ist, übersieht man leicht; man müßte sich mindestens die Frage nach der Existenz stellen, auch wenn man sie dann mit ‚trivial' beantwortet, weil doch . . . Diese Frage haben auch Palzkill/Schwirtz ausgelassen. Ein ähnliches Beispiel findet sich in (Mathematiklehrer 1980, S. 33), wo ein Beweis des Pythagorassatzes ohne Worte geführt ist.

Abb. 3

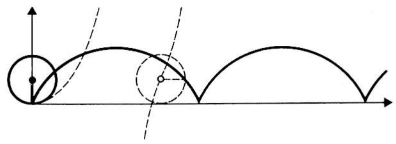


Es gibt Beweise, die sich mit der Abbildungsmethode sehr elegant lösen lassen, z.B. für die Behauptung, daß die Mittelpunkte der drei über den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach außen errichteten gleichseitigen Dreiecke wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden. Es gibt aber auch Sätze, deren Wesen einfach ein kongruenzgeometrisches Herangehen erfordert, z.B. daß sich die Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt schneiden (siehe auch Lorenz 1974, S. 104ff).

Frage G (Realitätsbezug der Abbildungsgeometrie?) bringt nun die Diskussion aus dem bisherigen Rahmen, da diese Frage fast in der ganzen Literatur über Abbildungsgeometrie nicht auftaucht. Den Befürwortern geht es bei ihrer Argumentation durchweg um die Geometrie als ein logisches System; die erstrebte Anschaulichkeit steht ganz im Dienste des Aufbaus dieses Systems; der Realitätsbezug ist, zumindest in diesem Zusammenhang irrelevant. Wodurch im Geometrieunterricht Realitätsbezug erreicht werden kann (und wie dieser aussehen könnte) ist in (Bender 1978, Bender/Schreiber 1980, Bender/Schreiber OGG, Schreiber 1978) ausgeführt. Die Basis ist dabei das Prinzip der operativen Begriffsbildung.

Bei der Herstellung von Formen (abgesehen von Bildern als Schattenrisse, Diaprojektionen u.ä.), beim Gebrauch der Formen in der Praxis kommen keine geometrischen Abbildungen, auch keine Vorformen ins Spiel. Da wird gemessen, und es werden Strecken und Winkel übertragen, aber nicht mit einer Abbildung, sondern mit einem starren Körper. Ein operativ interpretierbares Axiomensystem als Grundlage (aber nicht explizit im Unterricht!) für den Geometrieunterricht enthält dann natürlich nicht solche Abbildungen, sondern die Kongruenz (für die Idee des starren Körpers und seiner freien Beweglichkeit).

Abb. 4



Bewegungen spielen in der Praxis eine große Rolle. Sie werden aber nur dann durch die elementarkinetischen Bewegungen beschrieben, wenn sie gebunden sind und homogenen Bahnen folgen (abgesehen von Lichtstrahlen o.ä.), etwa bei der Bewegung einer Schiebetür, einer Drehtür oder einer Schraubenmutter entlang ihres Gewindes. Schon bei der Beschreibung eines einfachen Abrollens eines Rads auf einer Geraden versagt die Elementarkinetik: Wird die Bewegung eines Randpunkts durch $\mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}^2 : t \to (t\text{-}\sin t, 1\text{-}\cos t)$ beschrieben, dann handelt es sich um eine Schar von Rotationen um den Winkel t mit den Drehpunkten $D_t = (\frac{t}{2}, 1-\frac{t}{2}\cot\frac{t}{2})$, $\frac{t}{2\pi} \notin Z$ (wenn man da noch mit Abbildungsgeometrie überhaupt arbeiten will).

Zusammenfassung des 3. Abschnitts: Ich habe mich nicht um eine ausgewogene Darstellung unterschiedlicher Standpunkte bemüht, sondern mich in Anbetracht der überwältigenden Mehrheit der Befürworter von Abbildungsgeometrie im Unterricht vor allem kritisch mit den unterstützenden Argumenten auseinandergesetzt. Seit die Diskussion über die Abbildungsgeometrie etwa um 1970 abgeschlossen worden ist, stehen diese Argumente sozusagen als bisher letztes Wort im Raum. Die Einwände SEEBACHS (1958) und LORENZ' (1974) sind übergangen worden bzw. für unwesentlich gehalten worden. Lediglich VOLLRATH (1978, S. 7) versucht, solche Gegenargumente zu entkräften: Die Schwierigkeit, bei Abbildungsbeweisen Existenzbeweise führen zu müssen, hält er durch das (didaktische) Spiralprinzip für „weitgehend kompensiert".

Die Probleme, die im abbildungsgeometrischen Unterricht in Hülle und Fülle aufgetaucht sind, grundsätzlich durch die m. E. auf der Sekundarstufe I unüberwindbare Diskrepanz zwischen Bewegungen und Abbildungen, aber auch an anderen Stellen, – diese Probeme versucht man durchweg, mit methodischen Mitteln zu lösen. Die Tendenz ist dabei, das ursprüngliche Konzept zu reduzieren: Allgemeine affine Abbildungen kommen kaum noch vor, hie und da wird nicht mehr die Ähnlichkeitsgruppe behandelt, und in manchen Schulbüchern (auch für obere Leistungsgruppen) bleibt der Gruppenbegriff in der Abbildungsgeometrie schon ganz weg. Aber verkettet wird noch fleißig, und es geht nach wie vor um geradentreue Permutationen der Ebene.

Bei einer solchen Amputation entfallen natürlich wesentliche Rechtfertigungsgründe (A und größtenteils E). Da auch die anderen Gründe B, C, D und F, auch bzw. gerade in einer so zurückgenommenen Abbildungsgeometrie, nicht bzw. nicht ausschlaggebend zutreffen, ist wohl eine neue didaktische Analyse mit dem Zweck vonnöten, eine Rechtfertigung für diese reduzierte Abbildungsgeometrie zu liefern. Dabei müßte man dann den Zeitaufwand, den die Ausbildung des Abbildungsbegriffs erfordert, und die Ferne der Abbildungsgeometrie, auch der üblichen Elementarkinematik(!), zu den Anwendungen berücksichtigen.

Ich plädiere nicht für eine Abschaffung der Beweglichkeit der Objekte im Geometrieunterricht! Zeichnen, Abtragen, Messen, Konstruieren, funktionales Denken, plausibles Schließen, Beweisen, ganz zu schweigen von Betrachten, Her-, Darstellen und reflektiertem Gebrauch geometrischer Formen (Dreidimensionalität, Zweckanalysen), erfordern Beweglichkeit: bei den Objekten effektiv, zeichnerisch und in der Vorstellung (und natürlich auch beim Denken). Jedoch sollen diese Bewegungen nicht gleich wieder zu geometrischen Abbildungen hoch- bzw. ummathematisiert werden. Auch ohne dies läßt sich die Geometrie in ein System bringen, das, etwa mit Kongruenzgeometrie, beliebig weit vorangetrieben werden kann.

Ein sinnvoller Ansatzpunkt für einen behutsamen Aufbau eines geometrischen Abbildungsbegriffs erster Stufe könnten symmetrische Figuren sein, weil dort die Bewegungen weniger bedeutsam sind und es mehr auf die Permutationen der Bilder einer erzeugenden Teilfigur ankommt.

Erst nach einer gewissen Vertrautheit mit den geometrischen Sachverhalten bietet es sich in einem zweiten Durchgang durch die Geometrie an, nunmehr abbildungsgeometrisch vorzugehen, etwa auf der Sekundarstufe II (falls Zeit vorhanden ist) oder im Mathematik(-lehrer-)studium. Nun hat man Gelegenheit, mit allgemeinen (und weniger anschaulichen) Abbildungen und ihren Gruppen zu beginnen, etwa den affinen (noch günstiger (mit Abstrichen): projektiven), und die Kongruenzgruppe durch Spezialisierung zu gewinnen. Dabei verringert man die Gefahr, die der Geometrie grundsätzlich innewohnt, nämlich daß gerade ihre Anschaulichkeit abstrakten Begriffsbildungen und Denkweisen abträglich ist. FLADT (1933a) berichtet von einem solchen Vorgehen im Mittel- und Oberstufenteil des Schulbuchs von SCHÜLKE/DREETZ (1928–1931).

In meiner Vorlesung ‚Geometrie' in Kassel, die hauptsächlich von Sekundarstufe-I- und -II-Lehrerstudenten besucht wird, gehe ich folgendermaßen vor: Zunächst behandle ich den dreidimensionalen euklidischen Raum. Grundbegriff ist die Kongruenz; Kongruenzabbildungen werden definiert, ihre Existenz, der Vierspiegelsatz, sowie weitere Sätze über die Struktur des Raums und der Kongruenzgruppe werden bewiesen. Dabei werden zahlreiche Sachverhalte aus der ebenen Geometrie herangezogen (und bewiesen), und es fallen auch zahlreiche Ergebnisse für sie ab. Danach folgt ein Durchgang durch die ebene Geometrie, beginnend bei der Affinen Gruppe bis zur Rekonstruktion der Kongruenzgruppe. Dieser Aufbau ist nicht nur dadurch bestimmt, daß ich Abbildungsgeometrie für eine geeignete Methode zum Ordnen der Geometrie halte (bei entsprechendem Niveau der Lernenden!), sondern daß zukünftige Lehrer mit dem gängigen Schulstoff vertraut sein müssen. Deswegen wird auch der Unterschied zwischen geometrischer Abbildung und Bewegung thematisiert. Bei dem ganzen Vorgehen halte ich, speziell auf die Abbildungsgeometrie bezogen, folgende Grundideen für wichtig:

- aus ganz wenig Information (etwa Geradentreue und 3 Paaren nichtkollinearer Ur- und Bildpunkte) kann man die gesamte Abbildungsvorschrift für die Ebene erschließen und ihre sonstigen Eigenschaften ausnutzen
- zu einer absteigenden Kette von Untergruppen gehört eine aufsteigende Kette von Invariantenmengen der zugehörigen geometrischen Struktur
- die Gruppen haben ‚einfache' Erzeugendensysteme. Dabei spielen (in der Ebene) Achsenaffinitäten und ihre Spezialfälle bis hin zu den Spiegelungen eine besondere Rolle.

Literaturverzeichnis

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

BzM	Beiträge zum Mathematikunterricht
DAMNU	Deutscher Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht
MNU	Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht
MPS	Mathematisch-Physikalische Semesterberichte
MU	Der Mathematikunterricht
PM	Praxis der Mathematik
UBl	Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften
ZMNU	Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht

ANDELFINGER, B.: Ziele und Inhalte der Arbeit in der gymnasialen Mittelstufe. 32. Gemener Kongreß 1980

ATHEN, H.: Die Modernisierungstendenzen im Nürnberger Rahmenplan für Mathematik. – In: MU 12/3, 87–106 (1966)

ATHEN, H.; GRIESEL, H. (Hrsg.): Mathematik heute 5–10. – Hannover, 1971–1976

ATHEN, H.; GRIESEL, H. (Hrsg.): Mathematik heute 5–10. – Hannover, 1977–1982

BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. – Berlin, 1959

BAUMSTEIGER, W.: Abbildung, geometrische Verwandtschaft, Transformation im mathematischen Unterricht der höheren Schule. – In: MNU 2, 6–11 (1949)

BECK, H.: Gruppentheorie und Schulgeometrie. – In: ZMNU 64, 254–260 (1933)

BECKER, G.: Über Hintergrundtheorien geometrischer Schulkurse. – In: BzM 1977, 32–35, Hannover, 1977

Beckmann, F.: Vektor und Gruppe bei der Einführung der Abbildungsgeometrie auf der Mittelstufe. – In: MU 2/4, 27–43 (1956)
Behnke, H.: Felix Klein und die heutige Mathematik. – In: MPS 7, 129–144 (1960)
Behrend, F.; Morgenstern, A.: Lehrbuch der Mathematik. Form und Abbildung. – Breslau, 1932
Bender, P.: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. – In: MU 24/5, 25–87 (1978)
Bender, P. u. A. Schreiber: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. – In: Educational Studies in Mathematics 11, 59–90 (1980)
Bender, P. u. A. Schreiber: Operative Genese der Geometrie. – In Vorbereitung (OGG)
Bigalke, H.-G. (Hrsg.): Einführung in die Mathematik 5–9. Hauptschule. Frankfurt, 1974–1976
Bigalke, H.-G.; Hasemann, K.: Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6, Band 2. – Frankfurt, 1978
Bosch, F.: Systematik des geometrischen Unterrichts auf Grund des Erlanger Programms. – In: UBl 39, 215–218 (1933a).
Bosch, F.: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 202–204 (1933b)
Brankamp, J.: Die kongruenten Abbildungen im Geometrieunterricht der Mittelstufe. – In: MU 4/3, 5–19 (1958)
Breidenbach, W.: Raumlehre in der Volksschule. – Hannover, 1949, 11. Auflage 1966
Breidenbach, W. (Hrsg.): Mathematik 5–10. Für Sekundarstufe I mittlere und obere Leistungsgruppen. – Braunschweig, 1974
Bretschneider, C. A.: Lehrgebäude der niederen Geometrie. – Jena, 1844
Damerow, P.: Wieviel Mathematik braucht ein Hauptschüler? – In: Neue Sammlung 20, 513–529 (1980)
Damnu (Hrsg.): Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten. – Schriften des DAMNU, II. Folge, Heft 8, Leipzig 1922, abgedruckt in MU 26/6, 63–80 (1980)
Diekmann, J.: Bewegung und Umformung. – In: ZMNU 24, 81–96 (1893)
Dieudonné, J.: Moderne Mathematik auf der höheren Schule. – In: MPS 8, 166–178 (1961)
Dreetz, W.: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 65, 85–88 (1934)
Faber, K.: Zur Einführung (Abbildungsgeometrie I). – In: MU 2/2, 4–6 (1956)
Faber, K.: Zur Einführung (Abbildungsgeometrie III). – In: MU 4/3, 4 (1958a)
Faber, K.: Konstruktiver Aufbau der Euklidischen Geometrie aus den Grundsätzen der Spiegelung. – In: MU 4/3, 20–56 (1958b)
Faber, K.: Kongruente Abbildungen und zentralsymmetrische Figuren. – In: MU 4/3, 72–85 (1958c)
Faber, K.: Zur Herleitung der Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreis. – In: MU 9/1, 43–47 (1963)
Faber, K.: Geometrie 1 Teil 1; 1 Teil 2; 2. – Stuttgart 1971; 1968, 2. Aufl. 1971; 1969
Fladt, K.: Elementargeometrie. Teile 2 und 3. – Leipzig, 1928–1931
Fladt, K.: Die Auswirkung des Abbildungsgedankens in den heutigen Schulbüchern. – In: UBl 39, 155–158 (1933a)
Fladt, K.: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 204–205 (1933b)
Fladt, K.: Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts. – Frankfurt, 1950a
Fladt, K.: Über die geometrischen Transformationen im mathematischen Unterricht. – In: MNU 3, 348–351 (1950b)
Fladt, K.: Strenge und Systematik im geometrischen Unterricht der höheren Schulen. – In: MNU 7, 65–69 (1954)
Fladt, K.: Los von Euklid oder hin zu Euklid? – In: MU 1/1, 5–10 (1955)
Fladt, K.: Der Aufbau der Geometrie im Unterricht der höheren Schule. – In: MNU 10, 155–159 (1957)
Fladt, K.: Zur Bewegungsgeometrie und Vektorrechnung. Ergänzungsheft zur Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts. – Frankfurt, 1959
Fladt, K.: Die Entwicklung des geometrischen Unterrichts an den deutschen Gymnasien in den letzten hundert Jahren. – In: MNU 15, 440–445 (1962)
Fladt, K.: Die deduktive euklidische Geometrie in der Mittelstufe des Gymnasiums. – In: MU 13/1, 56–70 (1967)
Fladt, K.; Kraft, A.; Dreetz, W. (Hrsg.): Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen 4. Geometrie der Mittelstufe. – Frankfurt 1955
Freudenthal, H.: Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts. – In: MPS 7, 2–25 (1960)
Griesel, H.: Die Leitlinie Menge – Struktur im gegenwärtigen Mathematikunterricht. – In: MU 11/1, 40–53 (1965)
Griesel, H.: Aufbau der Abbildungsgeometrie in Unter- und Mittelstufe. – In: Behnke, H.; Steiner, H.-G. (Hrsg.): Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. S. 99–116, Göttingen, 1967
Griesel, H.: Mathematik in der Sekundarstufe I. – In: Roth, L. (Hrsg.): Handlexikon zur Didaktik der Schulfächer. S. 307–313, München, 1980
Gross, A.: Die Bewegungen im Unterstufen-Geometrieunterricht der höheren Schule. – In: MNU 4, 240–242 (1951)
Gutzmer, A.: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran, 1905. – In: Gutzmer, A. (Hrsg.): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. S. 104–114, Leipzig, 1908. Abgedruckt in MU 26/6, 53–62 (1980)
Hauck, G.: Ausführlichere Mittheilung eines Passus aus dem Vortrag über die Stellung der neuern Geometrie zur Euklid'schen. – In: ZMNU 8, 91–95 (1877)
Hayen, J., Vollrath, H.-J.; Weidig, I. (Hrsg.): Gamma 5–10. Mathematik für Hauptschulen, für Realschulen, für Gymnasien. – Stuttgart, 1976–1981
Hennes, C.: Probleme des Mathematikunterrichts im 10. Schuljahr der Hauptschule. – In: BzM 1978, 114–116. Hannover, 1978
Henrici, J.; Treutlein, P.: Lehrbuch der Elementargeometrie. – Leipzig 1881–1883, 1. Teil 4. Aufl. 1910, 2. Teil 3. Aufl. 1907, 3. Teil 2. Aufl. 1901
Hessische Kultusminister, Der (Hrsg.): Rahmenrichtlinien Sekundarstufe I, Mathematik. – Frankfurt, 1976
Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. – Leipzig 1899, 11. Aufl. Stuttgart 1972
Hofmann, H.: Gruppenbegriff und Abbildungen im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 205–206 (1933)
Hürten, K. H.: Abbildungsgeometrie oder Bewegungsgeometrie. – In: PM 6, 58–60 (1964)
Hürten, K. H.: Das heuristische Prinzip der Geometrie und seine Bedeutung für die Propädeutik des Mathematikunterrichts. – In: BzM 1970, 63–72. Hannover, 1971
Hürten, K. H.: Das heuristische Prinzip in der Geometrie. – In: MNU 29, 276–281 (1976)
Kerst, B.: Gruppenbegriff und Abbildungen im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 206–207 (1933)
Kirsch, A.: Ein didaktisch orientiertes Axiomensystem der Elementargeometrie. – In: MNU 25, 139–145 (1972)
Kirsch, A.: Über die „enaktive" Repräsentation von Abbildungen, insbesondere Permutationen. – In: Didaktik der Mathematik 3, 169–194 (1977)
Klein, F.: Thesen (von 1868). – In: Fricke, R.; Ostrowski, A. (Hrsg.): Gesammelte mathematische Abhandlungen I. S. 49, Berlin, 1921
Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (1872). – In: Fricke, R.; Ostrowski, A. (Hrsg.): Gesammelte mathematische Abhandlungen I. S. 460–497, Berlin, 1921
Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II. Geometrie. – Berlin, 1908, 3. Aufl. 1925, Nachdruck 1967
Kraft, A.: Entwurf eines Lehrplans für den mathematischen Unterricht an den deutschen höheren Schulen. – In: MNU 6, 285–287 (1953)
Kreutzer, K.: Didaktiken, Methodiken, Schulbuchwerke, Rechentafeln und sonstige Unterrichtsmittel. – In: Drenckhahn, F. (Hrsg.): Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. S. 283–290, Göttingen, 1958
Kruse, F.: Elemente der Geometrie. – Berlin, 1875
Kusserow, W.: Los von Euklid! – Leipzig, 1928

LAUGWITZ, D.: Zur sogenannten Modernisierung des mathematischen Schulunterrichts. – Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 67, Beilage ‚Mitteilungen der DMV', S. 31–34 (1965)
LENNÉ, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. – Stuttgart, 1969
LIETZMANN, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, Teil 2 – Leipzig, 1916
LIETZMANN, W.: 25 Jahre Meraner Vorschläge. – In: ZMNU 61, 289–300 (1930)
LIETZMANN, W.: Felix Klein und die Schulreform. – In: MPS 1, 213–219 (1950)
LIETZMANN, W.: 50 Jahre Meraner Vorschläge. – In: MNU 8, 5–8
LIETZMANN, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, bearbeitet von R. STENDER. – Heidelberg, 3. Aufl. 1961
LIND, D.: Zur Rolle von Transparentpapier bei der Behandlung von Kongruenzabbildungen. – In: MU 24/2, 60–75 (1978)
LORENZ, G.: Der am Abbildungsbegriff orientierte Aufbau des Geometrielehrgangs in unserer Schule. – In: Mathematik in der Schule 12, 13–18, 104–111 (1974)
Mathematiklehrer, Der: . . . und sagte kein einziges Wort. – Der Mathematiklehrer 1, 33 (1980)
MICHEL, T.: Gruppentheorie der Streifenornamente. – In: MU 4/3, 96–111 (1958)
MU: Der Geometrieunterricht auf der Unterstufe der Höheren Schule. – MU 1/1 (1955)
MU: Abbildungsgeometrie I. – MU 2/2 (1956)
MU: Abbildungsgeometrie II. – MU 3/1 (1957)
Abbildungsgeometrie III. – MU 4/3 (1958)
MU: Axiomatik und Geometrieunterricht. – MU 5/3 (1959)
MU: Abbildungsgeometrie IV. – MU 9/1 (1963)
MU: Axiomatik und Geometrieunterricht II. – MU 9/4 (1963)
MU: Abbildungsgeometrie V. – MU 11/3 (1965)
MU: Affine Geometrie. – MU 12/5 (1966)
MU: Axiomatik und Geometrie III. – MU 13/1 (1967)
MU: Abbildungsgeometrie VI. – MU 13/4 (1967)
MU: Gruppen in der Geometrie. – MU 14/3 (1968)
MU: Untersuchungen zur Abbildungsgeometrie. – MU 24/2 (1978)
MÜLLER, H.: Leitfaden der ebenen Geometrie I, II, Leitfaden der Stereometrie I, II. – Leipzig, 1874–1877
MÜLLER, H.: Erinnerungen aus den ersten Jahren dieser Zeitschrift. – In: ZMNU 50, 13–19 (1919)
NICKELSEN, H.: Unterrichtserfahrungen mit Abbildungsgeometrie. – In: MU 9/1, 9–42 (1963)
NIEBEL, W.: Das Erlanger Programm und die Geometrie der Abbildungen. – In: MU 2/2, 7–19 (1956)
PALZKILL, L.; SCHWIRTZ, W.: Die Raumlehrestunde. – Wuppertal, 1971
PASCH, M.: Vorlesungen über neuere Geometrie. – Leipzig, 1882
PICKER, B.: Die Elemente des Euklid und ihre Bedeutung für den geometrischen Schulunterricht. – In: BzM 1970, 54–62. Hannover, 1971
PROKSCH, R.: Konstruktionen mit dem Spiegellineal. – In: MU 2/2, 20–31 (1956)
Reichs- und preußisches Ministerium für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung: Erziehung und Unterricht in der Höheren Schule. – Berlin, 1938
RICHERT, H. (Hrsg.): Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens, Berlin 1925. – Aus: LIETZMANN, W.: Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in Preußen. – In: ZMNU 56, 194–207 (1925). Abdruck MU 26/6, 81–96 (1980)
ROLLER, E.; SCHEID, H.; WALLRABENSTEIN, H. (Hrsg.): Mathematik B 5–10. – Stuttgart, 1971–1976
ROTH, R.: Transformationsrechte Geometrie. – In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Math.-naturw. Reihe 6, Heft 5/6 (1956/57) und 9, Heft 1/2 (1959/60)
SALKOWSKI, E.: Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts. – In: ZMNU Beiheft 7 (1924)
SCHAFHAUS, W.: Bericht über die Tagung zur Durchführung der Richtlinien in Mathematik. – In: MNU 9, 284–285 (1956)
SCHLEGEL, V.: Über Ziele und Methoden der Schul-Geometrie. – In: ZMNU 8, 179–184 (1877)
SCHÖNBECK, J.; SCHUPP, H. (Hrsg.): Plus 7–10. Paderborn, 1976–1980
SCHREIBER, A.: Die operative Genese nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. – In: MU 24/5, 7–24 (1978)
SCHRÖDER, H. (Hrsg.): Einführung in die Mathematik 5–10. Ausgabe Hessen (für mittlere und obere Leistungskurse). – Frankfurt, 1972–1979
SCHÜLKE, A.: Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie. – In: ZMNU 58, 401–407 (1927)
SCHÜLKE, A.: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 253–254 (1933)
SCHÜLKE, A.; DREETZ, W.: Leitfaden der Mathematik. Mittelstufe, Oberstufe Gymnasium, Oberstufe Realgymnasium. – Leipzig, 2. Aufl. 1928, 2. Aufl. 1928, 3. Aufl. 1931
SCHUPP, H.: Abbildungsgeometrie. – Weinheim, 1968, 3. Aufl. 1973
SCHUPP, H.: Von der Raumlehre zum Geometrieunterricht. – In: Blätter für Lehrerfortbildung 24, 451–457 (1972)
SCHUR, F.: Grundlagen der Geometrie. – Leipzig, 1909
SCHWAN, W.: Elementare Geometrie. – Leipzig, 1929
SEEBACH, K.: Über neue Methoden im Geometrieunterricht der höheren Schule. – In: MNU 10, 337–340 (1957)
SENGENHORST, P.: Methodische Vorschläge zum geometrischen Anfangsunterricht. – In: MU 1/1, 11–28 (1955)
SENGENHORST, P.: Die Methodik des geometrischen Anfangsunterrichts als Gegenstand einer internationalen Aussprache. – In: MPS 9, 283–298 (1959)
Ständige Konferenz der Kultusminister: Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht. – Neuwied, 1958
Ständige Konferenz der Kultusminister: Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen. – Neuwied, 1968
STEINBERG, G.: Ein didaktisch begründeter Vorkurs zur Abbildungsgeometrie. – In: MNU 27, 477–481 (1974)
STEINER, H.-G.: Menge, Struktur, Abbildung als Leitbegriffe für den modernen mathematischen Unterricht. – In: MU 11/1, 6–19 (1965)
STEINER, H.-G.: Grundlagen und Aufbau der Geometrie in didaktischer Sicht. – Münster, 1966
STRUNZ, K.: Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens. – Heidelberg, 1953
Sturm, R.: Die neuere Geometrie auf der Schule. – In: ZMNU 1, 474–490 (1870)
TREUTLEIN, P.: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts. – Leipzig, 1911
UNESCO (Hrsg.): Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique III (1972). – Paris, 1973
VOLLRATH, H.-J.: Symmetrie und Verwandtschaft in der Abbildungsgeometrie. – In: MU 24/2, 6–19 (1978)
WILLERS, H.: Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht. – In: ZMNU 53, 68–77, 109–119 (1922)
WINTER, H.; ZIEGLER, T.: Neue Mathematik 5–10. – Hannover, 1969–1974
WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. – Braunschweig, 1974, 5. Aufl. 1978
WOLFF, G.: Die Entwicklung der Abbildungsidee in Wissenschaft und Schule. – In: UBl 39, 296–300, 332–340 (1933)
WOLFF, G. (Hrsg.): Elemente der Mathematik. Vorstufe 1–3, Bände 1, 2. – Hannover, 1963–1965, 4. Aufl. 1967, 4. 1967, 4. 1967, 8. 1970, 8. 1971
ZMNU: Sitzungsbericht der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner. – In: ZMNU 7, 510ff. (1876)
ZMNU: „Projektives Heft". – ZMNU 45, 384–440 (1914)
ZMNU: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. – In: ZMNU 64, 201–202 (1933)
ZMNU: Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht. Schlußbemerkung. – In: ZMNU 65, 89–90 (1934)