

Peter Bender, Kanal
Jn: mathematiklehren 10, 57-58 (1985)

Warum sagen wir der Spiegel vertausche 'rechts' und 'links', auch wenn wir wissen, daß er 'vorne' und 'hinten' vertauscht?

Wie ein ebener Spiegel 'vorne' und 'hinten' vertauscht, kann man sich mit einer kinematischen (nicht realisierbaren) Vorstellung verdeutlichen: Der zu spiegelnde Gegenstand (Halbraum; Raum) wird mit einer stetigen Stauchung auf die Spiegelebene projiziert. Das heißt, der Punkt wandert auf seinem Lot zur Spiegelebene und hat dabei eine solche Geschwindigkeit, daß alle Punkte nach einer Zeiteinheit gleichzeitig in der Spiegelebene ankommen. Dort läßt man sie nicht anhalten, sondern sie mit konstanter (orientierter) Geschwindigkeit eine zweite Zeiteinheit lang weiter wandern, bis sie alle wieder denselben Abstand von der Spiegelebene wie am Anfang haben, jedoch nun auf der (jeweils) anderen Seite.

Doch selbst, wer sich das Phänomen der Spiegelung⁵⁰ klarmacht, wird immer noch eine 'Links-rechts'-Vertauschung erkennen und auch von einer solchen reden. Woran liegt das?

Ein Individuum, das über Orientierung im Raum o.ä. überhaupt nachdenkt, hat zunächst einmal eine klare Auffassung darüber, wo in seinem jeweiligen zweidimensionalen Gesichtsfeld oben und wo unten ist, nämlich ausgerichtet an der Landschaft, Gebäuden, Pflanzenwuchs oder sonstigen Phänomenen im Hintergrund, an denen der Schwerkraftvektor sichtbar wird, oder aber an der Anatomie des eigenen Kopfes. Sodann wird das Gesichtsfeld in eine linke und eine rechte Hälfte eingeteilt, die durch eine lotrechte Gerade getrennt sind.

Um in einem Spiegel sein eigenes Spiegelbild zu sehen, muß man senkrecht auf diesen schauen. Die Einteilung des Gesichtsfeldes überträgt sich dann von selbst auf die Spiegelfläche. Geht es gar nicht um einen selbst, sondern um einen (evtl. nur gezeichneten oder vorgestellten) Gegenstand vor einem (gezeichneten oder vorgestellten) Spiegel, so denkt man sich⁵¹ an die Stelle dieses Gegenstands, senkrecht auf den Spiegel blickend.

Dann wendet einem das Spiegelbild die Vorderseite (zumindest das Gesicht) zu, und - das ist das Entscheidende - man unterstellt unwillkürlich, daß das Spiegelbild Ergebnis einer Translation, verbunden mit einer Rotation um insgesamt 180° um die nicht ortsfeste lotrechte Achse, bzw. bei Betrachtung des ganzen Halbraums vor dem Spiegel, daß es das Ergebnis einer Rotation um 180° um die lotrechte Mittelachse in der Spiegelfläche ist.

Nach aller physikalischen Erfahrung (die sich auch im mathematischen Modell des euklidischen Raums bestätigt) gehört zu der Bewegung eines starren orthogonalen Dreibeins, bei der in einer Richtung die Orientierung erhalten bleibt und in einer zweiten Richtung sie verkehrt wird, die Verkehrung der Orientierung in der dritten Richtung. D.h. da im Spiegelbild 'oben' erhalten geblieben und 'vorne' entgegengesetzt ist, muß auch die rechte Seite dort sein, wo beim Original die linke ist. Offenbar ist dies aber nicht der Fall, die Spiegelung verkehrt ja nur eine Orientierung. Da einem die o.a. Vorstellung einer Rotation nicht bewußt ist, erkennt man nicht das Fehlen der Vertauschung von 'rechts' und 'links', sondern meint, der Spiegel würde eine (zusätzliche) solche Vertauschung leisten.

Abbildungsgeometrisch läßt sich die Spiegelung σ an der Ebene des Spiegels auch schreiben als $(\tau\sigma)\sigma$, wobei τ die Spiegelung an derjenigen Ebene ist, die senkrecht durch die lotrechte Achse im Spiegel geht. Es ist also $\sigma = (\tau\sigma)\sigma = \tau(\sigma\sigma)$, und $\tau\sigma$ ist gerade die o.a. Drehung um 180° und τ die 'Links-rechts'-Vertauschung.

Die (idealistisch zu sehende) Symmetrie des menschlichen Körpers ist übrigens nicht wesentlich für die Unterstellung der 'Links-rechts'-Vertauschung, sondern für die Unterstellung der Rotation um die lotrechte Achse. Gäbe es auf der Erde eine ähnlich funktionale Unterscheidung zwischen 'rechts' und 'links', wie es sie der Schwerkraft zwischen 'oben' und 'unten' und im Gefolge von Beweglichkeit und optischer Wahrnehmung zwischen 'vorn' und 'hinten' gibt, und würde sich diese ähnlich drastisch in einer

völlig unsymmetrischen Formgebung in der belebten und unbelebten Natur und in der Technik auswirken, dann würden wir beim Abblick eines Spiegelbilds keine Drehung unterstellen und das Phänomen der Spiegelung würde vielleicht nicht irrlig erklärt.

Prinzipiell könne man sich auch suggerieren, daß der Spiegel 'oben' und 'unten' vertauscht:

(Das ist wieso nur dann etwas anderes als die 'Links-rechts'-Vertauschung, wenn die beiden Richtungen nicht gleichwertig sind, wie das allerdings in unserer Realität, auch noch in Zeichnungen von dieser, der Fall ist, wo die 'Oben-unten'-Richtung dominiert und eine i.a. stabile Orientierung hat. Daran ändert sich auch nichts, wenn man sich auf den Kopf stellt: Man weiß, daß in der Umwelt Orientierungsmaß alles beim alten bleibt; und sogar in Raumschiffen gibt es eine stabile funktionale Unterscheidung zwischen 'oben' und 'unten' und zwar, unabhängig von der Wirkung der Schwerkraft beim Start, wegen der menschlichen Anatomie.)

Jedenfalls müßte man sich nur eine Drehung um 180° um eine waagerechte Achse in der Spiegelebene vorstellen. Da wären 'links' und 'rechts' gleich an den richtigen Stellen, während 'oben' und 'unten' im Spiegelbild gerade da zu finden wären, wo man ihr jeweiliges Gegenüber (nach der Drehung) erwarten würde. Also vertauscht der Spiegel 'oben' und 'unten'. Mathematisch ist diese Auffassung genauso angemessen wie die übliche; in der Lebenswelt ist sie jedoch abwegig.

Sogar die Vorstellung von der 'Vorne-hinten'-Vertauschung kann man erzwingen, indem man eine Translation eines Originals zu seinem Spiegelbild unterstellt: Von diesem müßte man die Rückseite sehen, sieht aber die Vorderseite, also vertauscht der Spiegel 'vorne' und 'hinten'. Für die globale Betrachtungsweise bedarf es der anfänglichen Translation gar nicht: Da hat man direkt die 'Vorne-hinten'-Vertauschung, wie sie eingangs als kontinuierliche Änderung beschrieben wurde (wie man übrigens auch, mit geeigneten Fixpunktebenen, die beiden anderen Ver-

tauschnngen darstellen kann). Aber auch auf diese Vorstellung kommt man nicht ohne Anstrengung, sie ist der Lebenswelt ebenfalls sehr fremd: Der Anblick des Spiegelbilds (mit seiner Vorderseite) läßt praktisch nichts anderes zu als die oben erklärte Vorstellung von einer Rotation.

Die ausschließliche Rede von der 'Links-rechts'-Vertauschung ist aber für eine mehr mathematische Behandlung des Spiegelungs- und des Orientierungsbegriffs durchaus brauchbar, besonders im Hinblick auf Drehbeine ohne Auszeichnung von Richtungen in nicht-kanonischer Lage.

Mit der vorgelegten Analyse können alle möglichen Varianten einheitlich erklärt werden, z.B. wieso bei der Spiegelung einer Landschaft an einer stillen Wasseroberfläche doch 'oben' und 'unten' vertauscht werden.