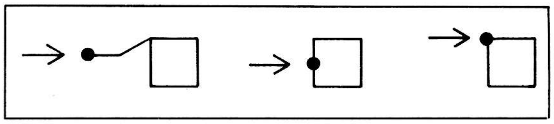
des Lösungskästchens oder sind mit diesem durch einen Strich verbunden, z. B.:



3. Es hat sich als sinnvoll erwiesen, daß die Kinder beim Verbinden der Punkte mit einem breitschreibenden, ggf. farbigen Filzstift arbeiten.

4. Der Lehrer kann ein Punktebild auf Folie übertragen. Nachdem die Schüler die dazu passende Arbeitsvorlage ausgefüllt haben, nennen sie ihre Lösungen und erklären ihren Lösungsweg. Die Ergebnisse werden in die Folie eingetragen, was alle an dem mit dem Overheadprojektor an die Wand projizierten Bild nachvollziehen können. Dies bietet dem Lehrer die Gelegenheit, unterschiedliche Rechenwege zu thematisieren und transparent zu machend (vgl. 3. Aufgaben/Ziele).

Anmerkungen zu Vorlage 4

Die Vorlage 4 kann wie folgt in den Mathematikunterricht eingebracht werden:
a) Entsprechend den aktuellen Erfordernissen in seiner Klasse trägt der Lehrer Aufgaben in die Vorlage 4 ein. Orientiert er sich dabei an Abb. 4, muß er die Aufgaben so wählen, daß als Ergebnisse dieser Aufgaben nur die passenden Zahlen von 1—30 herauskommen dürfen. Natürlich kann er auch einen anderen ,,Dreißigerabschnitt" aus den natürlichen Zahlen verwenden, z. B. die Zahlen von 31 bis 60 oder von 27 bis 56.
b) Die Schüler schlüpfen in die Rolle des Lehrers, wie sie oben unter Punkt a) beschrieben worden ist, und erstellen selbst geeignete Aufgaben. Die fertigen Arbeitsblätter können sie untereinander tauschen.

Einige Informationen zum Eiffelturm (s. Abb. 4):
Der Eiffelturm steht auf dem sogenannten Marsfeld in Paris. Er wurde von dem französischen Ingenieur Alexandre Gustave Eiffel im Jahre 1889 für die Pariser Weltausstellung errichtet und gilt seitdem als Wahrzeichen von Paris. Er ist 300 m hoch, 7500 t Eisen wurden verbraucht; Gesamtgewicht 9000 t, Gesamtkosten 6,5 Mill. Goldfrancs; 3 Plattformen in 58 m, 115 m und 276 m Höhe mit Restaurants, Läden und Erfrischungsräumen. Ein Fahrstuhl führt bis in die Dachkuppel, wo eine Großfunkstation, eine Wetterkarte und eine Scheinwerferanlage untergebracht sind. Bis 1953 hatte der Eiffelturm 25. Mill. Besucher.
(PS: Die obigen Zahlenangaben beinhalten die Möglichkeiten zu weiteren mathematischen Aktivitäten!)

Mathematik

Der Primat der Sache im Sachrechnen

Zur Revision der Reform

Von *Peter Bender* in Kassel

Nach der Einführung neuer, u. a. strukturmathematischer, Inhalte, Denkweisen und Methoden in den Mathematikunterricht der Primarstufe um 1970 (in manchmal recht naiver Anlehnung an *Piaget, Bruner* und *Bourbaki*) und den anschließenden lebhaften, von den Reformgegnern nicht immer sachlich geführten Auseinandersetzungen darüber (,,Mengenlehre macht krank") hatte sich um 1980 in den deutschen Grundschulstuben eine gewisse Koexistenz zwischen ,,Klassischer" und ,,Neuer Mathmatik" eingestellt mit von Schule zu Schule bzw. Lehrer zu Lehrer verschiedenen Anteilen und unterschiedlichen Graden gegenseitiger Befruchtung, abhängig von Bundesland, eingeführtem Schulbuch, Examenszeitpunkt des Lehrers, ,,Niveau" der Schüler usw. Es stand nun noch eine Revision der Lehrpläne an, als uns aus Amerika eine neue Welle unter der Parole ,,back to basics" erreichte, mit der eine stärkere Betonung der Arithmetik im Mathematikunterricht auf Kosten der anderen Inhalte gefordert wird.

Für diese Bestrebungen gibt es gute Gründe (vgl. *Sprockhoff* 1982); sie stellen aber auch eine Gefahr für viele positive Errungenschaften der Reform dar; erinnert sei z. B. an das faktische Verbot der Mengensprache in den Grundschulen Baden-Württembergs (1982). Als ein grundlegendes Argument wird i. a. ,,Lebensnähe" ins Feld geführt.

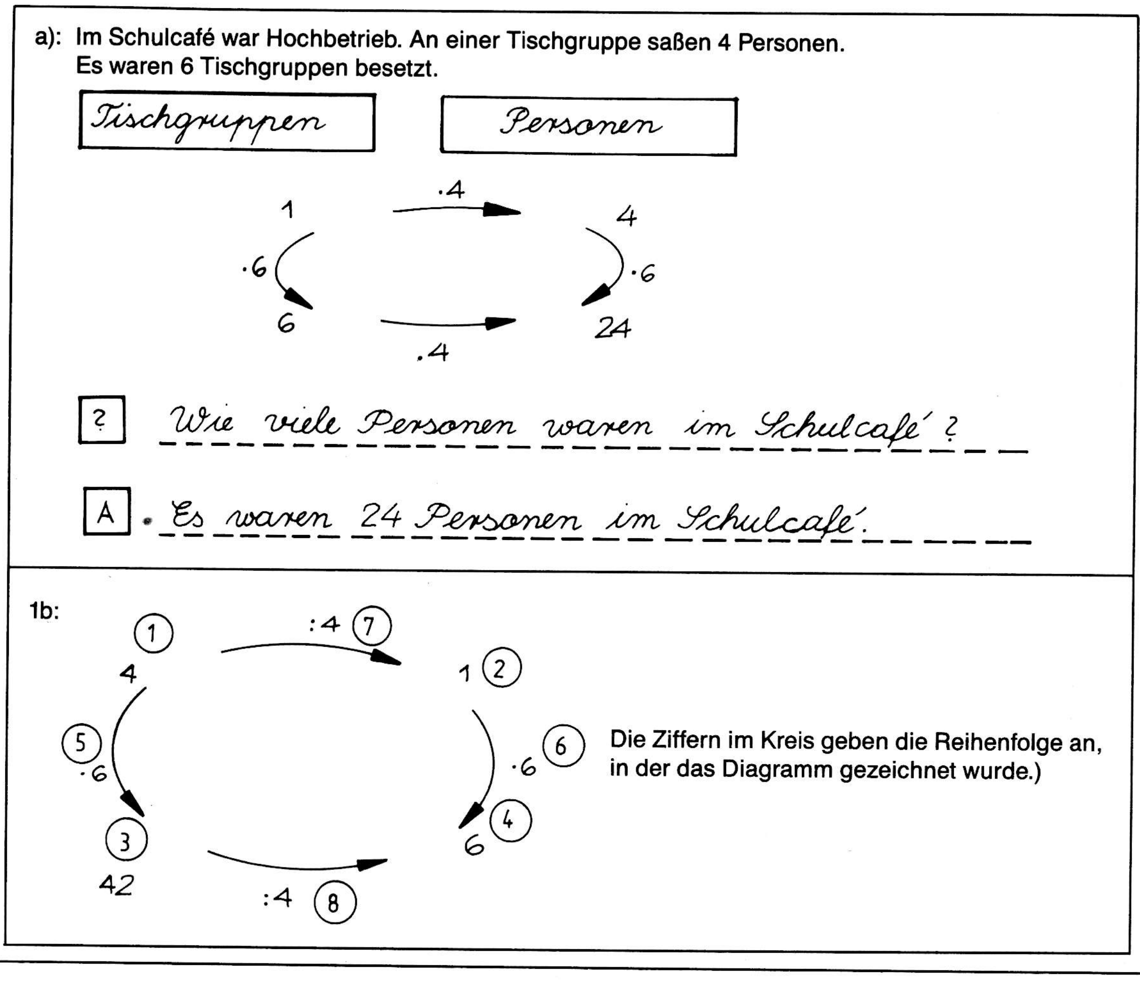
Bei Lichte besehen ist jedoch der Arithmetikunterricht mit Zahlen (und Größen) zunächst nicht lebensnäher als der Unterricht in Geometrie, Topologie, Kombinatorik, Statistik, algebraischen Strukturen usw.; er ist uns zwar traditionell vertrauter; aber im Prinzip handelt es sich auch bei ihm um ein Studium mathematischer Gebilde, nämlich gewisser Zahlen- und Größenbereiche. Überspitzt könnte man formulieren, daß mit der Gegenreform lediglich wieder die eine Sorte von mathematischen Strukturen die anderen als Unterrichtsobjekt verdrängt, und daß die Schüler weniger explizit über die Strukturen als solche reflektieren und stattdessen mehr Fertigkeiten im Umgang mit ihnen erwerben sollen. Für direkte Lebensnähe soll dann das sog. Sachrechnen sorgen, das schon in der alten Volksschule (ganz dem Zweck dieser Schulform entsprechend) erklärtermaßen die inhaltliche und organisatorische Grundlage des Rechen- und Raumlehreunterrichts gewesen ist.

1. Kritik am klassischen Sachrechnen

Allerdings waren die Erfolge dieses klassischen Sachrechnens im ganzen recht mager, wie dies schon seit Generationen beklagt wird. *Winter* (1976, S. 338 f.) macht dafür folgende Ursachen verantwortlich: *Beschränkung* auf *Rechenfälle,* die mit den vier Grundrechenarten zu lösen sind; *Überbetonung* von Fragen des richtigen *Anschriebs* und der richtigen *Sprechweise; Vernachlässigung* von Hilfs-

mitteln außerhalb des Textes wie *Skizzen, Tabellen* usw.; *Ablehnung mathematischer* Methoden und Begriffsbildungen; *Organisation* nach *innerarithmetischen* Gesichtspunkten.
Bei der Bekämpfung dieser Mängel hatte die Reform einigen Erfolg, allerdings ging dieser einher mit einem Rückgang des Sachrechnens überhaupt. Wo Sachrechnen getrieben wurde bzw. wird, haben sich die Unzulänglichkeiten häufig erhalten (und bei einer allzu rigiden Restaurierung der Arithmetik-Vorherrschaft im Unterricht werden sie eher wieder zunehmen).
Diese These ist das Ergebnis von Unterrichts- und Schülerbeobachtungen, Erfahrungsberichten und vor allem der Auswertung dreier Sachrechentests mit jeweils etwa 1000 Schülern am Ende der Grundschulzeit in den Jahren 1978 (ausführliche Analyse in *Bender* 1980), 1980 (ähnlich dem ersten Test mit leicht abgeänderten Fragen) und 1983 (über den noch in einer eigenen Arbeit berichtet werden soll).
Um gleich einem in Diskussionen immer wieder angetroffenen Mißverständnis vorzubeugen: Diese Tests dienen nicht der Kritik an Schülern oder Lehrern, sondern der Analyse unseres Sachrechenunterrichts.
Einige Beispiele zu dessen o. a. konzeptionellen Mängeln:
Beschränkung auf die vier *Grundrechenarten:* „Eine Klasse hat 29 Kinder. Es sind 3 Mädchen mehr, als es Jungen sind. Wie viele Jungen, wie viele Mädchen sind in der Klasse?" Dies ist offenbar eine Verteilungsaufgabe, und über ein Viertel aller Schüler versuchen sofort, 29:2 oder gar 29:3 zu rechnen. Daß die Teilmengen nicht gleichmächtig sind und daher die Division zunächst nicht am Platz ist, ist ungewöhnlich und wird von diesen Schülern nicht beachtet.
Überbetonung von *Anschrieb* und *Sprechweise*: In einem 2. Schuljahr wurde folgendes Problem behandelt: „Im Schulcafé war Hochbetrieb. An einer Tischgruppe saßen 4 Personen. Es waren 6 Tischgruppen besetzt." Zunächst wurden im Unterrichtsgespräch die Zahlwörter herausgesucht und die dahinter stehenden Wörter unterstrichen. Dann erhielten die Schüler Arbeitsblätter, die sie in Alleinarbeit ausfüllen sollten (Abb. 1a). Die Hauptsache dabei war das Operatorschema, dessen Entwicklung noch durch Parolen wie „von weniger nach mehr ist ‚mal'" und „die Pfeile gehen immer in dieselbe Richtung" unterstützt wurde; und bezeichnenderweise folgte die Fragezeile erst nach dem für das Schema gelassenen Platz. Mit der Ermittlung der Ergebniszahl hatte kein Schüler Schwierigkeiten; mit der (meist nachträglichen) Notierung des Schemas die Mehrzahl auch nicht; eine starke Minderheit allerdings doch; diese produzierten Lösungen wie z. B. in Abb. 1b. Nicht die Sachsituation, sondern die mathematische Notation stellte das eigentliche Problem dar.
Vernachlässigung von *Skizzen* u. ä.: „Ein rechteckiger Tisch ist 1 m lang und 0,70 m breit. Darauf liegt eine rechteckige Tischdecke. Die Tischdecke hängt an allen Seiten des Tisches 20 cm über. Wie lang ist der ganze Rand der Tischdecke?" Diese auch für Erwachsene nicht ganz einfache Aufgabe wurde nur von 5 % der Testteilnehmer richtig gelöst (5 m). Von diesen hatten immerhin 52 % eine Skizze (ähnlich der in Abb. 2a) angefertigt. Von den Falschlösern hatten noch keine 10 % eine Skizze verwendet.

Abb. 1



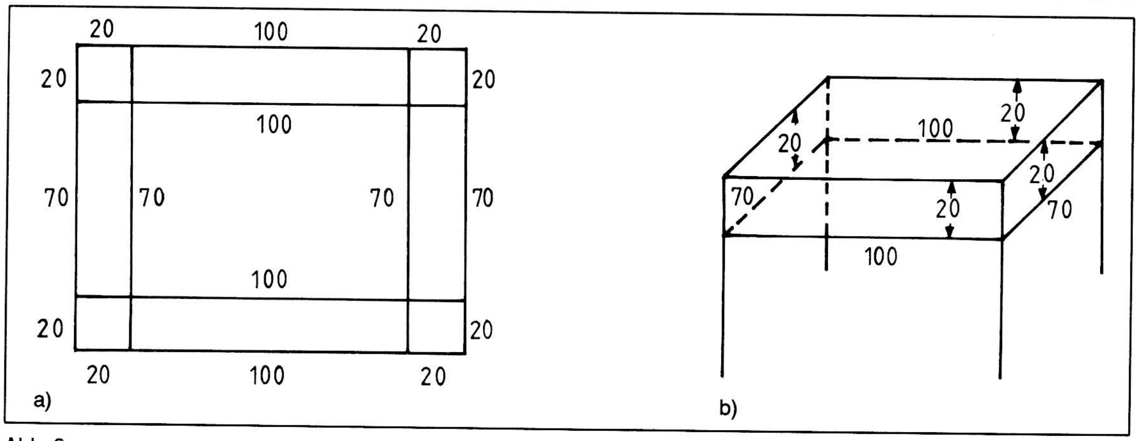


Abb. 2

Eine etwaige *Ablehnung mathematischer* Methoden durch Didaktiker oder Lehrer wirkt sich in der Grundschule noch nicht so deutlich aus.
Dagegen ist das Grundübel wohl die *Organisation* des Sachrechnens nach *innerarithmetischen* Gesichtspunkten: Wie viele Unterrichtsstunden bzw. -einheiten laufen nach dem Schema ,,‚motivierendes' Sachproblem, arithmetischer Hauptteil, sachbezogener Schluß", aber ohne einen echten Zusammenhang zwischen den drei Teilen ab, weil es eh nur auf den mittleren ankommt! Wie oft ist die einzige Funktion von Sachaufgaben das Üben arithmetischer Inhalte! Wie künstlich, uninteressant und lebensfern erscheinen viele Texte!

2. Wesen und Aufgabe der Sachmathematik

Gewiß hat die Beschäftigung mit Sachsituationen *auch* im Dienst mathematischer Begriffsbildung zu stehen; schon um der Variation der Anschauung willen; darüber hinaus schließt das Haben eines Begriffs sehr wohl auch die Fähigkeit zum Umgang mit ihm in Anwendungen ein. Der im Lernprozeß immer wieder (wohl notwendig) entstehende Graben zwischen mathematischer Begrifflichkeit und (Sach-)Problemen muß aber von beiden Seiten aus zugeschüttet oder wenigstens überbrückt werden. Was da auf der einen Seite zur Entwicklung oder Erprobung mathematischer Begriffe (etwa der Multiplikation) herangezogen wird, ist noch nicht Sachrechnen, sondern erst auf der anderen Seite
der Einsatz mathematischer Begriffe zur Bewältigung von Sachsituationen.
(Zu diesem und auch den folgenden Fragenkomplexen lese man die treffende Analyse von *Keitel* (1981) nach.) Die behandelten Probleme müssen selbstredend den Kenntnissen und intellektuellen Möglichkeiten der Schüler angemessen sein. Schon von daher kann der Mathematikunterricht nur ein sehr dürftiges Abbild von ,,der" Realität bieten. Eine völlig unnötige weitere Vezerrung stellt aber die häufig vorgenommene Beschränkung auf ,,rechnerisch" lösbare Probleme dar. Immerhin hält die Grundschulmathematik inzwischen auch geometrische, statistische, kombinatorische, sogar algebraische Methoden bereit. Dabei ist nun nicht wieder nur an die Berechnung von Volumina, Mittelwerten oder kartesischen Produkten zu denken, sondern an Fragen wie:
Warum sind Menschen, Tiere und zahlreiche Gegenstände symmetrisch gebaut? Sind die größeren Kinder auch die schwereren (Vierfeldertabelle)? Auf wie viele Arten kann man aus fünf Sorten Speiseeis eine Portion mit zwei Bällchen zusammenstellen? Usw.

Auf solche Unterrichtsinhalte paßt das Etikett ,,Sach*rechnen*" eigentlich nicht mehr. Auch die Bezeichnung ,,Anwendungen" ist nicht optimal, weil sie doch wieder von der zentralen Stellung der Mathematik ausgeht. Warum verwenden wir nicht konsequenterweise den Ausdruck Sach*mathematik*?

Dieser Teil des Mathematikunterrichts spielt eine fundamentale Rolle bei dessen Rechtfertigung. Er soll nämlich
— demonstrieren, daß die Mathematik gebraucht wird, also grundlegende Motivation für den Sachunterricht und für die Schule liefern, aber auch zugleich die Grenzen der Mathematik aufweisen,
— zeigen, wie die Mathematik anzuwenden ist, also inhaltliche Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse bereitstellen,
— wiederum die Mathematik voranbringen durch Problemstellungen,
— und, über ein eng gefaßtes Verständnis von Mathematikunterricht hinausgehend, Sachsituationen aller Art klären helfen und damit direkt zur Umwelterschließung der Schüler beitragen.

Gewiß hat der Mathematikunterricht noch andere Aufgaben, etwa die Mathematik als Kulturgut darzustellen oder kognitive und affektive Fähigkeiten und Fertigkeiten zu entwickeln wie Argumentationsfähigkeit, kreatives Verhalten, Ausdauer, Selbstdisziplin usw. Aber man weiß eigentlich nicht — falls man überhaupt im Unterricht Erfolg hat —, ob da wirklich ein Transfer in die gegenwärtige oder zukünftige Lebenswelt der Schüler stattfindet, und nimmt dies eher als didaktisches Axiom an. Man weiß auch nicht, ob gewisse dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht vielleicht in ganz anderen Fächern besser ausgebildet werden.

3. Das problematische Verhältnis zwischen Sachmathematik, Lebenswelt, Schülerinteressen

Bei den Ansprüchen, die man an die Sachmathematik stellt (oben als Beiträge zur Rechtfertigung formuliert), hat man die Schwierigkeit mit dem Transfer scheinbar nicht, da man sich ja bereits in der Lebenswelt befindet. — Ganz so selbstverständlich ist das innige Verhältnis zwischen Sachmathematik und Lebenswelt aber nicht; — im Gegenteil, dieses ist vielmehr eines der Grundprobleme der Sachmathematik:
Was ist überhaupt ,,Lebenswelt", ,,die" Lebenswelt

„der" Schüler? Soll bzw. darf man sich da eng an die jeweiligen Erfahrungshorizonte halten? In welchen Kulturkreisen, gesellschaftlichen Bereichen, sozialen Schichten hat man die Probleme anzusiedeln? Wie heil soll die Welt sein, über die gesprochen wird? Soll man „Normalfälle" vorführen (Drei- bis Vierpersonenfamilien mit üblicher Rollenverteilung), oder gerade nicht? Steht die Institution „Schule" und die prinzipielle Künstlichkeit aller in ihr zu behandelnden Probleme nicht jeglichem echten Bezug zur Lebenswelt entgegen?

Diese wichtigen Fragen können in ihrer Allgemeinheit nicht beantwortet werden, schon gar nicht von der Mathematikdidaktik allein. Hier sind grundsätzliche Erziehungsziele angesprochen, die ihrerseits u. a. von politischen Intentionen abhängen. Die Mathematikdidaktik gehört aber keineswegs in einen gesellschaftsfreien Raum; sie hat mit ihren Analyseinstrumenten ihren spezifischen Beitrag zur Lösung dieser Probleme zu leisten.

Eine kritische Richtung in der Mathematikdidaktik sucht(e), durchaus eingebettet in ein allgemeines pädagogisches Konzept, diese Lösung in dem Prinzip, „an den eigentlichen Interessen der Schüler anzuknüpfen". Konkretisiert wurden diese Vorstellungen in Unterrichtsbeispielen wie dem Bau eines Go-Karts im Zusammenhang mit der Multiplikation in der 5. Klasse der Glockseeschule in Hannover (Hermann 1975/76) oder der Austragung eines Tischfußballturniers zwecks Aufstellung von Spielplänen und Auswertung der Ergebnisse in der 7. Klasse einer Gesamtschule in Wiesbaden (Münzinger 1977).

Es drängen sich hier ähnliche grundsätzliche Fragen auf wie oben: Was sind „die" eigentlichen Interessen „der" Schüler? Wie werden diese bestimmt, und vor allem: wer bestimmt sie? Wie ist zu verfahren, wenn die Interessen der Schüler untereinander, mit denen des Lehrers, mit den institutionellen Zwängen der Schule oder mit gesellschaftlichen Bedingungen kollidieren? Wie geht die Interessenbildung bei den Schülern überhaupt vor sich, wo kommen Einflüsse her, welchen Anteil hat bzw. sollte dabei die Schule haben?

Der Anspruch, bei den Schülern *persönliche Betroffenheit* zu erzielen, ist zu hoch. Wird er wirklich einmal eingelöst, so handelt es sich um einen seltenen Glücksfall, bei dem der sachmathematische Aspekt bestimmt eine völlig unbedeutende Rolle spielt. Soll dieser nun in den Vordergrund treten, so wirkt sich das Abzielen auf persönliche Betroffenheit eher demotivierend aus: Ist diese erreicht, dann muß sie jetzt objektiviert, entpersönlicht werden; ist sie nicht erreicht, dann stellen die Bemühungen darum lediglich eine Maskierung der eigentlichen Lehrerabsichten dar, nämlich Sachmathematik zu treiben. (In einer schul-losen Situation mag das anders sein; eine solche steht aber nicht zur Debatte).

4. Intellektuelles Interesse, Ehrlichkeit, Primat der Sache, Authentizität

Nicht persönliche Betroffenheit, sondern *intellektuelles Interesse* ist die Voraussetzung für die Beschäftigung mit sachmathematischen (und überhaupt vielen unterrichtlichen) Problemen. Intellektuelles Interesse ist etwas anderes als „die" naiv verstandenen „eigentlichen Interessen der Schüler". Es enthält Rationalität und eine gewisse Distanz zur Sache. Es ist eine Grundhaltung, die keineswegs den Menschen ganz prägen, aber gegenüber gewissen übertriebenen modernen Subjektivierungstendenzen in Schule und Wissenschaft und gegenüber der zeitlosen Unart der Kindertümelei gepflegt werden sollte.

Es ist keineswegs erwiesen, daß dieses Interesse sich eher auf Sach- als auf rein mathematische Probleme oder sich eher auf realistische als auf künstliche „Sach"probleme richtet. Hier sind extreme individuelle Unterschiede bekannt, und Utilitarität scheint jedenfalls nicht das entscheidende Kriterium zu sein. Aber, neben vielen weiteren Parametern des Unterrichtsgeschehens kommt es auf *Ehrlichkeit* an. Das heißt nicht, daß keine Geschichten mehr erfunden werden dürften, nur noch Sachaufgaben mit „Nutzeffekt" behandelt werden müßten oder den Schülern die didaktischen Absichten explizit auseinanderzusetzen seien; es heißt aber, daß die Schüler nicht über die Absichten getäuscht werden sollen, insbesondere z. B. nicht darüber, ob es gerade auf die Sache, die Sachmathematik oder die Mathematik ankommt.

Zu dieser Ehrlichkeit trägt auch die *Authentizität* der Sachsituationen bei: Wie stellt sich das Problem tatsächlich, ohne Schönung des Datenmaterials (es gibt ja den Taschenrechner), ohne Reduktion auf „gehabte" Methoden, ohne Trimmen auf Lösbarkeit oder gar eindeutige Lösbarkeit.

Das Finden und Bearbeiten authentischer Sachprobleme erfordert vom Mathematiklehrer eine Kompetenz, die über das übliche Verständnis und Selbstverständnis vom Fachlehrer deutlich hinausgeht. Dies setzt eine breite Bildung und eine breite Ausbildung voraus und spricht gegen die Reformierte Oberstufe in der Schule und gegen das Fachlehrerprinzip in Studium und Beruf. Auch die (ohnehin sehr aufwendige und umständliche) Zusammenarbeit mit Lehrern anderer Fächer macht diese Kompetenz nicht entbehrlich. Allerdings geht es hier — wie gesagt — nicht um fächerübergreifenden Unterricht, auch nicht einen in der Hand ein und desselben Lehrers, sondern um Sachmathematik (wo diese Kompetenz auch nötig ist).

Eine umfangreiche, unterrichtlich aufbereitete Sammlung authentischer Sachprobleme für den Mathematikunterricht enthält u. a. die Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei (MUED). Die Aufgaben sind allerdings durchweg für die Sekundarstufen gedacht, vor allem weil die Mitarbeiter Sekundarstufenlehrer sind, aber auch weil Grundschüler für viele Probleme noch nicht kompetent genug sind.

Dennoch sind auch in der Primarstufe die oben genannten Prinzipien zu realisieren (Weckung intellektuellen Interesses; Ehrlichkeit; Primat der Sache; Authentizität, so weit möglich). Beispiele: Organisation eines Schulfestes, Planung einer Urlaubsreise, Einrichtung eines Aquariums u. v. a. m., zu finden in zahlreichen Aufsätzen. Für die Entwicklung sachmathematischer Kompetenz bei den Schülern sind aber in der Primarstufe (und auch später noch) auch kleinere Sachaufgaben mit leicht überschaubarer Sachstruktur, direkter Anwendbarkeit der Mathematik und einfacher Realisierbarkeit im Unterricht erforderlich. Tatsächlich sind sie der durchweg vorkommende Typ, und um sie soll es jetzt gehen.

5. Inhaltliche Klärung der Sachstruktur

Wie kann man in solche Aufgaben einen Ansatz von Problemhaltigkeit bringen?
,,In einer Dose sind 12 Würstchen. Wie viele sind in 3 Dosen?" — Dies ist eine eingekleidete Rechenaufgabe, in der die Sache keinerlei Rolle spielt. Was kann man an ihr verbessern?
,,Andreas lädt zu seinem Geburtstag 20 Kinder ein. Es gibt Kartoffelsalat mit Würstchen. Im Schrank stehen noch 3 Dosen mit je 12 Würstchen. Jedes Kind soll 2 Würstchen bekommen. Reichen diese dann?" — Die Lösung ist nun nicht einfach ,,$(20+1) \cdot 2 > 3 \cdot 12$", also ,,nein", sondern etwa: ,,Manche Kinder essen vielleicht mehr, andere weniger als 2 Würstchen, also wird noch mindestens 1 Dose dazugekauft." Oder: ,,Wie viele Kinder müssen sich mit 1 Würstchen begnügen, damit 3 Dosen reichen?" Usw. — Aber die Situation darf im Unterricht nicht überstrapaziert werden.
Eine weitere Steigerung, ähnlich den o. a. Beispielen wäre: ,,Andreas hat Geburtstag. Er möchte einige Freunde einladen." — Solche Situationen praktisch durchzuspielen, ist nicht immer möglich; und selbst wo es möglich ist, muß es nicht immer sein, auch wenn manche Kindertümler es propagieren.
Auch die Beschränkung auf eine, eventuell auch noch durchweg heile, Kinderwelt mit entsprechender Kindersprache wäre eine Form von abzulehnender Kindertümelei. Nun erlebt jedoch jeder Lehrer, daß bei durchaus einfachen Situationen und durchaus einfacher (aber sachlicher) Sprache immer wieder Schüler trotz in sich korrekter mathematischer Algorithmen zu falschen Lösungen kommen. Meist wird dafür mangelhafte Übertragung von den Sachbeziehungen in mathematische Operationen und Relationen (und zurück) verantwortlich gemacht. — Die Tests zeigen aber, daß eine bedeutende Schwachstelle im Löseprozeß noch früher liegt, nämlich bereits beim Eindringen in die Sachstruktur.
Dazu einige Beispiele:
,,Herr Adler hatte im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von 2000 DM. Im Dezember erhielt er zusätzlich ein halbes Monatsgehalt als Weihnachtsgeld. Wieviel DM verdiente Herr Adler im Jahre 1977?" — 20 % der Schüler haben als Ergebnis 3000 DM, sie haben offenbar irgendwie versäumt, mit 12 zu multiplizieren. Ein mehrmals vorgekommenes Ergebnis legt jedoch eine ganz andere Interpretation nahe: 2083 DM. — Wie kommt das zustande? — $2000 : 12 = 166$; und $166 : 2 = 83$. Der Begriff ,,im Jahre 1977 ein Monatsgehalt von" wird verstanden als Gehalt in monatlichen Raten auszuzahlen.
,,Ein Fernsehmonteur repariert von 14.10 Uhr bis 17.40 ein Gerät. Er berechnet pro Arbeitsstunde 40 DM. Wie hoch war der Arbeitslohn für diese Reparatur?" — 10 % der Schüler antworten hier mit 120 DM statt 140 DM. Bestimmt waren da einige dabei, die mit der halben Stunden nicht umgehen konnten. Aber aus einigen Antworten konnte man entnehmen, daß zahlreiche Schüler nur volle Stunden berechneten (und dann natürlich besser 160 DM geschrieben hätten (was einige auch taten)).
Bei der Tischdeckenaufgabe haben viele Schüler als Ergebnis 3,40 m, andere 80 cm (breit). Für diese ist der Rand der ganze herunterhängende Teil der Tischdecke, und der ist an jeder der 4 Seiten 20 cm breit, also insgesamt 80 cm (breit), bzw. 20 cm unterhalb der Tischkante, parallel zu dieser gemessen, wie diese 3,40 m lang (siehe Abb. 2b).
Bei diesen Beispielen haben diese Schüler den Text, bzw. entscheidende Wörter und Wendungen in ihm, anders verstanden, als er gemeint war. Hier hat die Sachmathematik eine ihrer Aufgaben, nämlich Klärung von Sachsituationen, nicht erfüllt. Im Rahmen des Tests war dies auch nicht möglich, zumal er ja gerade prüfen sollte, wie Schüler mit solchen Formulierungen zurechtkommen.
Aber im Unterricht hätten diese Sachverhalte besprochen, skizziert, in Zusammenhänge eingebettet werden müssen. Dabei würde *Sprach*pflege und *Sach*klärung stattfinden: Wie hoch sind denn so die normalen Verdienste bei uns, welche Rolle hat eigentlich das Weihnachtsgeld, warum wird es nicht übers Jahr verteilt? Wie werden bei Reparaturrechnungen die Fahrzeiten berücksichtigt, was wird mit dem Stundensatz alles abgedeckt, wie wird ein Bruchteil einer Stunde angerechnet? Usw.

6. Abbau der Dominanz der Zahlen

Daß die Schüler i. a. nicht gewöhnt sind, Sachsituationen solcherart (vor jeder sachmathematischen Behandlung) zu strukturieren, wirkt sich bei ,,geeigneten" Problemen noch drastischer aus:
,,Ein normaler Brief von Aachen nach München kostet 0,60 DM. Man klebt eine 60-Pf-Briefmarke auf. München ist 600 km von Aachen entfernt. Frankfurt ist nur 300 km von Aachen entfernt. Was kostet ein normaler Brief von Aachen nach Frankfurt?" — 60 % der Schüler antworteten mit 0,30 DM. Selbstverständlich wissen die meisten Schüler, was ein normaler Brief kostet, jedenfalls wenn man die Entfernung nicht so suggestiv ins Spiel bringt. In dem 1983er Test wählten immerhin 71 % der Schüler aus 6 Werten zwischen 10 Pf und 2 DM den richtigen aus, und auch die anderen kreuzten fast alle jeweils nur *einen* Wert an, so daß man bei der so gestellten Frage nicht auf die Idee kommen könnte, daß Schüler das Porto für entfernungsabhängig halten.
Was lief bei den über 600 Schülern ab, die 1978 mit 0,30 DM geantwortet hatten? Sie befanden sich im Mathematikunterricht, sie sahen einen Text mit Zahlen, unterstellten (zu Recht), daß sie eine weitere Zahl produzieren sollten, und fingen, wie gewohnt, an zu rechnen.
Eine der primitivsten Strategien dabei ist folgende: Ist eine Zahl groß, dann ist zu addieren, wenn die andere auch groß ist, zu subtrahieren, wenn die andere deutlich kleiner ist, zu dividieren, wenn sie noch kleiner ist; wenn es jedoch nicht aufgeht, dann ist doch zu subtrahieren; sind beide Zahlen klein, ist zu multiplizieren (in der treffenden Formulierung von *Hermann Maier,* Regensburg).
So kommen dann Antworten zustande wie 31. 13. 3955 (ähnlich 6 %) auf die Frage, wie viele Tage die Weihnachtsferien dauern, mit der Angabe ,,vom 23. 12. 1977 bis 8. 1. 1978". In der Monatsgehaltsaufgabe werden 1977 und 2000 addiert. Bei der Aufgabe über Jungen und Mädchen in einer Klasse wird sofort $29 : 3$ gerechnet (5 %).
Oder — und daran nehmen wieder sehr viele Schüler teil — die Aufgabe wird so uminterpretiert, daß die Lösung eine Zahl ist: ,,Herr Kunze verdient monatlich immer zwischen 2000 und 3000 DM. Was verdient Herr Kunze im Jahr?" — 30 % der Schüler gaben 30.000 DM an, und weitere 40 % nannten sonst irgendeine einzelne Zahl (statt des Intervalls von 24.000 bis 36.000 DM), ebenso übrigens ein nicht unbedeutender Teil der Erwachsenen, die mit der Aufgabe zu tun hatten.

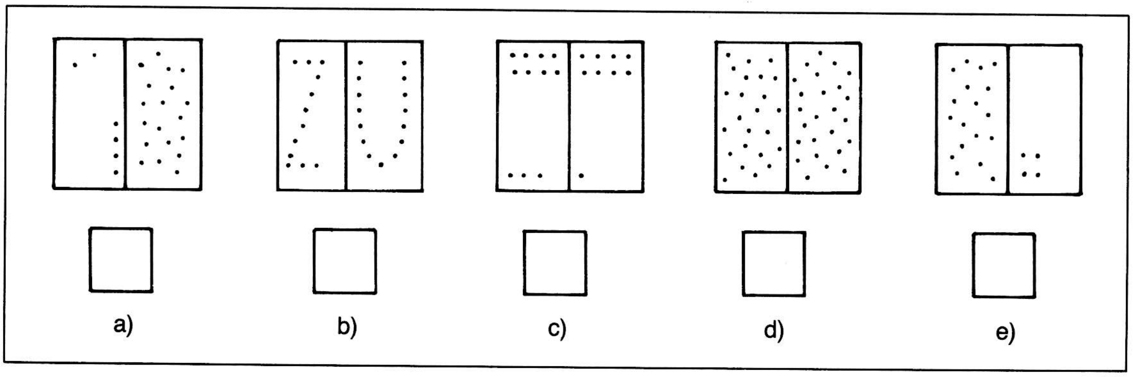


Abb. 3

Analog im nicht-arithmetischen Bereich: „Es fängt an zu regnen. Es sind erst einige Tropfen gefallen. Du schaust auf 2 Pflastersteine und beobachtest das Muster, das die Tropfen auf ihnen bilden. Hier sind einige Muster. Welches hältst du für das wahrscheinlichste? Kreuze es an!"
17 % der Antworten entfielen nicht auf d) und 6 % sogar direkt auf b). Es läßt sich nun nicht schließen, daß diese Schüler unrealistische Vorstellungen von dem Sachverhalt hätten, vielmehr haben Interviews gezeigt, daß sie die Aufgabe so aufgefaßt haben, als ob sie das für sie markanteste, bzw. ein überhaupt als solches ansprechbares Muster heraussuchen sollten.
Aber auch da, wo vernünftige oder gar korrekte Ergebnisse herauskommen, kann man nicht immer auf komplette Einsicht in die Sachsituation schließen. Es gibt durchaus noch feinere, oft auch von Didaktikern und Lehrern empfohlene sachfremde Strategien, die recht fragwürdig sind, etwa die Suche nach Signalwörtern wie „entgegengesetzt" usw. oder nach Zahlwörtern und zugehörigen Hauptwörtern, oder einfach das Zufallsprinzip (siehe auch *Brehmer/Dahlke* 1980).
Dazu ein Beispiel: „Wenn du jeden Tag 10 DM sparen könntest, nach wie vielen Jahren ungefähr würdest du dann 100.000 DM zusammen haben? 1, 2, 5, 10, 20 oder 30?" — die Interviews haben ergeben, daß von den 19 % richtigen Antworten viele darauf zurückzuführen sind, daß „30 Jahre" als größter Wert angekreuzt wurde, entweder auf der Basis einer mangelnden Rechnung oder aus einer diffusen Mutmaßung heraus. (Hier liegt natürlich ein Mangel von Multiple-Choice-Tests bzw. speziell der Konstruktion der Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage).
Solche Sachprobleme, bei denen lediglich ein ungefährer Wert gesucht ist, kommen in der Realität durchaus häufig vor. Kaum jemand (unter Erwachsenen und Schülern) rechnet mit folgender souveränen Überlegung: Wenn ich jeden Tag 10 DM spare, brauche ich 100.000 : 10 Tage, bis ich die Summe zusammen habe, und das sind 100.000 : (10 · 365) Jahre. Vielmehr wird durchweg vorwärts gerechnet, mit dem von *Meißner* (1979) so genannten Prinzip der Einbahnstraße: Im Jahr spare ich 10 · 365 DM, also etwas mehr als 3000 DM, und ich brauche ungefähr 30 Jahre, bis ich die Summe zusammen habe. (Hier wird nicht dividiert, sondern multiplikativ ergänzt.) Wer die 30 nicht direkt findet, pirscht sich an sie heran, indem er eine Wertetabelle mit der Sparsumme in Abhängigkeit von der Spardauer anlegt.
Man könnte diese ganz spezifische Schwierigkeit des Sachrechnens (!) schlagwortartig so fassen: Die Schüler agieren, wie sie es von der Arithmetik her gewohnt sind, als Funktionsmaschinen, die zu gewissen Eingabedaten nach einer bestimmten, durch den Text irgendwie festgelegten, Funktionsvorschrift, eine Zahl konstruieren sollen, den Funktionswert, wobei inhaltliche Zusammenhänge zweitrangig sind. Diese Verhaltensweise stellt sich keineswegs von selbst bei den Schülern ein; sie ist eine Folge des üblichen Unterrichts, wo noch nicht einmal in der Sachmathematik die Sache den Primat hat (vgl. wieder *Keitel* 1981 und das drastische Beispiel in der Untersuchung von *Dröge* 1984).

7. Konkrete Maßnahmen

Damit der Sachmathematikunterricht seine o. a. Aufgaben wirklich erfüllen kann, ist bei Sachaufgaben grundsätzlich zunächst die Sachstruktur ins Zentrum zu rücken und der Rechen- Automatismus abzubauen. Dies erfordert zuallererst eine entsprechende Haltungsänderung beim Lehrer und kann darüber hinaus konkret durch folgende Maßnahmen gefördert werden:
a) *Konsequentere Abkopplung* der Sachmathematik vom *Arithmetikunterricht* im engeren Sinn und Aufnahme genuiner geometrischer, statistischer, kombinatorischer usw. Inhalte (z. B. Zweck und Zweckmäßigkeit geometrischer Formen diskutieren, Verteilungen interpretieren, Zählstrategien entwickeln).
b) Verwendung unterschiedlicher Sorten von Lösungen bzw. Lösungsmengen: Nicht nur *eine Zahl,* auch mal die *leere Menge, mehrere Zahlen,* ein ganzes *Intervall,* eine *ungefähre* Zahl; eine *geometrische* Form, eine *Funktion;* Umwandlung von Grundrechen- in *Entscheidungs-* bzw. *Vergleichsaufgaben* (Würstchen-Beispiel oder Einwohnerzahlen nicht nur grafisch darstellen, sondern in Bezug zu Fläche oder Wirtschaftskraft setzen).
c) *Verzicht* auf eine *„Lösung"* überhaupt; stattdessen Reden über die Sachsituation, Erarbeitung der Sachstruktur, Variation der Eingabedaten und Diskussion der alternativen Konsequenzen, Einbettung in größere Sachzusammenhänge (vergleichbar mit *Winter* 1977).
d) *Visualisierung* der *Sprachstruktur* durch tabellarische und grafische Darstellungen (die zugleich die mathematische Bearbeitung, die spätere Reflexion des Lösungswegs und die Typisierung von Aufgaben mit vorbereiten).
e) *Nachträgliche Reflexion* des Lösungswegs und *Typisierung* von Sachaufgaben. Das kann natürlich nicht am Anfang der Aufgabe vom einzelnen Schüler verlangt werden, und schon gar nicht auf dem Niveau einer begrifflichen Beschreibung des Lösungsprozesses an *Polyas* Kategorien angelehnt. Diese

wäre nämlich trivial für die Schüler oder unverständlich. Aber es können Ablaufdiagramme u. ä. entwickelt werden oder Aufgabentypen, z. B. Gesamtkosten aus Fix- und Verbrauchskosten wie bei Strom, Telefon, Parken. Jedoch auch hier kommt es zuerst auf die Sachstruktur an; der Sinn solcher Gebührenaufteilungen ist zu diskutieren; etwaige Diagramme sollen zunächst für den Sachverhalt stehen und dann Ansatzmöglichkeiten für die Mathematik bieten.

f) „Sekundäre" Aufgaben wie *Datenbeschaffung* durch die Schüler selbst.

g) Erwerb von *Sachwissen: Alltagswissen* festigen, ergänzen und erweitern, für verschiedene Größenbereiche *Skalen* mit *Standard*größen und -repräsentanten aufbauen, den Umgang mit *Einheiten* trainieren, *Sprachpflege* treiben, den *Anschluß* schulischer und außerschulischer Disziplinen wie Physik, Technik, Wirtschaftslehre *an die Mathematik* herstellen, usw. Wichtig ist dabei auch die Erfahrung, daß mathematisch gewonnene Ergebnisse zwar eine wichtige Entscheidungsgrundlage in Problemsituationen liefern können, aber keineswegs allein den Ausschlag zu geben brauchen.

Solche Beispiele wie die Monatsgehalt-, die Stundenlohn-Aufgabe oder die Frage, wovon das Briefporto eigentlich abhängt, können beliebig weit ausgebaut werden, sei es von vornherein geplant, sei es aus einer unterrichtlichen Gelegenheit heraus. Jedoch soll der Mathematikunterricht nicht systematisch Aufgaben übernehmen, die in andere Fächer gehören. Die Gefahr des Eklektizismus besteht dabei durchaus, aber das Faktenwissen ist nicht das Ausschlaggebende, sondern die Erziehung der Schüler zum Nachdenken, Nachforschen, Nachfragen nach dem „tieferen" Grund, möglichen Konsequenzen, Einbettungen in Zusammenhänge usw. bei Sachverhalten aller Art, (und das praktisch vom ersten Schultag an, und nicht als nachträgliche Korrektur irgendwelcher Fehlentwicklungen).

Methodische Maßnahmen im engeren Sinn (Suche nach Signalwörtern, Schreibschema: „Wir wissen, fragen, antworten", Antwort im ganzen Satz, u. ä.) fehlen natürlich in diesem Maßnahmenkatalog. Auch wenn immer wieder argumentiert wird, daß schwächere Schüler solche Hilfen bräuchten, so sind doch auch Bedenken angebracht, weil diese die Schüler dazu verleiten, auf die inhaltliche Strukturierung und damit auf den *sinnvollen* Einsatz von Mathematik zu verzichten und sich stattdessen als Rechenautomat zu verhalten.

Es fehlen auch so vieldiskutierte didaktische Kriterien wie Realitätsbezug, Plausibilität der Daten, Problemhaltigkeit. Diese können aber eigentlich nur problematisch werden, wenn beim Bereitstellen von Sachaufgaben die mathematische Perspektive dominiert, nicht jedoch, wenn der Grundsatz vom Primat der Sache beachtet wird.

Eine so verstandene Sachmathematik könnte wiederum, direkt oder indirekt, zur Rechtfertigung der Beschäftigung mit Strukturmathematik (in dem o. a. weiteren Sinn) beitragen und dann mit dieser zusammen die „inhaltlichen Leitgedanken" für den Mathematikunterricht bilden (siehe Nordrhein-Westfalen 1983, S. 18).

Literatur

Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus und Sport: Erwerb gesicherter Kenntnisse und Einheiten von Grundfertigkeiten im Grundschulunterricht. Verwaltungsvorschrift. In: Amtsblatt „Kultus und Unterricht", 1982, S. 870, Stuttgart

Bender, P.: Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe *8*, 150—155, 191—198, 226—233 (1980)

Brehmer, U. und *E. Dahlke:* Schwierigkeiten im Prozeß des Lösens von Sachaufgaben. In: *H.-J. Vollrath* (Hrsg.): Sachrechnen. Didaktische Materialien für die Hauptschule. Stuttgart 1980, S. 7—21

Dröge, R.: Sachproblemlösen — Aber wie? In: mathematica didactica *7* (1984)

Hermann, H.-D.: Mathematik im Projektunterricht. In: Ästhetik und Kommunikation *6/7*, Heft 22/23, 88—103 (1975/76)

Keitel, C.: Sachrechnen und Anwendungen im Mathematikunterricht. In: mathematica didactica *4*, 95—103 (1981)

Meißner, H.: Das operative Prinzip als Einbahnstraße. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1979, 271—274

MUED, Bahnhofstr. 72, D-4405 Appelhülsen

Münzinger, W. (Hrsg.): Projektorientierter Mathematikunterricht. München 1977

Nordrhein-Westfalen, Der Kultusminister des Landes: Lehrplan Mathematik (Primarstufe). Entwurf. Düsseldorf 1983.

Sprockhoff, W.: Wieder Rechnen statt Mathematik in der Grundschule? In: Die Grundschule *14*, 143—146 (1982)

Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule *4*, 337—353 (1976)

Winter, H.: Kreatives Denken im Sachrechnen. In: Die Grundschule *9*, 106—110 (1977)