

Operative Genese der Geometrie

BENDER
SCHREIBER

Bender, Peter/Schreiber, Alfred
**Operative Genese der
Geometrie**

Hölder-Pichler-Tempsky Wien,
Teubner Stuttgart 1985
Band 12 der Schriftenreihe Didaktik
der Mathematik
ISBN 3-519-02790-9

Am 7. Juli 2011 vollendete Peter
Bender die ersten 65 Jahre seines
Lebens, wozu ich herzlich gratu-
liere. Ich hoffe, er wird weiter-

hin beruflich aktiv bleiben, denn
seine Ideen sind in der heutigen
Zeit ganz besonders gefragt.
Was ihn auszeichnet, ist, unter
vielen anderen Publikationen,
das mit Alfred Schreiber ver-
fasste Buch, das ich – ein Resümé
vorwegnehmend – zu den
Meisterwerken unserer jungen
Zunft zähle. Es müsste Pflicht-
lektüre für alle, besonders für die
in der Lehrerausbildung Tätigen,
sein bzw. werden.

Schon im Umfang der verwen-
deten und korrekt zitierten Li-
teratur (über 350 Titel) kommt
das hohe wissenschaftliche Ni-
veau zum Ausdruck. Diese Li-
teratur ist interdisziplinär: aus
Philosophie, Psychologie, Päd-
agogik, Mathematik, Physik,
Chemie, Technik, Kunstwissen-
schaft. Aber es wird kein flacher
Flickenteppich daraus gewoben.
Vielmehr loten die Autoren aus,

wie sich geometrische Begriffe
und Handlungsweisen dadurch
entwickeln, dass bestimmte
Zwecke durch Normen erfüllt
und dann auch mehr oder we-
niger gut realisiert werden. Ein-
faches Beispiel (S. 30f): Quader
(geometrischer Begriff) und Zie-
gelstein als Baustein (Zweck).
Als zweckbestimmte Normen
kommen in Frage: Handlichkeit,
Anpassungsfähigkeit der Steine
aneinander, dem Schwerefeld
der Erde angepasst (senkrechte
Mauern), Offenheit gegenüber
Änderungen der Mauer.

Anders formuliert: Der Geome-
trieunterricht aller Schulstufen
sollte von Bedürfnissen der Men-
schen ausgehen und zu Lösungs-
handlungen anreizen. Bereits
vorhandene Lösungen sollten
verständlich gemacht, genutzt
und kritisch hinterfragt werden.
Wie das im einzelnen aussehen

kann, wird in erfreulich vielen
bedeutsamen und unterschied-
lich anspruchsvollen Beispielen
dargestellt (Beweglichkeit im
Lager/Homogenität, S. 41, Par-
kettierung von Ebene und Raum
S. 136 ff, Papierkorb/Rotations-
hyperboloid, S. 156 ...).

Alle Beispiele, viele „an sich“
bekannt, sind Perlen der Mathe-
matikdidaktik. Man spürt: Das
sind nicht „Rosinen“, mit denen
man den Unterricht „auflockern“
kann, sondern Modellbildungen
in ihrer ganzen Komplexität.

Zur Wissenschaftlichkeit dieses
Werkes zähle ich auch die selbst-
kritische Haltung der Autoren.
Sie gestehen in einem Nachwort,
dass ihre weltbezogene operative
Genese der Geometrie nicht die
„letzte Wahrheit“, sondern die
bisher vernachlässigte „Kehrsei-
te“ im Geometrieunterricht ist.

Heinrich Winand Winter, Aachen

SCHRIFTENREIHE DIDAKTIK DER MATHEMATIK
Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt
Band 12

Operative Genese der Geometrie

BENDER
SCHREIBER

hpt

Hölder-Pichler-Tempsky, Wien
B. G. Teubner, Stuttgart

BT

Peter Bender - Alfred Schreiber

Operative Genese der Geometrie

Aus der Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 12

ISBN 3-209-00580-X

"Geometrie zu lernen und zu betreiben bedeutet grösstenteils, geometrische Begriffe zu erwerben und mit ihnen umzugehen. Eine Didaktik der Geometrie muss daher vorab Antworten auf folgende Fragen suchen: Was ist das Besondere an den Begriffen der Geometrie im Vergleich zu Begriffen überhaupt? Welche Rolle spielen sie in der menschlichen Erkenntnis? Inwiefern und warum passen sie auf die Wirklichkeit? Wie werden sie gebraucht, und wie kann und sollte man sie erwerben?"

Diese Fragen sind alles andere als leicht, auch schmecken sie ein wenig nach Philosophie. Der Leser, zumal wenn er sich nicht für Wissenschafts- oder Grundlagen-theorie interessiert, kann sich gleichwohl auf unseren Versuch einlassen, eine (vorläufige) Antwort auf einige jener Fragen zu finden. Wir jonglieren mit keinerlei Spezialwissen, und unser Standpunkt ist der des gewöhnlichen Alltagswissens. Zudem fassen wir uns kurz, allerdings werden die Dinge auch nur in erster Näherung gesagt. Der tiefer eindringende Kritiker kann zu den ihm fehlenden Einzelheiten im Teil II des Buches nachlesen."

P. Bender
A. Schreiber

Inhaltsverzeichnis:

- Anwendung in der Praxis und didaktische Strukturierung.
- Die Begriffe der Geometrie - Anwendungen in der Praxis - Grundzüge der operativen Geometrie-Didaktik - Unterrichtsbeispiele.
- Didaktische Grundlagenfragen und logisches Verständnis.
- Genese der Geometrie als didaktisches Problem - Die operative Interpretation von Wissenschaft - Die Idee der Homogenität - Ideative Begriffsbildung - Das Prinzip der Exhaustion - Zur Diskussion über die operative Grundlegung der Geometrie.

Mathematik

P. BENDER - A. SCHREIBER: Operative Genese der Geometrie. - Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Bd. 12. Hg. von W. DÖRFLER u. R. FISCHER. - Wien: Hölder-Pichler-Temsky 1985 u. Stuttgart: Teubner 1985. 463 S. Kart. öS 434,-. DM 62,-.

Die vorliegende Monographie, von beiden Verfassern gemeinsam geschrieben, verfolgt das anspruchsvolle Ziel: die genetischen und didaktischen Grundlagen der Geometrie von einem operativen Standpunkt aus zu behandeln. Ausgangspunkt bilden dabei Untersuchungen Hucco Dinglers, der seit Beginn dieses Jahrhunderts in zahlreichen Arbeiten (Hauptwerk: »Die Grundlagen der Geometrie« 1933) eine Begründung der Geometrie nach überwiegend normativen, operationalen und konstruktiven Prinzipien versucht hatte. Seine Ansätze und Vorschläge - zu denen auch die Betonung auf die lebensweltliche Erfahrung und die Betonung ihres apriorischen Charakters gehören - wurden in mathematischer Hinsicht zuerst von PAUL LOEWENZEN (seit 1961) präzisiert, dessen Arbeiten (»Erlanger Schule«) vielleicht kritischer Anlaß zum vorliegenden Werk waren.

Inhalt: Die Begriffe der Geometrie - Anwendungen in der Praxis (mit einer überaus reichhaltigen Sammlung von Beispielen) - Grundzüge einer operativen Geometrie-Didaktik - Unterrichtsbeispiele - Genetische Grundlagen der Geometrie (und des Geometrieunterrichts) - Operative Interpretation von Wissenschaft - »Schlüsselbegriffe« des operativen Geometrieverständnisses: Homogenität, Ideation, Exhaustion - Zur Diskussion über die operative Grundlegung der Geometrie - Nachwort und Anhang: mit einer chronologischen, teilweise annotierten Zusammenstellung von Arbeiten (81 Titel), die sich mit der operativen Interpretation und Grundlegung von Geometrie in der Tradition Dinglers befassen; mit einem umfangreichen Literaturverzeichnis (284 Titel) und einem sorgfältigen und ausführlichen Index (23 Seiten).

Die Verfasser entwickeln und begründen ihre Auffassung, daß »Begriffe der Geometrie keineswegs (...) blosse Nachbilder der Realität vorhandener, sondern vielmehr (...) Vorbilder erst nach zu realisierender Formen« sind. Prägnanter: »Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden« (Prinzip der operativen Begriffsbildung). In diesem Sinne steht ihr Werk auch in einer Tradition, die durch die »Formenkunde« von E. ZEISSIC und die »Lebensvolle Raumlehre« von H. KEMPNISKY repräsentiert werden kann. Es ist gekennzeichnet durch einen sehr weiten Begriff von Didaktik, und es besteht durch ein »breites Geflecht aus pädagogischen, erkenntnistheoretischen, mathematischen, anthropologischen, technologischen und praktischen Themenfeldern«. Als Beitrag zur Begründungsproblematik der Geometrie und vor allem als Alternative zum üblichen deduktiven Kontext von Geometrie und Geometrieunterricht sei es einem breiten Leserkreis empfohlen: Studierenden und Unterrichtenden, Mathematikern und Geometern, Didaktikern und Wissenschaftstheoretikern.

J. Schönbeck

hpt

Hölder-Pichler-Tempsky, Wien
B. G. Teubner, Stuttgart



MNU #2/1 Bücher

Der mathematische und

Naturwissenschaftliche Unterricht 42
(1989), S.63

Buchbesprechungen

BENDER, PETER; SCHREIBER, ALFRED: Operative Genese der Geometrie. Hölzler - Pichler - Tempisky, Wien 1985; Teubner, Stuttgart 1985; 464 Seiten. (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12)

Die Autoren setzen sich das Ziel, die Ansätze von H. Dingler, der Erlanger Schule und anderer zur Begründung und Entwicklung der euklidischen Geometrie aus Herleitungsvorschriften heraus für den Geometrieunterricht an Schulen auszuwerten und zu konkretisieren. Sie nehmen den Standpunkt ein, daß geometrische Begriffe vornehmlich im Zusammenhang zweckgerichteter Handlungen gebildet werden und dabei nicht bloße Nachbilder bereits vorhandener, sondern vielmehr Vorbilder erst noch zu realisierender Formen sind.

Dementsprechend fordern sie als didaktisches *Prinzip der operativen Begriffsbildung* (POB): "Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d.h.: von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herleitung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen (...) werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe" (S. 26). Um die Vorerfahrungen der Schüler auszunutzen, lassen die Autoren auch zu, von in der Praxis vorhandenen Formen auszugehen, deren Gebrauch, Funktion und Zweck zu analysieren, die hinter ihnen stehenden Ideen zu rekonstruieren, Herleitungsvorschriften samt Normen zu entwickeln und schließlich die Zweckmäßigkeit der Ausgangsformen zu überprüfen. Auf jeden Fall ist der Kern des POB die Operativität im Begriffserwerb: "Die Handlungen sind Teil der Begriffsbildung, und die Begriffe haben sich in ihnen zu bewähren" (S. 192).

Im Kapitel "Grundzüge einer operativen Geometrie-Didaktik" wollen die Autoren zeigen, wie das POB konkret im Unterricht zu handhaben ist und welchen Beitrag es zur Umwelterschließung, Strukturierung des Unterrichts mit universellen und zentralen Ideen, Bestimmung und Verfolgung von Lernzielen, lokalen und globalen Stofforganisationsleistungen kann. Dieses Ziel wurde meines Erachtens nicht ganz erreicht, weil die Ausführungen dieses Kapitels ziemlich allgemein bleiben und die geschilderten Unterrichtsbeispiele zur Schraubenlinie, zur Geometrie des Fußballs und zu Parallelfiguren keine diesbezüglichen Anleitungen für den Lehrer enthalten. Das Kapitel "Anwendungen in der Praxis" bietet zwar außerordentlich reichhaltiges Material zum Auftreten geometrischer Sachverhalte in der Umwelt, welches aber für den Unterricht noch nicht aufbereitet ist. Daher lassen sich mögliche Auswirkungen des POB auf Vorbereitung, Verlauf und Erfolg von Geometrieunterricht kaum beurteilen sowie ein solcher Unterricht mit "üblichem" schwerlich vergleichen.

Der zweiten Teil des Buches vertieft Aspekte des POB und der operativen Geometriedidaktik vor allem aus wissenschaftstheoretischer

und aus historischer Sicht. Die Ausführungen zur "Genese der Geometrie als didaktisches Problem" können wohl tatsächlich das Verständnis des POB in unterrichtswirksamer Weise vertiefen, und das Kapitel über "die operative Interpretation von Wissenschaft" (Interpretation = Sinngebung) stellt den Ansatz in einen größeren Zusammenhang. Dazu sehe ich nicht, welchen Einfluß die Kapitel zur Homogenität, zur idealen Begriffsbildung und zum Prinzip der Exhaustion auf den Geometrieunterricht ausüben sollen. Bei der Homogenität geht es um formale Präzisionen mittels H-Schemata und ihre Sinngebung durch Ideation oder durch Exhaustion. Bei der Exhaustion wird hauptsächlich die reelle Exhaustion von Ideen betrachtet, d. h. die näherungsweise Durchsetzung von Ideen in der Realität aufgrund einer praktischen Herstellung von Formen. Eine eingehendere Erörterung befaßt sich mit der Gewinnung des Kongruenzbegriffs und der Idee des starren Körpers einschließlich ihrer simultanen Realisierung. Das letzte Kapitel zur "Diskussion über die operative Grundlegung der Geometrie" springt mitten hinein in die Diskussion zu einigen Problemen eines zwar axiomatischen, aber doch weitgehend operativ interpretierbaren Aufbaus der euklidischen Geometrie. Dieses Kapitel ist wohl für Kenner geschrieben, da vielfach Erläuterungen zur Sache fehlen.

Die Lektüre der Aufsätze beider Autoren in MU 24, Heft 5, 1978, und in Ed. Studies in Math. 11, 1980, gegen etwas genauere Eindrücke vom Inhalt des Buches.

Lothar Profke, Gießen

Bender, P. / Schreiber, A.: Operative Genese der Geometrie. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 12. Hölzler-Pichler-Tempisky, Wien/B. G. Teubner, Stuttgart 1985; 464 S. kart. DM 62,-.

Ein Ziel dieses Buches ist eine didaktische Auswertung der Literatur, die sich mit den operativen Aspekten der Geometrie in Anknüpfung an *Dingler* und *Lorenz* beschäftigt. Wesentlich ist die These: Geometrische Begriffe werden nicht durch Abstraktion, sondern im Zusammenhang zweckgerichteter Handlung durch Ideation gebildet. Abstraktion ist ein Absehen von bestimmten Eigenschaften, die ein Ding besitzt. Ideation ist ein Hinsehen von Eigenschaften, die einem Ding nicht oder nur unvollkommen zukommen. Das Hinsehen läßt sich steigern zum Hinsehen nach bestimmten Handlungsvorschriften - dann nennen die Autoren die Begriffsbildung operativ.

Das Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil (240 S.) ist für Praktiker geschrieben. Hier findet man eine klare, verständliche Einführung in die operative Begriffsbildung. Dabei geht es auch um Antworten auf die Frage, inwiefern und warum geometrische Begriffe auf die Wirklichkeit passen. Unsere Schüler erwarten zu Recht Antworten auf Fragen wie: Was ist eine Ebene? Wie kommt man auf ein Axiom? *Hilberts* Formalismus ist zwar die geeignete Grundlage für das Studium von Axiomensystemen (beispielsweise bei der Frage nach der Abhängigkeit eines Axioms von anderen), zur Herausbildung der Begriffe in der Schule ist der Formalismus aber dann wenig hilfreich, wenn Geometrie als Lehre von der räumlichen Wirklichkeit verstanden wird. Geometrische Begriffe können mit Hilfe zweckgerichteter praktischer Handlungen operativ gebildet werden. Schöne Unterrichtsispiele und eine umfangreiche Sammlung von Funktionsanalysen technischer und alltäglicher Gegenstände werden bereitgestellt.

Im zweiten Teil wird vertieft, beispielsweise wird der Begriff „operativ“ gegen den gleichlautenden Begriff der Entwicklungspsychologie *Piagets* abgegrenzt. Ausführlich werden die Schlüsselbegriffe des operativen Geometrieverständnisses diskutiert: Homogenität, Ideation, Exhaustion. Es wird deutlich, daß manche Fragen bei der operativen Grundlegung der Geometrie heute noch offen sind.

Wer sich über die operative Grundlegung der Geometrie genau informieren möchte, findet in diesem Buch einen vorzüglichen Einstieg. Ein ausführliches chronologisches Inhaltsverzeichnis wird ihm unterstützen. Wer auf Details verzichten möchte, aber Geometrie unterrichtet, der sollte keinesfalls am ersten Teil dieses Buches vorbeigehen. Hier findet der Lehrer eine Fülle von Anregungen zur Einführung geometrischer Begriffe und zum Arbeiten mit diesen. Man möchte den ersten Teil dieses Buches geradezu zur Pflichtlektüre jedes Mathematiklehrers erklären.

In: *Praxis der Mathematik* 29 (1987), S. 191

Ulrich Siedel

Genze schließen, aber es leistet hier einen wertvollen Beitrag.

Das Buch entwickelt keine eigene Didaktik der Mathematik in Berufsschulen, dazu sind die Beiträge zu heterogen (wie die Biographien ihrer Autoren) und letztlich doch auch zu wenig aufeinander abgestimmt. Zwischen dem (selbst-)kritischen Beitrag der „Nur-Didaktiker“ BRAUN und STRÄSSER etwa und den pro-gammatischen Beiträgen einiger „Praktiker“ zeigen sich hinsichtlich Sprache, Reflexion und Erkenntnisinteressen doch beträchtliche Unterschiede. Was das Gemeinsame und Verbindende ausmacht, ist das engere, eigenverantwortliche Bemühen der Autoren, die eigene Kompetenz und den persönlichen Erfahrungshintergrund für ein gemeinsames Aufgehen, nämlich die Didaktik der Mathematik an Berufsschulen, einzusetzen. Und m. E. liegt gerade in dieser bewussten Nutzung der individuellen Erfahrung und Kompetenz, in dieser Heterogenität ein Vorzug dieses Buches. Meines Erachtens hätte man allerdings im Vorwort oder spätestens im 1. Kapitel auf diese Sprünge hinweisen sollen, um zugleich klarzustellen, daß die Beiträge in Kapitel 2 und 3 nicht den Anspruch erheben, den im 1. Kapitel (implizit) formulierten Anforderungen an einen Fachlehrerunterricht in vollem Maße zu genügen.

Das Buch gibt dem an der Mathematik in der Berufsschule Interessierten eine Fülle von Informationen und Anregungen verschiedenster Art. Berufsschullehrer für Mathematik bzw. Fachlehrer wie auch Lehrer für berufliche Fachrichtungen können daraus einigen Gewinn für ihren Unterricht (aber auch für ihr Selbstverständnis) ziehen. Fachdidaktiker berufsbezogener Disziplinen, Berufs- und Wirtschaftspädagogen wie auch Mathematikdidaktiker mit Interesse am beruflichen Schulwesen finden darin zweifellos interessante Hinweise und Informationen (implizit auch in methodologischer Hinsicht) und selbst für Mathematik-, eventuell auch Physik- und Chemielehrer an Haupt- und Realgymnasien kann das Buch von Interesse sein. Die Hoffnung der Herausgeber, daß selbst Bildungspolitiker dieses Buch zur Hand nehmen könnten, kann ich vor meinem persönlichen Erfahrungshintergrund mit österreichischen Bildungspolitikern kaum teilen – mag sein, daß hier die Situation in der Bundesrepublik etwas/anders ist.

Auch wenn ich nach wie vor unsicher bin, ob es so etwas wie eine Didaktik der Mathematik bzw. des Fachrechnens an beruflichen Schulen schon gibt oder ob sie sich erst entwickeln muß, dieses Buch stellt für mich jedenfalls ein kräftiges Lebenszeichen einer solchen Didaktik dar.

In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19 (1987), 76-82

BENDER P., SCHREIBER, A.: **Operative Genese der Geometrie**. Hrsg.: Hölder - Pichler - Tempusky, Stuttgart: Teubner, 1985 - 464 S. (Schriftreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 12) ISBN 3 - 209 - 00580 - X bzw. 3 - 519 - 02790 - 9

Lothar PROFFE, Gießen

1. Absicht des Buches

Die Autoren setzen sich das Ziel, die Ansätze von H. Dingler, der Erlanger Schule um P. Lorenzen sowie anderer zur Begründung und Entwicklung der euklidischen Geometrie aus Herstellungsvorschriften heraus für den Geometrieunterricht an Schulen auszuwerten und zu konkretisieren. Sie nehmen den Standpunkt ein, daß geometrische Begriffe vornehmlich im Zusammenhang zweckgerichteter Handlungen herausgebildet werden und dabei nicht bloße Nachbilder bereits vorhandener, sondern vielmehr Vorbilder erst noch zu realisierender Formen sind.

Der erste, mehr praktische Teil des Buches entwickelt das grundlegende *Prinzip der operativen Begriffsbildung* (POB), stellt darauf aufbauend Grundzüge einer operativen Geometriedidaktik vor samt einigen Unterrichtsbeispielen und präsentiert eine Fülle von Anwendungen der Geometrie. Der zweite, sehr theoretische Teil beschäftigt sich allgemein mit dem Begriff der Genese sowie einer Abgrenzung des POB, mit der operativen Interpretation von Wissenschaften und mit den Schlüsselbegriffen Homogenität, Ideation und Exhaustion. Schließlich führt der zweite Teil in die Diskussion ein über die operative Grundlegung der gesamten euklidischen Geometrie.

Das Buch will weder ein Lehrbuch der Geometrie sein noch eine methodische Unterrichtsanleitung. Ich stelle es als eine Didaktik der Geometrie ein. Bevor ich weiter werde ich versuchen, einen Einblick in die Grundideen der Autoren zu geben sowie eine Übersicht über den Inhalt des Buches.

2. Das Prinzip der operativen Begriffsbildung

2.1 Zur Rechtfertigung des POB
Geometrische Begriffe werden nicht durch Abstraktion aus der Wirklichkeit herausgelöst, also durch Zusammenfassen realer Objekte aufgrund gemeinsamer Merkmale unter Abseilen von unterschiedlichen wesentlichen Eigenschaften. Wie findet man die gemeinsamen geometrischen Merkmale, ohne schon geometrische Begriffe zu gebrauchen?

Geometrische Begriffe entstehen durch *Ideation* (Idealisierung), durch *Hinweis* von *Eigenschaften*, die Objekte allenfalls unvollkommen besitzen. Dieses Hinweisen geht bei der Verwirklichung eines Begriffs in ein *Hinretornen* über: der Begriff liefert Herstellungsvorschriften, die über Handlungsvorschriften in der Realität möglichst gut durchzusetzen sind. Die Idee des Begriffs läßt sich nicht ganz verwirklichen, sondern nur annähernd ausschöpfen (exhaustieren). Die zu realisierenden Ideen werden gelegentlich durch Umweltparametere angeregt und oft zielstrebig zur Erfüllung gewisser Zwecke entwickelt.
Durch die Herstellung bekommt ein Begriff eine operative Bedeutung. „Wird ein Begriff operativ gebil-

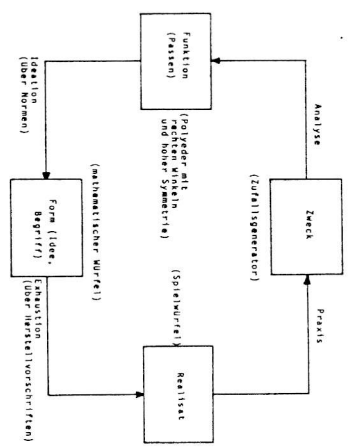
det, so liegt sein Sinn, seine inhaltliche Grundlage in den Handlungen, die ihn verwirklichen, und den Zwecken, die damit erfüllt werden“ (S. 21). Das Verständnis *künstlicher* Phänomene greift also auf praktische Zwecke zurück.

Zum Verständnis *natürlicher* Phänomene (als Anschauungsbeispiele geometrischer Begriffe) schafft man sich Vorstellungen mit Hilfe passender, bereits gebildeter geometrischer Begriffe (und benötigt außerdem die Naturwissenschaften).

2.2 Prinzip der operativen Begriffsbildung

Für die Bildung geometrischer Begriffe bevorzugen die Autoren den zweiten Teil des Wirklichkeitsbezugs, weil er die inneren Motive zur Begriffsbildung liefert und besser verstehen lasse, weshalb diese Begriffe auf die (nach ihnen gestaltete) Wirklichkeit passen.

Sie fordern als didaktisches *Prinzip der operativen Begriffsbildung*: „Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d. h.: Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen (...) werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe“ (S. 26).



Schemata zum POB (am Beispiel der Kreisform)

Begriffsbildung soll dabei auch umfassen die Gewinnung von Sätzen über den Begriff und den Einbau in ein System, Anweisungen zum Begriffsgebrauch, Lösen von Problemen.

2.3 Variationen des POB

„Am reinsten zu verwirklichten wäre das POB, wenn Schüler in Problemsituationen gebracht werden könnten, in denen sie die Probleme durch bildungsgeometrische Begriffe mit Herstellung und Anwendung geometrischer Formen zu lösen hätten“ (S. 191). Nun haben die Schüler schon Erfahrungen mit geometrischen Formen in ihrer Umwelt gesammelt. Selbst wenn der Geometrieunterricht von einem Problem der Erfüllung gewisser Bedürfnisse und Zwecke ausgeht, beziehen die Schüler die ihnen bekannten Realsituationen der Geometrie auf diese Bedürfnisse und Zwecke zurück. In der Diskussion ein. Um solche Vorkenntnisse im Unterricht zu nutzen, kann man in der Begriffsbil-

dungsschleife auch beim fertigen Objekt einsteigen, seinen Zweck, seinen Gebrauch und seine Funktion analysieren, die verwendeten Formen begründen und die hinter ihnen stehenden Ideen rekonstruieren. Herstellungsvorschriften samt Normen entwickeln, schließlich die Zweckmäßigkeit der gewählten Formen überprüfen.

Bender bereits 1980: „Das Begriffsbildungsschema kann in der Reinform nicht durchgeführt werden im Unterricht. Wofür die Menschheit tausende von Jahren gebraucht hat, kann den Schülern nicht in wenigen Stunden gelingen. Vielmehr sind ja die Formen schon da (...) die Begriffsbildungsschleife beginnt bei der Praxis bei den schon vorfindbaren Formen und deren Gebrauch, und die Zwecke werden rekonstruiert“ (zitiert nach [3], 18).

Auf jeden Fall ist der Kern des POB die Operativität im Begriffsverständnis. „Die Handlungen sind Teil der Begriffsbildung, und die Begriffe haben sich in ihnen zu bewahren“ (S. 192). Die Handlungsvorschriften zur Realisierung geometrischer Begriffe liefern die inhaltliche Grundlage der Begriffe. Auch das Reden über Handlungen und die Entwicklung von Herstellungsvorschriften gehören zu einem handlungsorientierten Unterricht.

Die Autoren kommen schließlich zu folgenden Grundsätzen für das POB:

- Diskussion verschiedener Zwecksetzungen und Situationen, die zum selben Begriff führen,
- Erprobung alternativer Formen für denselben Zweck,
- keine bloße Nachahmung historischer Genese,
- Einbezug der zu bildenden Begriffe in ein geometrisches System,
- Problemlösen, zumindestens in Modellen,
- wo irgend möglich: Herstellung von Realsachen, zumindestens aber deren praktischer Gebrauch,
- Aufbau auf Vorerfahrungen und damit häufig Anfang der Schleife beim Gebrauch einer Form,
- Vermeidung eines starren Schematismus“ (S. 193).

2.4 Abgrenzungen

„Im POB wenden wir das genetische Prinzip auf die Geometrie an, dies geschieht durch die operative Interpretation geometrischer Begriffe“ (S. 209). Die Etiketten „genetisch“ und „operativ“ werden auch anderweitig verwendet, so daß eine Abgrenzung nötig ist.

Genese kann *Lehrgang*, in Gestalt eines Entwurfes, bedeuten (*konstruierbare Genese*) oder *Entwicklung*, also einen tatsächlich ablaufenden Werdegang (*faktische Genese*). Der Begriff „Entwicklung“ hat seinerseits zwei Bedeutungen: Entwicklung eines einzelnen (*individuelle Genese*) oder Entwicklung einer Disziplin (*historische Genese*). Konstruierbare Genesen lassen sich grob einteilen in *simultorientierte* (*interpretierende Genesen*) und in *systemorientierte* (*systematische Genesen*), wobei Zwischenformen vorkommen (S. 28, 251-254).

Den Autoren liegt wohl an einer Übereinstimmung von Lehrgang und Entwicklung, an konstruktiven Genesen interpretierender Art, die sich gleichwohl an tatsächlichen Entstehungszusammenhängen orientieren, an individueller Entwicklung ausrichten, von historischer Entwicklung inspiriert sind (S. 28, 263).

Der im POB verwendete Ausdruck „operativ“ bezieht sich nicht auf Aktivitäten schlechthin, sondern immer auf zweckgerichtetes Handeln bei der Begriffsrealisierung zusammen mit einem Bewußtsein vom

Sinn solcher Handlungen. „Der Ablauf konstruktiver Genesen ist ausdrücklich auf bestimmte Ziele hin auszurichten, insbesondere solche, die von Lernenden als leitende Zwischenforderungen anerkannt werden können“ (*teleologisches Prinzip*; S. 265). Hier meint „Ziel“ nicht Lehr- oder Lernziel, sondern das Erreichen von Zwecken zu entwickelnder Sachhalte.

Diese Ausführungen und die folgende Tabelle sollen zeigen, dass das POB und das *operative Prinzip* in Anlehnung an Piagets Entwicklungspsychologie von verschiedener Herkunft und eigentlich gar nicht vergleichbar sind, sowie in verschiedenen Bereichen des didaktischen Feldes ansetzen (S. 260 f.).

	„operatives Prinzip“	„operatives Prinzip“
Herkunft	Erkenntnistheoretische Analyse von Wissenscharakter (Dreyfus)	Psychologische Beschreibung der Intelligenzentwicklung (Piaget)
Wesen	Entwicklung von handlungs-vorwissen, Herstellung und Gebrauch	Verinnerlichung von handlungen und Organisationsin Gruppenformen
Begriffstypologie	Interpretierend, final bestimmt	Faktisch, kausal bestimmt
Stufenin- leitung	Hauptliche Einteilung in Stufen erfolgt über die thematische in Schlägen	Essenzieller Bestandteil in Stufen erfolgt über die thematische in Schlägen, die in klareren Stufen, die in klareren folgen durchlaufen werden
Finalität	nicht auf bestimmte Fähigkeiten beschränkt, jedoch vorläufig nur für geometrische Aufgaben	nicht auf bestimmte Fähigkeiten beschränkt, sondern allgemein für alle mathematischen Strukturen
Strukturierung des Lernprozesses	„operativierend“, ein- stufenweise, all- umfassend	„operativierend“, ein- stufenweise, all- umfassend
Realitätsbe- ziehungen	essentieller Bestandteil	daher unabhängige Kategorien

Tab. 5

Widersprüchlichkeiten zwischen beiden Auffassungen treten auf, wenn aus den psychologischen Untersuchungen unzulässige epistemologische Folgerungen gezogen werden oder umgekehrt.

3. Operative Geometriedidaktik

Im Kapitel „Grundzüge einer operativen Geometriedidaktik“ wollen die Autoren zeigen, wie das POB konkret im Unterricht zu handhaben ist und welchen Beitrag es zur Umweltschließung, Strukturierung des Unterrichts mit universellen und zentralen Ideen, Bestimmung und Verfolgung von Lernzielen, lokalen und globalen Stofforganisation leisten kann.

Oberstes inhaltliches Lernziel und gleichzeitig Rechtfertigung des gesamten Geometrieunterrichts ist die „Strukturierung des wirklichen Raumes und Erforschung der Nutzbarkeit dieser Struktur“ (S. 207, 208). Die folgende Abbildung schlüsselt dieses Ziel in Teilleistungen auf (S. 209):

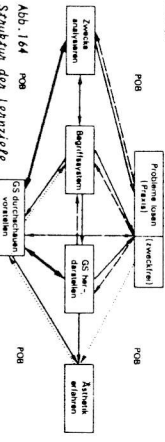


Abb. 1/4 POB
Struktur der Teilleistungen
Dabei bedeutet „GS“ ganz allgemein (räumlicher) geometrischer Sachverhalt; die Pfeile und ihre Dicke sollen Abhängigkeitsgrade angeben.

Dieses Konzept deckt sich weitgehend mit dem eines anwendungsorientierten, umweltschließenden Geometrieunterrichts, wenn *Umweltschließung* sehr weit verstanden wird. „Nicht nur die Nutzbarkeit der Geometrie ist zu erfahren, sondern auch die der Struktur des Raumes; nicht nur der mögliche Nutzen für die eigene Person ist zu erforschen im Zuge der Deassemblierung, sondern auch als Akt der Lebensbereicherung soll ganz allgemein Verständnis erlangt werden von Zweck und Funktion einer künstlichen Form, von der Funktion einer biologischen Form, von den Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich unbeliebige natürliche Formen gebildet haben, usw.“ (S. 196). Zur Umweltschließung soll auch der Erwerb kognitiver Strategien und intellektueller Techniken gehören, sowie die Realisierung damit zusammenhängender allgemeinerer Erziehungsziele (S. 194).

Neu ist wohl nur die Forderung, die Zweckhaftigkeit gewisser geometrischer Sachverhalte zu erörtern und aus geometrischen Begriffen Normen und Handlungs-vorschriften zur Herstellung von Formen zu entwickeln.

Bei all dem sollen *mathematische Aktivitäten im eigentlichen Sinne* nicht vernachlässigt werden, wie das Teilziel „Aufbau eines Begriffssystems“ in voriger Abbildung zeigt. Im einzelnen: Schätzen einer Fachsprache (Definitionen), Aneignung von Faktenwissen (Sätze, Regeln, Beispiele), Entwicklung von Handlungs-vorschriften (und Konstruktionen, Algorithmen), Entdeckung grundlegender Prinzipien und zentraler Ideen (Passen als eingeschränkte Beweglichkeit, Optimierung und Messen; Symmetrie aus Homogenität; Approximation aus Exhaustion), schließlich auch axiomatische Fundierung und deduktives Schließen“ (S. 189). Da Geometrie als Lehne von der räumlichen Wirklichkeit verstanden wird, soll diese Wirklichkeit die mathematische Theorie interpretieren (den Sinn geben?) [gemäß 2.4f.] und umgekehrt die Theorie die Wirklichkeit strukturieren und nutzbar machen (S. 190).

„Äußerlich unterscheidet sich also ein operativer Geometrieunterricht über weite Strecken – nämlich da, wo es um Theoriebildung geht – gar nicht so sehr vom herkömmlichen“ (S. 190). Der operative Geometrieunterricht unterscheidet sich vom üblichen nicht so sehr im Umfang, wie die Zweckhaftigkeit geometrischer Sachverhalte erörtert wird, sondern durch den dauernden Bezug beim Aufbau eines Begriffssystems auf die Aktivitäten zu den anderen Teilleistungen der vorigen Abbildung (S. 212).

Dieser wechselseitige Bezug soll verhindern, dass man Anwendungsbeispiele und Probleme ohne theoretische Durchdringung und sonstige Querverbindungen nacheinander abhandelt, oder aber ein begriffliches System ohne echten Bezug zur Wirklichkeit aufbaut. „Mit dem POB im Unterricht können diese beiden Formen von Isolierung gar nicht erst entstehen: Zu jedem Wesen gehört ja gerade die Integration von Leben und Realität, von geometrischer Theorie und geometrischer Praxis, von Alltagswelt und Schulunterricht“ (S. 189).

Den Aufbau eines Begriffssystems stellen sich die Autoren dem Spiralprinzip gemäß vor: wiederholter Lauf durch dieselbe begriffsbildungsschleife des POB (vgl. Abbildung in 2.2), etwa zur Diskussion von Alternativen, Abstützungen, Wahl anderer Startpunkte, Verweilen bei einzelnen Konstituenten (Zweck, Funktion,

Begriff, Realität), Verzweigungen zu anderen Begriffsbildungsschleifen usw. (S. 190, 214).

Damit kommt das Problem der *Stofforganisation* in den Blick: Die Begriffsbildungsschleife des POB stellt die kleinste selbständige Organisationseinheit dar. Für längere Zeitaltschritte ist das Zusammenspiel mehrerer Begriffsbildungsschleifen zu organisieren.

Beim Aufstieg in der Curriculumspraxis erkennen die Autoren drei qualitativ verschiedene Schwerpunkte (*Stationen*): Im *ersten Stadium* (grob: in der P-Stufe) befragt man sich bei Situationen und Phänomenen aus der Umwelt der Schüler mit Vorkommen, praktischem Gebrauch, Zwecken, Bedürfnissen, Herstellung, Realisierungsgüte. Das *zweite Stadium* (etwa S1) dient der Entwicklung eines begrifflichen Instrumentariums zur Beherrschung von Umweltsituationen und -phänomenen. Aus der Analyse von Zwecken und Funktionen heraus werden Begriffe idealisiert; Neben- oder vor die praktische Erprobung von Problemlösungen tritt ihre begriffliche Vorplanung. Im *dritten Stadium* (ungefähr S1f) geht es um eine logische Anwendung des Begriffssystems: Wahl geeigneter Axiome, mögliche Rechtfertigung aus lebensweltlicher Praxis, Herleitung von Sätzen (S. 214 f.).

4. Realisierbarkeit im Mathematikunterricht

4.1 Veränderung der Unterrichtspraxis

Die Autoren verlangen nicht, daß im Geometrieunterricht allein der operative Aspekt wirksam werden dürfte, aber sie wollen dem operativen Aspekt neben einem logisch-begrifflichen und einem ästhetischanschaulichen Aspekt Geltung und Raum verschaffen (S. 400).

Um die Unterrichtspraxis zu beeinflussen, reichen allgemeine didaktische Erörterungen, knappe Bemerkungen zu einzelnen Beispielen und Appelle an Lehrer nicht aus. Allgemeine Aussagen bleiben allgemein und unverbindlich, wenn dem Angesprochenen entsprechende Erfahrungen fehlen. Nur stichwortartig mitgeteilte Beispiele werden nur engagierter Lehrer ausarbeiten und im Unterricht erproben.

Erforderlich sind vielmehr ausgearbeitete, direkt im Unterricht umsetzbare Beispiele mit methodisch-didaktischen Ratschlägen, welche die organisatorischen Randbedingungen der Schule und die Vorbildung von Lehrern berücksichtigen. Die Realisierbarkeit sollte durch Erfahrungsberichte dokumentiert werden. Betreffen die Vorschläge längere Zeiträume und größere Stoffgebiete, wünscht man sich ins einzelne gehende Lehrgänge.

Solche Ausarbeitungen bewirken vermutlich mehr, wenn sie an der bestehenden Praxis ansetzen und diese allmählich in die gewünschte Richtung zu ändern versuchen, als wenn sie eine radikale Umwälzung zum Ziel haben.

Bietet das Buch genügend Hilfe zur Umsetzung des POB in die Unterrichtspraxis?

4.2 Unterrichtsbeispiele

Die Autoren stellen drei Unterrichtsbeispiele vor: – Die Schraubenlinie, behandelt in der 8. Klasse, Realschule; – Geometrie des Fußballs, behandelt im 9. Schuljahr; – Parallelfiguren, erprobt mit Studenten und in der 7. Klasse, Realschule.

Jede Einheit benötigt etwa acht Schulstunden.

Die Einheit *Schraubenlinie* beginnt mit der Frage, wie man Höhenunterschiede überwindet. Die Beantwortung führt schließlich zur Wendeltreppe sowie zur Steigung und Durchgangshöhe einer Wendeltreppe. Das Suchen nach gleichförmigen Dingen bringt Federn, Schrauben, Korkenzieher usw. in den Blick. Hieran sowie an einem Funktionsmodell wird die Funktionsweise von Schrauben erarbeitet; gleichzeitig Dreh- und Verschiebungsbewegung. Zur Herstellung einer materiellen Schraubenlinie wickelt man einen Draht auf ein Rundholz. Zur Längensteuerung denkt man sich umgekehrt eine Schraubenlinie abgewickelt. Weitere Anwendungen, bei denen es auch auf den Orientierungssinn der Schrauben ankommt, beschreiben die Einheit.

Bei den *Parallelfiguren* steht am Anfang ein Gespräch über die zweckmäßigen Bahnmotoren bei Schnellzuglokomotiven, insbesondere bei Laufritzpinnen im Stadion. Das Problem der Kurvenvorgabe führt zur experimentellen Umlängsbestimmung bei Kreisen (samt einer Diskussion über Meißengaugigkeiten). Die gleichzeitigen Laufbahnen im Stadion und die Gleichheit der Kurvenvorgabe wird veralgemeinert zu Parallelkurven und ihrem Längensunterschied. Das Durchfahren von Kurven mit zweispurigen Fahrzeugen beendet die Einheit. (Vgl. auch [6]).

Die Schilderung der beiden Unterrichtsbeispiele im Buch ist nicht ausreichend für eine Beurteilung; inwiefern bei ihnen das POB realisiert wurde und welche charakteristischen Aspekte der operativen Geometriedidaktik zum Tragen kamen.

Die Autoren halten für Leser des Kapitels zur operativen Geometriedidaktik einen didaktischen Kommentar zur Schraubenlinie für überflüssig, weil die Schraubenlinie ein Paradebeispiel operativer Begriffsbildung darstellt (S. 219). Andererseits soll dieses Beispiel die zentralen allgemeinen Ausführungen zur operativen Geometriedidaktik konkretisieren (S. 188). Hier wird der noch unsichere oder zweifelnde Leser von „Pontus zu Pflanus“ geschickt.

Auch die Parallelfiguren brauchen noch ausführliche methodisch-didaktische Hinweise, weil „beim Parallelitätsbegriff operative Züge ohnehin nur relativ schwach ausgeprägt“ sind, und deshalb das Thema ein Beispiel für den partiellen Einsatz des POB liefert (S. 231).

Aus den Berichten zu den beiden Unterrichtsbeispielen kann ich nicht entnehmen, ob und welche Maßnahmen getroffen wurden, damit Schüler zentrale Ideen (vor allem Ideation und Exhaustion, aber auch andere) entdecken und als solche bewußt aufnehmen, Normen zur Herstellung von Dingen entwickeln und in Handlungs-vorschriften umsetzen, Querverbindungen (welche?) erkennen und ein Begriffssystem (welches?) aufbauen.

Mehr Information bietet der Bericht zur *Geometrie des Fußballs*: Nach einer Zweckanalyse des Fußballs werden Kriterien zum Aufbau seiner Lederdecke entwickelt. Ob die Lederdecke des üblichen Fußballs optimal ist, sollen Alternativen zeigen. Statt Parkettunterlagen auf der Kugel untersucht man solche in der Ebene, speziell archimedische Parkette. Die Schüler sollen einschätzen, daß es davon nur endlich viele gibt. Danach der Übergang zum Raum: räumliche Ecken aus regulären Flächen. Begriffe des archimedischen Polyeder, Bauregulärer und anderer archimedischer Polyeder, Ver-

fahren zum Finden aller archimedischen Polyeder (ohne Durchführung) und Liste dieser Körper. Die Schüler stellen fest, daß das zum üblichen Fußball gehörende archimedische Polyeder die anfangs entwickelten Kriterien am besten erfüllt, und überlegen noch die praktische Herstellung eines Fußballs. Zum Schluß werden weitere Dinge aus der Umwelt genannt, welche die Form eines archimedischen Polyeders haben. (Vgl. auch [2].)

Zu diesem Unterrichtsbeispiel geben die Autoren knappe Hinweise, wo Konstituenten des POB durchlaufen werden, und zentrale Ideen wie Exhaustion (Approximation der Kugel durch Polyeder, Bau von Pappmodellen), Homogenität (Äquivalenz von Ecken bei archimedischen Polyedern), Passen (bei Parketten und Körpernetzen) mitwirken (S. 230). Aber auch hier bleibt unklar, ob diese Mitwirkung des POB und der zentralen Ideen bloß vom Standpunkt der didaktischen Hintergrundtheorie in den Unterricht hineingesehen wird oder tatsächlich für das Lernen Bedeutung erlangt (was übrigens erst noch zu präzisieren wäre).

4.3 Lehrgänge

Das Buch enthält keine Entwürfe für ganze Lehrgänge. Die Autoren verweisen aber auf die Vorschläge [3] von K. Krainer und [7] von D. Volk (S. 218).

Diese Lehrgänge zur Einführung in die Geometrie (vorwiegend im 5. Schuljahr) sind mit Lehnplanvorgaben verknüpft. [3] soll zwar inzwischen erprobt worden sein, jedoch fehlen Erfahrungsberichte. Dagegen teilt Volk positive Erfahrungen einiger Lehrer mit seinem Lehrgang in [7], 78 f. mit.

(1) Krainer wendet das POB ab: „Zu jedem geometrischen Begriff sollen möglichst viele verschiedene Intuitionen erzeugt werden, wobei diese Intuitionen überwiegend aus der Rekonstruktion von Zwecken in Verbindung mit konkretem Handeln (z. B. Herstellung von Objekten) gewonnen werden. Die geometrischen Begriffe sind gedachte Objekte, die in unserer Umwelt nur annäherungsweise realisiert werden können“ ([3], 19). Als wesentliche Bestandteile dieses Konzepts nennt er: Umweltschließung, Rekonstruktion von Zwecken, geometrische Begriffe als gedachte Gebilde, Gewinnung von Intuition, Dreidimensionalität, Zeichen als Grundtechnik und als Mittel zur Kommunikation, Reden über Mathematik, Ausgehen von der Erfahrungswelt der Schüler, Handeln im Unterricht, Hinterfragen von Sachverhalten und Situationen.

Die Behandlung des Begriffs „gerade“ zeigt das methodische Vorgehen Gerade Dinge in der Umwelt; Herstellungsversuche ganz gerader Dinge; gerade Linie und kürzeste Verbindung; Entstehung von Strecken durch Denken konkreter Verbindungslinien zwischen Punkten; (Halb-)Geraden als gedachte Verlängerungen von Strecken (mit Hilfe der Vorstellung des Visierens); Zweckmäßigkeit gerader Linien; gerade Kanten lassen sich aneinander vorbeischieben, und gerade Verbindungslinien sind kürzer.

In ähnlicher Weise werden ebene Flächen, die Orthogonalität und die Parallelität, Rechteck, Quadrat, Kreis, Quader und Würfel behandelt. Einheiten zum Zeichnen, Schätzen und Messen runden den Lehrgang ab.

(2) Volk orientiert seinen Lehrgang an der konstruktiven Geometrie der Erlanger Schule. Der Lehrgang besteht aus den beiden Teilen „Von der Mauer zu den Kanten und Flächen des Ziegelsteins. Vertikal und

Ebene, Gerade, Punkt und orthogonal, parallel“ und „Von den Kanten und Flächen des Ziegelsteins zur Mauer, Rechteck, Quader und horizontal“.

Im ersten Teil führt das Ansetzen einer Mauer beim Hausbau zur Handlungsorientierung, fördert zu manchem. Aus einer Zweck- und Funktionsanalyse ergeben sich die Begriffe der „ebenen Fläche“ und der „Orthogonalität“ sowie darauf aufbauend Gerade, Punkt, Strecke, parallel: Ebene Flächen sollen aufeinander passen, Ziegelsteine müssen wechselseitig an ihren Stirn- und Seitenflächen zueinander passen (hieraus ergibt sich die Orthogonalität von Ebenen). Vollkommen ebene Flächen gibt es nicht: „Bei wirklichen Körpern kann man sich darum bemühen, Begrenzungsflächen ebener Flächen hinreichend anzunähern. Wir können uns ebene Flächen vorstellen, wir wissen, welche Merkmale eine ebene Fläche erfüllen muß. Aufgrund dessen wissen wir, worum wir uns bemühen müssen, wenn wir eine Fläche ebener machen wollen“ (Lehrtext [7], 19). Analog bei Geraden. Gerade Linien werden als Schritte ebener Flächen eingeführt, Punkte als Schritte ebener Linien. Die Kompletterung ebener Flächen zu Ebenen, gerader Linien zu Geraden geschieht wie vielfach üblich durch allseitige Erweiterung des Zeichenblattes.

Im zweiten Teil werden das Rechteck und der Quader mit Hilfe der im ersten Teil eingeführten Begriffe definiert (allerdings mit Blick auf Ziegelsteine) und untersucht. Abschließend beschreibt man Backsteinwände mit den inzwischen kennengelernten geometrischen Begriffen.

4.4 Sonstiges Material

Das Kapitel „Anwendungen in der Praxis“ enthält sehr viel Material zum Auftreten geometrischer Sachverhalte in der Umwelt, geordnet nach Hauptaspekten des POB:

- Zwecke und Funktionen
- Geometrische Funktionen: Beweglichkeit im Lager, Übertragung von Bewegungen, Sachbereiche Sport und Fahrzeug (In-)Homogenität (diskrete Homogenitäten, Ellipse, Kegelsumpf, Abweichungen vom Zylinder und von der Ebene, sonstige Inhomogenitäten), Optimierung (Ränder, kürzeste Wege, rechter Winkel, feste Verbindungen, Toricelli-Punkt, Lagerungsprobleme)
- Geometrische Begriffe: Ebene, Gerade, Kugel, Kreis, Zylinder, Schraublinie, starrer Körper, Polygone (reguläre Polygone, Rechteck, Dreieck, Parallelogramm), Polyeder, weitere grundlegende Begriffe (Konvexität, Orientierung, Krümmung, Winkel, Orthogonalität, Parallelität), spezielle Formen (Pseudocylindrische, Reuleaux-Schnecke, Spirale, Klohnoid, Rotaltophyperboloid, Zykloide, Parabel, Kettlinie), praktisches Axiomenverständnis, topologische Begriffe
- Geometrische Realisierungen: Güte von Realisierungen, Modelle geometrischer und aufzergoetrischer Formen, Messen, Geometrie und Kunst.
- Viele Sachverhalte sind mehrfach genannt. Auskunkt darüber gibt das Stichwortverzeichnis.
- Die Einordnung eines Beispiels bzw. eines geometrischen Begriffs in gewisse Kubiken vorger Liste gibt nur erste, vorläufige Hinweise zur unterrichtlichen Behandlung. Alles weitere muß der Lehrer besorgen. Das ist nicht zu viel verlangt, sofern ausreichend viele Vorbilder zur Verfügung stehen. Dies trifft nach mei-

ner Einschätzung nicht zu: Die in 4.2 referierten Unterrichtsbeispiele enthalten zu wenig didaktischen Kommentar; die operative Geometriedidaktik bleibt zu allgemein; die Lehrgänge von Krainer und von Volk betreffen nur die Einführung einiger Grundbegriffe im 5. Schuljahr.

Deshalb wünsche ich mir an ausgewählten typischen Beispielen

- Erörterungen über mögliche didaktische Funktionen: nicht alles des gesamten Materials eignet sich für Hinführungen geometrischer Sachverhalte, aber dann vielleicht für andere didaktische Zwecke im Unterricht (vgl. [4])
- die begründete Auswahl bestimmter Formen bzw. Aspekte des POB: vielfach kann die Begriffsbildungsschritte (gemäß 2.2) nicht mit den Zwecken beginnen bzw. werden nicht alle Aspekte gleichermaßen wirksam (vgl. 2.3)
- das Abwägen verschiedener sachlicher Zugänge zu einem geometrischen Sachverhalt gegeneinander sowie des POB gegen andere didaktische Konzepte, den Vergleich von Zugängen über natürliche bzw. über künstliche Phänomene miteinander (vgl. 2.1); die Bevorzugung von „Operativität“ darf nicht den Blick für andere mögliche Erschließungen trüben (etwa beim Kreis, S. 91)
- den Aufbau von Begriffssystemen bis hin zur axiomatischen Fundierung und zum deduktiven Schließen (vgl. 3.): die Bemerkungen zum „praktischen Axiomenverständnis“ (S. 160) und die Mathematisierung des Tischwackchens in [1], 28-30 lassen keine Besonderheiten, erst recht keinen Vorteil des POB erkennen
- das Bewusstmachen zentraler oder gar universeller Ideen (vgl. S. 199 f. sowie 4.2)
- den Nachweis, daß und wie sie sich in derzeit gültige Curricula einfügen, möglichst auch Planungen zur lokalen und globalen Stofforganisation (vgl. S. 214-217 und 4.1)
- Darlegungen zur methodischen Gestaltung eines dem POB verpflichteten Geometrieunterrichts: welche Maßnahmen des Lehrers begünstigen wünschenswerte Schüleraktivitäten?

4.5 Abschließende Bewertung

Die erwähnten Unterrichtsbeispiele zeigen, daß ein Lehrer seinen Geometrieunterricht weitgehend für einzelne besondere Unterrichtsheiten am POB ausrichten kann. Auch glaube ich, daß bei Themen mit Vergleichsmöglichkeiten (wie bei der Einführung geometrischer Grundbegriffe im 5. Schuljahr) ein solcher Unterricht nicht weniger „erfolgreich“ ist als der „übliche“ Geometrieunterricht. Das besagt fast nichts: denn was als Erfolg zählt, ist unstritten (auch die Autoren des Buches lassen sich darüber nicht aus), und unter „üblich“ fällt in der Praxis vielerlei. Sogar die Abgrenzung eines „operativen“ gegen einen „üblichen“ Geometrieunterricht macht Mühe angesichts mancher Formulierungen und Passagen im Buch (etwa S. 196, 212 f., 230). Man muß wohl die Lehrer bitten, das POB im Unterricht auszuprobieren und so eigene Erfahrungen zu sammeln.

5 Ein theoretischer Rahmen

Der zweite Teil des Buches vertieft Aspekte des POB und der operativen Geometriedidaktik vor allem aus wissenschaftstheoretischer und aus historischer Sicht.

5.1 Zum Inhalt

Das Kapitel „Genese der Geometrie als didaktisches Problem“

- erinnert an die Aufgabe, die Beziehung der Geometrie zur räumlichen Wirklichkeit verstehen zu lernen, insbesondere die Entstehung und Rechterlegung geometrischer Begriffe (S. 250)
- bespricht verschiedene Bedeutungen des Begriffs „Genese“ (vgl. 2.4)
- hebt das POB ab vom operativen Prinzip entwicklungspsychologischer Ausrichtung (vgl. 2.4)
- geht auf den Status und die Rolle didaktischer Prinzipien ein und erörtert das genetische und das teleologische Prinzip (vgl. 2.4) sowie das Prinzip der pragmatischen Ordnung („jeder Schritt innerhalb einer konstruktiblen Genese muß an einer Stelle erfolgen, wo nichts vorausgesetzt, was erst leistet, und nichts vorausgesetzt wird, was durch ihn erst möglich wird“ [S. 270])
- kommentiert ältere Beiträge zur Genese der Geometrie.

Das Kapitel über „die operative Interpretation von Wissenschaft“ soll grundsätzlich klären, was die Autoren hierunter verstehen. Dabei geht es hauptsächlich um die Bedeutung von Begriffen: Diese wird durch nichts anderes bestimmt als durch die Regeln zu ihrem Gebrauch. Die Aneignung von Begriffen besteht in der Übernahme von Gebrauchstechniken (S. 284). Interne Gebrauchsregeln geben die Begriffsverwendung relativ zu anderen Begriffen an, externe Gebrauchsregeln setzen einen Begriff mit möglichen Anwendungsbereichen in Beziehung (S. 285). Erst das zweite verbindet Begriffe mit Handlungen wie Verweis auf Beispiele oder wie ihre Herstellung (S. 290).

Die Idee der Homogenität, hier also der Gedanke der Ununterscheidbarkeit von Stellen eines Objekts muß in einer Wirklichkeitsbezogenen Genese geometrischer Begriffe eine bedeutende Rolle spielen (S. 295). In diesem Kapitel geht es

- um formale Präzisierungen der Homogenität mittels H-Schemata
- um die Interpretation (Sinngebung?) geometrischer H-Schemata durch Ideation oder durch Exhaustion
- um eine Verwandtschaft von Homogenität und Symmetrie
- um die Frage, ob sich der Kongruenzbegriff und um die Idee des starren Körpers unabhängig voneinander gewinnen lassen, und um Gründe für eine simultane Einführung dieser beiden Begriffe, ohne Homogenitätsforderungen zu benötigen.

Den Wirklichkeitsbezug geometrischen Denkens sehen die Autoren im wesentlichen bei der simultanen Einführung von „Kongruenz“ und „starrer Körper“ sowie bei Homogenitätsforderungen an geometrische Grundformen (S. 319).

„Das Prinzip der Exhaustion verbindet Idee und Wirklichkeit“ (S. 343), wobei geometrische Ideen (Begriffe) durch Ideation entstehen (vgl. 2.1). Das Kapitel über „ideative Begriffsbildung“ befaßt sich aber nur mit einigen mehr wissenschaftstheoretischen und nicht mit methodischen Fragen zur Ideation.

Das Kapitel über die Exhaustion erklärt zunächst verschiedene Formen der Exhaustion. Die Autoren sind in der Ansicht, daß bei der Genese geometrischer Begriffe hauptsächlich die reale Exhaustion von Ideen vorkommt, also die

näherungsweise Durchsetzung von Ideen in der Realität aufgrund einer praktischen Herstellung von Formen (S. 344) und weniger die schriftliche Ausschöpfung der Wirklichkeit durch Ideen (S. 347).

– stellt mögliche oder tatsächliche Verfahren vor, mit denen iterativ immer bessere Realisate von ebenen Flächen, Kugeln, rechteckigen Keilen hergestellt werden können

– schildert theoretisch eine iterative Realisierung starrer Körper durch simultane schrittweise Korrektur des Längenbegriffs und entsprechender Verfeinerung der Längenmessung.

Das letzte Kapitel „zur Diskussion über die operative Grundlegung der Geometrie“ springt mitten hinein in die Diskussion zu einigen Problemen eines zwar axiomatischen, aber doch weitgehend operativ interpretierbaren Aufbaus der euklidischen Geometrie:

- Aufgabe und Möglichkeiten einer Protophysik
- Vergleichbarkeit von H-Schemata mit anderen Teilen eines Axiomensystems
- Auszeichnung von Ebenen durch H-Schemata
- Festlegung einer Ebene durch drei nichtkollineare Punkte
- Beweisbarkeit des Parallelenaxioms
- Endetüchtige Realisierbarkeit von Ebenen.

Das Kapitel ist wohl für Kenner der Diskussion geschrieben, da vielfach Erläuterungen zum Kontext oder gar zur Sache (etwa bei der Protophysik) fehlen.

5.2 *Beeinflussung des Unterrichts?*

Die Autoren behaupten, daß zu ihrer Auffassung von Geometrieunterricht „naturgemäß“ ein weitgefächerter Begriff von Didaktik gehöre, welche „als Wissen über den Erwerb von Wissen immer auch ein bestimmtes metatheoretisches und historisches Verständnis der Wissensinhalte“ umfasse. Erst dieses ermöglichte „eine bewußter“ scheidende und flexiblere Einstellung des Lehrers zum Stoff“; die Praxisbeispiele benötigen den theoretischen Kontext, sollen sie verständlich in den Geometrieunterricht eingebracht werden (S. 14, 243).

Das erste ist keine Besonderheit der operativen Geometriedidaktik. Beim zweiten bezweifle ich, ob es gerade der im zweiten Teil des Buches behandelte theoretische Kontext sein muß.

- Der erste Teil des Buches hängt sogar nach Ansicht der Autoren in „hinreichendem Maße“ nicht vom zweiten Teil ab (S. 12).
- Vieles aus dem zweiten Teil läßt sich nur bei Kenntnis der zitierten Literatur bzw. bei Vertrautheit mit den angesprochenen Problemen verstehen und würdigen.

- Andere didaktische Entwürfe (etwa derjenige des handlungsorientierten Unterrichts) werden überhaupt nicht betrachtet und diskutiert.

Jener Zweifel betrifft die Kapitel des zweiten Teils in unterschiedlichem Maße. Die Ausführungen zur „Genese der Geometrie als didaktisches Problem“ können wohl tatsächlich das Verständnis des FOB in unterrichtswirksamer Weise vertiefen, und das Kapitel über „die operative Interpretation von Wissenschaft“ stellt den Ansatz in einen größeren Zusammenhang.

Dagegen sehe ich nicht, welchen Einfluß die Kapitel zur Homogenität, Ideation und Exhaustion auf den Geometrieunterricht ausüben sollen. Welche Rolle spielt etwa die Diskussion zur Einführung des Kongruenzbegriffs und der Idee des starren Körpers? Inwiefern ist ideative Begriffsbildung im Geometrieunterricht erwünscht und wie kann sie in Gang gesetzt und gesteuert werden? (Vorschläge hierzu in [3], [7]).

Ob in der Diskussion über die operative Grundlegung der Geometrie didaktisch Auswertbares liegt, wissen selbst die Autoren nicht. Immerhin: dort erwähnte Schwierigkeiten und Einwände gegen die theoretischen Ansätze sind für didaktische Probleme der Geometrie genese von geringer Bedeutung (S. 313; [5], [3]). Andererseits wünscht man sich zur Planung des Aufbaus von Begriffssystemen geometrische Hintergrundtheorien, passend zur operativen Geometrie genese im Unterricht.

6. Literatur

- [1] BENDER P.: Umweltschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. – In: MU 24 (1978) H. 5, 25–87
- [2] BENDER P., SCHREIBER A.: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. – In: Ed. Studies in Math. 11 (1980), 59–90
- [3] KEANER K.: Umweltschließung im Geometrieunterricht. – Diplomarbeit zur Erlangung des Lehramts an Höheren Schulen an der UBW Klagenfurt, 1982
- [4] PROBE L.: Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht – vorwiegend erörtert am Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. – In: JMD 6 (1985), 15–43
- [5] SCHREIBER A.: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. – In: MU 24 (1978) H. 5, 7–24
- [6] SCHREIBER A.: Parallelfiguren – ein Problemfeld für unterschiedlichen Geometrieunterricht. – In: math. did. 5 (1982), 139–153
- [7] VOJK D.: Geometrie aus dem Handwerk. Genaue Hinsichten beim Mauern und Häuserbauen. – Göttingen: Gegenwind-Verlag, 1984

SCHUBERT, Anton: Zum Problem der Wahrnehmung, Genese und Veränderung von Schüler Einstellungen im Mathematikunterricht der Grundschule

Frankfurt a. M./Bern/New York: Peter Lang, 1986. – 404 S.
(Europäische Hochschulschriften, Reihe XI Pädagogik; Bd. 296)
ISBN 3 – 8204-0015 – x

Hermann Maier, Regensburg

Das erste Kapitel führt in Thematik und Fragestellung der Arbeit ein. Anhand markanter Beobachtungen und zahlreicher Aussagen von Schülern, Erwachsenen und in der belietrischen Literatur wird deutlich gemacht, daß jedes Kind, wie der Erwachsene, nicht nur in der Schule, sondern auch vor und neben ihr der Mathematik begegnet und zu ihr eine subjektive Beziehung aufbaut, daß diese Beziehung eine stark individuelle Prägung hat, jedoch, neben anderen Faktoren, vom Mathematikunterricht stark beeinflusst wird und daß sich diese Beziehung verändern kann und vielfach auch tatsächlich verändert. Dieser ausführliche und sehr aspektreiche Problemaufriss kann den Leser für die Aufgabenstellung, die Beziehung zwischen Kind und Mathematik unter dem Begriffskonzept „Einstellung“ eingehend zu untersuchen und dabei vor allem nach der Wahrnehmung solcher Einstellungen und ihren möglichen Veränderungen zu fragen, motivieren.

Im zweiten Kapitel wird zunächst eingehend der gegenwärtige Stand der Einstellungsforchung referiert. Unter Beziehung umfangreicher, vor allem auch englischsprachiger Literatur gelangt es, die Ursprünge eines entsprechenden Einstellungs begriffs, die Forschungsrichtungen und Forschungsschwerpunkte, die angewendeten Methoden und die einzelnen Ergebnisse in einem wohlstrukturierten Bericht umfassend und übersichtlich darzustellen. Vor allem der analytisch-operationale Ansatz und die mit seiner Hilfe gewonnenen Erkenntnisse werden nach den Problemfeldern Einstellungs messung, Einstellungs bildung und -veränderung sowie Einstellungs-Verhaltens-Relation lebendig und in klarer Gliederung entwickelt. Dann entfaltet der Verfasser in Form einer ausführlichen Erklärung einen eigenen Einstellungs begriff. Dabei setzt er beim alltagspraktischen Verständnis des Terminus „Einstellung“ bzw. „sich Einstellen“ an und präzisiert die zugehörigen Begriffe schrittweise unter Einsatz von Phänomenanalysen und beträchtlichen, aus geeigneter Literatur gewonnenen Theoremitteln. Auf diese Weise entsteht ein allgemeines Einstellungs konzept, das in ganzheitlicher Sicht die wechselseitige Verschränkung von menschlichem Denken, Handeln und Fühlen erfäßt, dabei das Wechselspiel von Prozesshaftem und Statistischem aufzeigt, nach verschiedenen Merkmalsdimensionen ausdifferenziert und auch den Aspekt der Veränderung in Gestalt von Lernen und Entwicklung einbezieht. Schließlich wird die Möglichkeit des Wahrnehmens von Einstellungen bzw. des Versehens und Erklärens menschlicher Handlungen

problematiziert und so die Verwendung des entwickelten Begriffskonzepts in einen angemessenen Rahmen eingegrenzt.

Im dritten Kapitel wird der entwickelte Einstellungs begriff angewendet, um anhand von Fallbeispielen die Genese, Veränderung und Wahrnehmung von Schüler Einstellungen im Mathematikunterricht zu untersuchen. Als methodisches Instrument dient eine Fernanalyse transkribierter Videoaufzeichnungen von einer Woche Mathematikunterricht in einer ersten Jahrgangsstufe. Nach einem bewährten, am Institut für Didaktik der Mathematik in Bielefeld entwickelten Verfahren wird das unterrichtliche Kommunikations geschehen zuerst in einer Schritt-für-Schritt-Rekonstruktion eingehend beschrieben. In einem zweiten Durchgang erfolgt dann eine perspektivische Analyse auf der Basis der durch den Einstellungs begriff vorgegebenen Kriterien. Anhand von Transkriptbeispielen zeigt der Verfasser, wie sich Schüler durch Anstreben von Zwischenzielen und den Versuch der Realisierung entsprechender Mittelhandlungen in geeigneter Anpassung an die Intentionen der Lehrerin im Unterrichtsgeschehen „einstellen“ und wie sich dabei typische Verlaufsuster ergeben, die mit einer Einschätzung der Schüler z. B. als „Ideal Schüler“, „Selbständigen“ oder „Sorgenkind“ zusammenhängen. Ebenfalls anhand interpretierter Transkriptbeispiele untersucht er die Faktoren, welche die Realisierung von Handlungszielen einzelner Schüler im Unterricht beeinflussen können, vor allem deutlich hervortretende Bedürfnisse nach Liebe und Zuneigung, Sicherheit, nach Achtung und Selbstachtung sowie nach Wissen und Verstehen, aber auch Pflichten, welche von außen an sie herangetragen werden und durch die sie ihr Handeln leiten lassen. Aus den Prozessen des sich Einstellens resultieren Einstellungen, die dann Interessenswelder neue Einstellungsprozesse auslösen, beeinflussen bzw. verändern können. Die Arbeit zeigt Beispiele von Einstellungen auf, die aufgrund des Analysematerials vermutet werden können, aber auch Beispiele, die in der mathematikdidaktischen Literatur beschrieben sind, und zwar in fehleranalytisch orientierten, in der Einstellungs sammeln und in der psychoanalytisch ausgerichteten Literatur. Insgesamt belegen die Analysebeispiele, daß es für den Lehrer wie auch für einen außenstehenden Beobachter möglich ist, Prozesse des sich Einstellens und als Einstellungen beschreibbare Phänomene sowie deren Veränderung wahrzunehmen, und daß sich das im zweiten Kapitel entwickelte Begriffskonzept vorzüglich dazu eignet, von diesen Prozessen und ihren Produkten ein reichhaltiges und didaktisch hoch relevantes Bild zu gewinnen.

Im Anschluß an die Feststellung, daß die Mathematikdidaktik bislang dem hier thematisierten Problem wenig Aufmerksamkeit gewidmet hat, befaßt sich das vierte Kapitel mit der Relevanz von Einstellungsprozessen und Einstellungsprodukten für das Lernen, im einzelnen mit ihrer Bedeutung für Lernbereitschaft, Lernfähigkeit und Lernergebnis. Dabei ergeben sich aufschlußreiche Beziehungen zu Kategorien und Grundsätzen der Unterrichtsplanung und -gestaltung, die, zumeist abgeleitet aus theoretischen Überlegungen, in der allgemeindidaktischen und fachdidaktischen Literatur schon mehrfach formuliert wurden. Sie finden hier gleichsam ihre empirische Bestätigung und