

In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14,
1-2 (1982)

Vorbemerkungen

P. BENDER, W. BLUM, H. GRIESEL, H. POSTEL, S. SEYFFERTH, Kassel

Arnold KIRSCH 60 Jahre – ein Anlaß, insbesondere für uns Kasseler Fachdidaktiker, über seine Arbeit, seine Analysen und seine Vorschläge sowie deren Auswirkungen im Mathematikunterricht und in der fachdidaktischen Diskussion nachzudenken. Die Versuchung war groß, hierüber ein ganzes Heft des ZDM zusammenzustellen; dies hätte keine Schwierigkeiten bereitet. Doch es wäre nicht im Sinne von Arnold Kirsch, wenn seine *Person* derart in den Vordergrund gestellt würde. Daher haben wir uns entschlossen, in dieses Heft eine Reihe von *inhaltlichen* Beiträgen zur Didaktik der Mathematik aufzunehmen:

Peter BENDER stellt die *abbildungsgeometrische Methode* im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I in Frage. Werner BLUM erörtert die didaktische Bedeutung von *Integraphen* als methodisches Hilfsmittel im *Analysisunterricht*. Helmut POSTEL behandelt Zielsetzung und Stoffauswahl eines *Eingangskurses* in Mathematik für das 1. Halbjahr des 11. Schuljahres der gymnasialen Oberstufe. Siegfried SEYFFERTH erörtert am Beispiel der Analysis einige Probleme der mathematischen *Ausbildung von Sekundarstufenlehrern*.

Gemeinsam ist diesen vier Beiträgen zum einen, daß sie – auf die eine oder andere Weise – wesentlich von *Arnold Kirsch* beeinflusst sind. Auch um diese Gemeinsamkeit deutlicher zu machen, würdigt Heinz GRIESEL im ersten Beitrag dieses Heftes die *wissenschaftliche Arbeit von Arnold Kirsch*.

Zum anderen fügen sich die vier inhaltlichen Beiträge in den *gemeinsamen Rahmen* ein, wie wir (einschließlich Arnold Kirsch) ihn für unsere Arbeit sehen und in Heft 27 (Oktober 1981) des „Prisma“, der Zeitschrift der Gesamthochschule Kassel, aus Anlaß des 10jährigen Bestehens unserer Hochschule dargestellt haben:

1. Was ist Mathematikdidaktik?

Didaktik der Mathematik beschäftigt sich mit allen Fragen und Problemen der Forschung und Entwicklung, die das Lernen, insbesondere das gesteuerte, gelenkte, organisierte *Lernen von Mathematik* auf allen Stufen betreffen.

Lernen von Mathematik vollzieht sich, sofern es organisiert ist, in Form von Kursen bzw. Lehrgängen, die heute meist Curricula genannt werden. Eine der Hauptaufgaben der Didaktik der Mathematik ist daher die *Entwicklung von Curricula* für das Lernen von Mathematik. Dem entspricht die Mitwirkung von Mathematikdidaktikern an der Konzeption von Lehrbüchern, weil die Curricula insbesondere auch in Lehrbüchern dargestellt sind. Diese Entwicklungstätigkeit kann mit der eines Ingenieurs verglichen werden, der die Aufgabe hat, einen neuen Apparat zu konstruieren (zu entwickeln). Curricula stellen ein inneres Gefüge

von Bestandteilen wie *Inhalten*, die zu lernen sind, *Lernzielen*, die absichtlich oder unabsichtlich intendiert sind, *methodischen Instrumentarien*, durch die der Lernprozeß in Gang gesetzt und gesteuert werden soll, der *Lernorganisation im sozialen Gefüge* der Klasse, der *Sequenzierung*, in welcher die Inhalte gelernt und die methodischen Instrumentarien eingesetzt werden sowie *Lernkontrollen* wie Tests, Klassenarbeiten usw. dar.

Die *Erprobung* der Curricula, welche mit der Erprobung von Maschinen, Apparaten, Operationstechniken, Behandlungsmethoden oder Arzneien in den Ingenieurwissenschaften bzw. der Medizin verglichen werden kann, besteht im wesentlichen in einer systematischen Beobachtung des Schülerverhaltens.

Im Zusammenhang mit der Hauptaufgabe der Entwicklung von Curricula ergeben sich eine Reihe von Bereichen der Mathematikdidaktik, die zur *Forschung* zu rechnen sind. Hierzu gehören u. a. Untersuchungen über die gegenseitige Abhängigkeit von Lernzielen und ihre Einordnung in *Taxonomien*, Untersuchungen über den prägenden Einfluß, der durch das Lernen von Mathematik bewirkt wird, didaktisch orientierte *Sachanalysen* zur Förderung eines besseren Verständnisses des jeweiligen Gegenstandes wie auch seiner Genese und seiner Anwendungsbezüge, *Evaluation* von Curricula, Untersuchungen über den optimalen Verlauf eines gesteuerten Lernprozesses und zugehörige Regeln (meist *Prinzipien* genannt), historische, philosophische, pädagogische und psychologische Einordnung von Entwicklungen, Wertvorstellungen, Grundkonzeptionen und Ideen im Bereich der Didaktik der Mathematik u. a. m.

Die verwendeten *Methoden* stammen aus verschiedenen Disziplinen wie insbesondere Mathematik, Sozialwissenschaften und Geisteswissenschaften.

2. Charakterisierung der Kasseler Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik

Die *Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik* (Professoren P. BENDER, W. BLUM, H. GRIESEL, A. KIRSCH, H. POSTEL, S. SEYFFERTH; Mitarbeiter G. HEINEMANN, M. NOLTE, G. RAHMANN) an der GhK läßt sich grob wie folgt charakterisieren:

- Die Forschungs- und Entwicklungsarbeit zum Lernen von Mathematik (siehe 1) geschieht dicht an der *Praxis* und ist gedacht für die *Praxis* des Mathematikunterrichts. Sie betrifft sowohl „stoffdidaktische“ wie auch „allgemeindidaktische“ Fragen des Mathematiklernens. Zwei besondere Schwerpunkte liegen bei der Erstellung didaktisch orientierter mathematischer *Sachanalysen* sowie bei der Entwicklung konkreter *Unterrichtsmaterialien*, auch unter Berücksichtigung von außermathematischen Anwendungsbezügen.
- Das *gesamte Alters-Spektrum* von der Grundschule über die Sekundarstufe I (Mittelstufe) und die Sekundarstufe II (Oberstufe) allgemeiner wie beruflicher Ausrichtung bis zum tertiären Bereich wird durch Arbeiten Kasseler Mathematikdidaktiker erfaßt.
- In Kooperation mit Mathematikern anderer Arbeitsgruppen ist das sogenannte „*Kasseler Modell der Mathematiklehrausbildung*“ entwickelt worden. Der derzeit praktizierte Studienplan mit seinen erheblichen fachdidaktischen Anteilen hat andernorts als Vorbild gedient.
- Neben der – vorwiegend hochschuldidaktisch orientierten – engen *Kooperation im Fachbereich* bestehen enge *Kontakte zu Vertretern der Bezugsdisziplinen*, insbesondere zu Erziehungswissenschaftlern und Philosophen innerhalb der GhK, zu Leh-

rausbildern der zweiten Phase in den Studienseminaren, zu Lehrern in der Schulpraxis und zu Lehrerfortbildungsinstitutionen, vor allem in der Reinhardswaldschule Kassel.

- Kasseler Mathematikdidaktiker wirken in zahlreichen *überregionalen Gremien* mit (Herausgebergremien und Beiräte verschiedener Fachzeitschriften, Vorstand und Beirat der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Beirat des Instituts für Didaktik der Mathematik Universität Bielefeld, Beiräte des Deutschen Instituts für Fernstudien Universität Tübingen, Beirat des Instituts für Film und Bild München/Berlin, Richtlinienkommissionen u. a.).

3. Beispiele für mathematikdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeiten

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit werden hier einige *Beispiele* von Arbeiten Kasseler Mathematikdidaktiker skizziert.

A) Konzeption „Behandlung von Wachstumsprozessen im Mittelstufenunterricht“

Wachstumsprozesse (Bevölkerung, Energieverbrauch, Preise usw.) und Zerfallsprozesse (Abbau von Giften, von Radioaktivität usw.) spielen eine bedeutende Rolle in der Diskussion von Umweltproblemen. Ihre mathematische Behandlung im Unterricht erfolgte herkömmlich – wenn überhaupt – nur in der Oberstufe der Gymnasien.

Dies bildete 1974 den Anlaß, Methoden für eine elementare, aber nicht verfälschende Behandlung solcher Prozesse zu entwickeln und in Zusammenarbeit mit Lehrern zu erproben. Ziel ist es, daß jeder Schüler schon in der Mittelstufe (5. bis 10. Schuljahr) typische Wachstumsprozesse kennenlernt sowie rechnerisch zu verfolgen und Voraussagen darüber kritisch zu beurteilen lernt. Dies bedeutet aber keinen neuen „Mathematik-Stoff“, sondern vielmehr einen neuen, realitätsbezogenen Umgang mit sowieso behandelten Stoffen.

Die Vorschläge wurden u. a. in der Zeitschrift „Didaktik der Mathematik“ ausführlich dargestellt (A. KIRSCH in Heft 4/1976) und in Vorträgen und Diskussionen mit Lehrern und Wissenschaftlern, auch des Auslandes, verbreitet sowie auf Grund von Erprobungen weiterentwickelt. Sie schlagen sich jetzt auch in Lehrmaterialien und Richtlinien nieder.

B) Konzeption „Differential- und Integralrechnung“

Das zentrale Stoffgebiet im Mathematikunterricht der Oberstufe ist die Analysis (Funktionen, Differential- und Integralrechnung). In zahlreichen Beiträgen (W. BLUM, H. GRIESEL, A. KIRSCH, H. POSTEL, S. SEYFFERTH) sind grundsätzliche wie auch stoffmethodische Vorschläge gemacht worden, die insbesondere für eine pädagogisch realistische Haltung des Lehrers plädieren:

- Er soll dazu ermutigt werden, sich am tatsächlichen intellektuellen Entwicklungsstand seiner Schüler zu orientieren und nicht notwendig an hochschulgemäßer Behandlung (wie es in der Vergangenheit häufig aus falsch verstandener Wissenschaftlichkeit üblich geworden war); Anschaulichkeit wird nicht als Kompromiß, sondern als legitime Stufe mathematischer Erkenntnis gesehen.

Beispiele:

- Es geht beispielsweise darum zu zeigen, daß der Inhalt der schraffierten Fläche zwei Drittel des Rechteckinhalts ist, und nicht um die Problematisierung, ob die Fläche einen Inhalt überhaupt besitzt.

Parabelbogen *



- Bildserie „Funktionenmikroskop“

- Der Lehrer soll ferner dazu ermutigt werden, auf eine verständige Handhabung grundlegender Begriffe und Methoden zu achten und den Unterricht nicht auf eine eher mechanische Einübung von Rezepten einzuengen. Hierzu gehört, den Schüler in die Lage zu versetzen, Gelerntes in verschiedenen ihm begegnenden Situationen wiederzuerkennen bzw. anzuwenden, z. B. (was für jeden von Interesse sein kann) den Grundbegriff der Differentialrechnung (die Ableitung) als ein Mittel zu sehen,

mit dem sich Begriffe der Einkommensteuer (z. B. „Spitzensteuersatz“, „Progression“) knapp und angemessen erläutern lassen. Die Konzeption ist in zahlreichen Schulklassen verschiedener Bundesländer erprobt worden. Sie hat sich in Schulbüchern und mehreren Richtlinien für allgemein- und für berufsbildende Schulen niedergeschlagen.

C) *Prinzip der operativen Begriffsbildung im Geometrieunterricht*
Beim Prinzip der operativen Begriffsbildung im Geometrieunterricht werden vor allem die teleologische Komponente bei und der handelnde Umgang mit den Objekten als Wesensmerkmale geometrischer Begriffsbildung hervorgehoben. Bedeutungsvoll sind die Dreidimensionalität und eine kinematische Betrachtungsweise. Neben der wissenschaftstheoretischen Grundlegung sind in den letzten Jahren Anwendungen in der lebensweltlichen Praxis untersucht und konkrete Unterrichtsbeispiele (Geometrie des Fußballs, Parallelfiguren, Die Schraubenlinie) konstruiert worden (P. BENDER, zusammen mit A. SCHREIBER, Aachen).

D) Mathematik im berufsbildenden Schulwesen

Die bisherige Vernachlässigung der beruflichen Bildung zeigt sich auch in großen Defiziten bzgl. Theorie und Praxis des mathematischen Unterrichts im beruflichen Schulwesen, welches durch eine große organisatorische Vielfalt gekennzeichnet ist. Ein seit 1974 laufendes Forschungsprojekt (Leiter: W. BLUM) versucht, einige der wesentlichsten Defizite zu mindern, u. a. durch (jeweils bezogen auf Mathematik im beruflichen Schulwesen)

- Analyse von Lehrplänen und -büchern
- Dokumentation und Klassifikation einschlägiger Literatur
- Theoretische Analysen, auch in bezug auf allgemeinbildendes Schulwesen
- Entwicklung von Curricula für einzelne Schularten
- Erprobung und Auswertung dieser Curricula (auch eigener Unterricht)
- Entwicklung von Curricula für Lehreraus- und -fortbildung
- Konzeptionelle Entwicklung bzw. Beratung bei Realisierung von Filmen für Referendarausbildung (Projekt BP II beim FWU Berlin)

Beispiel:

- Curriculare Vorschläge zur Mathematik in der Teilzeit-Berufsschule (z. T. in 10 Klassen systematisch erprobt): Mathematik nicht als Fach wie in allgemeinbildenden Schulen, auch nicht – wie weithin üblich – als zufällig eingesetztes Anhängsel der Fachkunde, sondern als eigensystematisch aufgebaute, vereinfachte und eng mit Anwendungen abgestimmte Lehrgang. Ziel ist eine verständige Handhabung des mathematischen Handwerkszeugs durch den Schüler.

Die Überlegungen und Vorschläge der Kasseler Arbeitsgruppe sind in verschiedenen Büchern und Fachzeitschriften veröffentlicht worden und haben Eingang in mehrere Richtlinien gefunden.

E) Mathematik in der Grundschule

Nach einer hektischen Phase der Umgestaltung des Mathematikunterrichts in der Grundschule (meist mit dem irreführenden Namen „Mengenlehre“ bezeichnet) hat seit einigen Jahren eine Konsolidierung eingesetzt. In Kassel sind in einer Reihe von Arbeiten (H. GRIESEL) eine curriculare Konzeption sowie methodische Hilfsmittel entwickelt worden, wobei u. a. Fragen der Ergebnissicherung, der Integration der Tradition sowie der Grenzen und der Leistung methodischer Hilfsmittel im Vordergrund standen. Die Vorschläge sind in Schulbüchern und Richtlinien aufgenommen worden.