In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 87-90

Peter BENDER, Kassel

Effektiver Zinssatz, Preisangabenverordnung, Anspardarlehen

1. Ein Geldgeschäft (Finanzierung, Investition) ist charakterisiert durch seine Folge

(1) $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0 \neq a_n$)

von Zahlungen zu den Zeitpunkten 0, 1, ..., n (Jahre). Der **effektive Zinssatz** (eZs) dieses Geldgeschäfts ist derjenige Zinssatz, mit dem alle Zahlungen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt (etwa das Laufzeitende n) aufzuzinsen sind, so daß ein Gleichgewicht zwischen den positiven und negativen Zahlungen entsteht, also 'die' Lösung x der folgenden Polynomgleichung:

(2) $a_0(1+x)^n + a_1(1+x)^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ x > -1)$.

Ökonomisch sinnvoll sind nur reelle Lösungen > -1 . I.a. ist (2) auch mit dieser Grundmenge nicht eindeutig lösbar. Nach der **Kartesischen Vorzeichenregel** gilt aber: Hat die Folge (1) genau einen Vorzeichenwechsel, dann hat (2) eine und nur eine Lösung. Darüber hinaus gilt folgende Verschärfung (Bender, Manu 1987): Hat die Folge $(\sum_{i=0}^{k} a_i)_k$ der Partialsummen von (1) genau einen (bzw null) Vorzeichenwechsel, dann hat (2) genau eine (bzw. null) **positive** Lösungen. Beispiele für eindeutige positive eZs: Sparbuch, Sparbrief, Obligationen, üblicher **Bankkredit**, Lebensversicherung, Rentenversicherung; für eindeutige negative: ein Kreditnehmer wird vorzeitig endgültig zahlungsunfähig, eine Lebensversicherung wird früh zurückgekauft; für nicht-eindeutige: Bausparen von Vertragsbginn und nicht erst von der Zuteilung an.

Bei einem gewöhnlichen Kredit sind $-a_1=-a_2=\ldots=-a_{n-1}=:a$ und $b:=a_0$ positiv, und mit der Restschuld $v:=-a_n-a$, die $\gtrless 0$ sein kann, wird (2) zu

(3) $b(1+x)^n = a((1+x)^n-1)/x + v$,

mit eindeutig definiertem eZs, der für $b<na+v$ positiv ist. In der Praxis ist die Gesamtlaufzeit $n+t$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq t < 1$) häufig nicht-ganz ($0 < t$), und zwischenjährige Zahlungen a' mit einer Restlaufzeit von u ($0<u\leq t$) oder $u+s+t$ ($0 \leq u$, $s \in \mathbb{N}_0$) sind die Regel. Wie solche Beträge aufzuzinsen sind, ergibt sich nicht von selbst, sondern ist Konvention:

(4) $a'(1+ux)$ bzw. $a'(1+ux)(1+x)^s(1+tx)$.

Dabei wird so getan, als ob vom Laufzeitbeginn an alle volle Jahre und zum Laufzeitende ein Zinszeitpunkt liegt. Ist das Jahr in r Teilperioden gleicher Länge eingeteilt, an deren Enden die Zahlungen immer in gleicher Höhe a' stattfinden, und ist $t=m/r$, dann wird (3) zu

(5) $b(1+x)^n(1+mx/r) = a'(r+(r-1)x/2)(1+mx/r)((1+x)^n-1)/x + a'(m+m(m-1)x/(2r)) + v$

Dies ist die Formel, mit der Kreditinstitute nach der **Preisangabenverordnung** (PAngV) bei Krediten für Nicht-Kaufleute den eZs ausrechnen müssen, den sie dann anzugeben haben. Dabei ist in zwei Schritten vorzugehen: Aus den Kreditbedingungen ist zunächst die Zahlungsfolge (1) zu ermitteln, dann sind diese Bedingungen zu vergessen (**Vergiß-Prinzip**), und x ist mit (2), (3) bzw. (5) i.a. iterativ zu berechnen.

2. Ob das Authentizitäts-Argument hinreicht, in der SI die eZs-Angabe für einen Ratenkredit anläßlich eines Moped-Kaufs überprüfen zu lassen, sei dahingestellt. Der Umgang mit (2), (3) oder (5) kann sich dann aber nicht einfach im Einsetzen eines Wertes für x erschöpfen, vielmehr ist die Gleichheit oder eine etwaige Ungleichheit zu interpretieren, und damit ist der Weg für eine iterative Bestimmung (mit dem Taschenrechner!) vorgegeben. In solche Berechnungen sind zum Vergleich auch Kreditkosten (Gebühren aller Art, obligatorische Versicherung usw.) einzubeziehen, die die PAngV nicht erfaßt. Überhaupt gilt es, sich von der sklavischen Orientierung am 'Bank-Üblichen' zu lösen und die Banken als gewöhnliche Teilnehmer am Wirtschaftsgeschehen zu erkennen, deren Zweck die Gewinnmaximierung ist und die nach wie vor Interesse daran haben, daß Kreditkosten möglichst gering erscheinen. An zwei Stellen sollte das Vergiß-Prinzip aufgehoben und der Zusammenhang zwischen nominalen Kreditbedingungen und dem eZs deutlich gemacht werden: Bei **unterjährigen Vorauszahlungen** auf Zinsen, die eigentlich erst am Jahresende fällig sind (s. dazu die beiden sich widersprechenden Urteile des Stuttgarter Landgerichts Ende 1986), und bei Darlehen mit einem sog. **Laufzeitzinssatz**, der diesen Namen eigentlich nicht verdient, weil er den eZs systematisch etwa um die Hälfte unterschätzt. Beidesmal braucht man aber nicht die volle Formel (5), sondern kann sich auf einjährige Laufzeit beschränken.

3. Es ist auch das Bewußtsein dafür auszuprägen, daß der eZs nicht nur infolge **hoher** Rückzahlungs**beträge**, sondern auch infolge **früher** Rückzahlungs**zeitpunkte** sehr groß werden kann: Angenommen, für ein Darlehen über 100 DM müssen 102 DM zurückgezahlt werden. Der eZs bei Rückzahlung t Tage vor Ablauf eines Jahres wächst für $t=0,1,\ldots,359$ von 2 % bis 720 % und wird ∞ für $t=360$ (obwohl die Zinsen in Höhe von 2 DM bequem erschwinglich sind!).

In der Variante, daß 1 DM nach einem Jahr und 101 DM t Tage davor zu zahlen sind, ergibt sich der Ansatz

(6) $100(1+x) = 101(1+tx/360) + 1$,

und hier wächst x von 2 % bei $t=0$ bis 1636 % bei $t=356$ und ist ∞ zu setzen bereits für $t \geq 357$, weil dort (6) keine positive Lösung mehr hat! Der Gültigkeitsbereich von (5) ist also noch dahingehend einzuschränken, daß die Rückzahlungen im ersten Jahr nicht zu hoch sein bzw. nicht zu früh erfolgen dürfen, also

(5a) $a'(r-1)/2 < b$.

Falls diese Bedingung verletzt ist, kann (5) nicht angewendet werden, stattdessen ist der eZs direkt ∞ zu setzen.

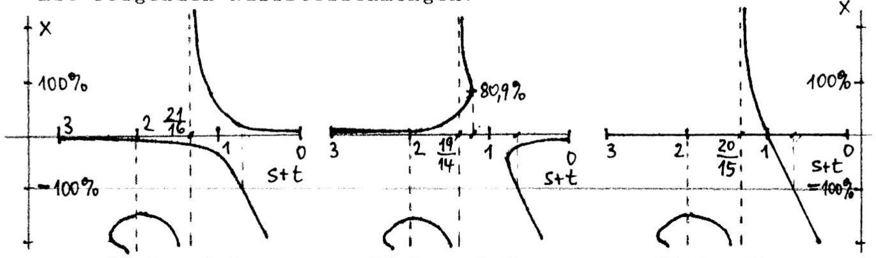
Der Vergleich der beiden Varianten zeigt eine Stelle auf, an der die Formel der PAngV widersprüchlich ist: Obwohl die Rückzahlung bei der zweiten Variante später erfolgt (falls $t \neq 0$), hat diese für jedes $t > 0$ einen höheren eZs. Dies ist eine Erblast der **Sparkassenkonvention** und könnte dadurch abgestellt werden, daß man für jedes Geldgeschäft zur Ermittlung des eZs die Laufzeit bis zur nächsten ganzjährigen aufrundet und alle Zahlungen in (1) bis dahin aufzinst, womit man jedoch in einen Widerspruch zur Praxis geriete, wo eben die Sparkassenkonvention gilt, d.h.: am Ende einer Laufzeit werden die Zinsen sofort fällig und nicht erst beim Ablauf des vollen Laufzeitjahres, in dem man gerade ist.

4. Die Wirkung früher Rückzahlungszeitpunkte wird besonders dominant bei sog. **Anspardarlehen**, die dadurch charakterisiert sind, daß der Kreditnehmer schon Rückzahlungen leistet, ehe er den Kredit überhaupt ausgezahlt bekommt (sog. Ansparphase), und auch noch danach (Darlehensphase). Die zugehörige Zahlungsfolge (1) hat dann i.a. zwei Vorzeichenwechsel, und Ansatz (2) führt zu null bzw. zwei Lösungen > -1 , die in der Regel beide positiv sind (in der Finanzmathematik wohlbekannt; s.a. Jahnke, BzM 1986).

Man kann jedoch einfache und vernünftige Kriterien für die Auswahl bei mehrfachen Lösungen bzw. die Wert-Setzung bei fehlender Lösung von (2) angeben und damit diese Definition des eZs (entgegen der verbreiteten Überzeugung) auf den Fall des Anspardarlehens ausweiten. Dazu folgendes einfache Beispiel, an dem sich alles Wesentliche zeigt: Der Ansparer A zahlt am Ende des 1., 2. und 3. Laufzeitjahres je 1000 DM , die Bank B zum Zeitpunkt s+t vor Laufzeitende ($0 \leq t \leq 1$, $s \in \mathbb{N}_0$, $s+t \leq 3$) den Betrag von $(3+z) \cdot 1000$ DM ($z=0$, $z=-0{,}2$ oder $z=0{,}2$). Dann wird (2) zu:

$$(7) \qquad (3+z)(1+x)^s(1+tx) = (1+x)^2 + (1+x) + 1$$

mit folgenden Nullstellenmengen:



(8a) z=0,2 (8b) z=-0,2 (8c) z=0

Als Kreditgeber ist natürlicherweise der mit den niedrigeren Nettozahlungen aufzufassen (bei (8a) A; bei (8b) B; bei (8c) beides möglich). Man nimmt nun s+t zunächst so an, daß ein herkömmliches Darlehen vorliegt (also bei (8a) s+t=0 , bei (8b) s+t=3), und ändert s+t dann stetig. Durch den entsprechenden **Ast** der jeweiligen **Nullstellenmenge** ist der eZs x eindeutig festgelegt (taucht eine zweite positive Lösung auf, z.B. in (8b), wenn $s+t < 19/14$ wird, so ist diese irrelevant). Entweder geht nun x gegen ∞ (in (8a) für $s+t \nearrow 21/16$) und ist ab der Polstelle dann ∞ zu setzen, oder es existiert ein 'letzter' Wert von s+t , an dem x noch definiert ist (in (8b) ist dies $s+t=(13+2\sqrt{5})/14 \approx 1{,}248$ mit $x=(1+\sqrt{5})/4 \approx 80{,}9$ %), in dem der Ast unendlich steil ist, so daß x für kleinere s+t ebenfalls ∞ zu setzen ist. Also: Wenn es für ein s+t zwei positive Lösungen gibt, ist die kleinere zu wählen; gibt es keine, so ist $x=\infty$ anzunehmen, weil dies bedeutet, daß der Kreditgeber sehr spät oder der Kreditnehmer sehr früh zahlt. (8c) ist die Grenzlage für $z \searrow 0$ und $z \nearrow 0$ zugleich.

Für scheinbar harmlose Bedingungen (z.B. B zahlt 2800 DM zwei Monate vor der 2. Rate des A) wird hier der eZs sehr groß bzw. sogar ∞ . Dies spricht jedoch nicht gegen die Übertragung des Begriffs des eZs auf Anspardarlehen, sondern gegen die jeweiligen Darlehensbedingungen, die nur deswegen für harmlos gehalten werden, weil der Einfluß der frühen Rückzahlungszeitpunkte unterschätzt wird. Will man dennoch solche Geldgeschäfte miteinander vergleichen, so kann man z.B. wie folgt vorgehen:

Daß **Bausparen** eine besonders teure Kreditform ist, zeigt sich schon, wenn man z.B. ein Darlehen zu **effektiv** 7,2 % mit einem gleichzeitig abzuschließenden normalen Bausparvertrag nach dessen Zuteilung ablösen und dann das Bauspardarlehen tilgen will (z.B. Gebühren 1,6 % und 3 %, Sparleistung 0,417 %, Tilgung 0,6 % der Vertragssumme immer am Quartalsende verzinst, Zinssätze 2,5 % und 4,5 %). Der eZs wächst dadurch auf ca. 8,4 % (!) bei, wie heute üblich, 10-jähriger Ansparphase (und immer noch auf 7,8 % bei 8-jähriger) - wohlgemerkt: durch die Verbindung mit der Vorfinanzierung hat man hier ein herkömmliches Kreditgeschäft mit dem **klassischen** eZs vorliegen! Günstiger wäre es offenbar, den Kredit ohne den Bausparvertrag aufzunehmen und ihn mit niedrigen monatlichen Raten in möglichst langer Zeit zu tilgen. Das Kursrisiko für die letzten Jahre wäre zwar höher, man hätte aber neben dem niedrigeren eZs noch den Vorteil, daß die Raten am Anfang, wo man das Geld nötiger hat, niedriger und nur gegen Ende, wo man i.a. ein nominal höheres Einkommen hat, höher wären (s. Wille, MSB 1985).

Betrachtet man den Bausparvertrag separat, nämlich als Anspardarlehen, wird seine 'Nachteilhaftigkeit' offenbar: Bei 7-jähriger Ansparzeit liegt der eZs über 12 % und bei 10-jähriger ist er schon ∞ . Die PAngV fördert hier eine Irreführung des Bausparers, indem sie die Angabe des eZs nur für die Darlehensphase fordert, wo er bei 5,5 % liegt.

5. Noch viel weiter kann jedoch dieser Begriff des eZs nicht getrieben werden: Wie will man z.B. für die Zahlungsfolge (100 000, -450 000, 758 750, -568 125, 159 390) die vier Lösungen 5 %, 10 %, 15 % und 20 % interpretieren?