Peter Bender, Kassel

Wie wirtschaftlich ist Bausparen?

~~(Zur Veröffentlichung in der Zeitschrift~~ 'mathematiklehren';
~~30.04.1987; 14.05.1987~~)
22, 36-40 (1987)

1. Motive für das Bausparen

Generationen von Häusle-Bauern haben sich den Traum vom Eigenheim mit Hilfe des Bausparens verwirklicht, und trotz schwerer wirtschaftlicher Einbrüche bei den Bausparkassen Anfang der achtziger Jahre ist das Bausparen auch heute noch beliebt:

Beim Bausparen muß man ein paar Jahre lang regelmäßig sparen und erwirbt damit einen Anspruch auf ein Bau-Darlehen in der Größenordnung der bereits angesparten Summe. Der Zinssatz für dieses Darlehen beträgt nominal meist 5 %; das ist zwar in der derzeitigen Niedrigzins-Phase nicht überwältigend günstig, aber der Zinssatz bleibt fest bis zum Laufzeitende, und das auch, wenn der Markt-Zinssatz für Hypotheken beispielsweise über 10 % liegt.

Hinzu kommen weitere (z.T. nur **scheinbare**) Vorteile: Man muß nicht gleich bei Abschluß des Bauspar-Vertrags Zinsen zahlen, sondern erst nach vielen Jahren, und bis dahin **kriegt** man sogar noch Zinsen für das Spar-Guthaben! Die Haben-Zinssätze liegen in der Größenordnung von 3 %; dies stellt derzeit eine respektable Rendite dar und bewegt sich auch in Zeiten 'normaler' Zinshöhe im Rahmen üblicher Sparzinsen.

Außerdem "hilft der Staat mit beim Bauen", wie der Slogan so schön heißt, indem er auch speziell das Bausparen durch mehrere Maßnahmen fördert: Arbeitnehmer-Sparzulage, Wohnungsbau-Prämie bzw. Steuervergünstigung durch Abzugsfähigkeit von Bauspar-Aufwendungen als Sonderausgaben.

Doch halt: Bei der Mehrzahl der berufstätigen Bevölkerung ist das Sonderausgaben-Kontingent bei der Steuererklärung bereits durch Versicherungen ausgefüllt, so daß die Bauspar-Aufwendungen nicht mehr steuerlich wirksam werden. Für den Anspruch auf Sparzulage und Prämie wiederum gibt es Einkommens-Obergrenzen, die von Jahr zu Jahr zunehmend von Bau-Willigen (und **-Potenten!**) überschritten werden, die damit aus dieser Förderung herausfallen: 48 000 DM zu versteuerndes Einkommen bei Verheirateten und 24 000 DM bei Ledigen.

Für die grundsätzlichen Überlegungen zum Bausparen sollte man diese Vergünstigungen deshalb außer Betracht lassen, ebenso wie auch zusätzliche Belastungen, etwa in Form von Risiko-Lebensversicherungen, einfach weil diese Be- und Entlastungen zu stark von den persönlichen Umständen abhängen (dies ganz im Sinne der Preisangabenverordnung vom 14.03.1985; PAngV; BGBl I 1985, 580; und den Ausführungshinweisen des Bund-Länder-Ausschusses 'Preisangaben' vom 31.07.1985 zu deren § 4) und sich bei Baukosten von 300 000 DM nicht mehr so entscheidend auswirken.

Für den klassischen Typ des Bausparers war und ist Bausparen durchaus sinnvoll: Zwischen dem Eintritt in das Berufsleben und dem geplanten Bezug des Hauses liegt viel Zeit, in der ein spürbarer Anteil an den gesamten Baukosten als Guthaben angespart werden kann, und in dieser Zeit ist man frei von größeren Schulden (die man nämlich sonst günstigerweise ablösen würde statt bauzusparen).

Heutzutage findet man diesen Typ relativ seltener: Die Ausbildungszeiten sind länger geworden, so daß es mit dem Geld-Verdienen später losgeht, und die Bereitschaft, nach einem Entschluß zum Wohn-Eigentum noch jahre- und jahrzehntelang bis zum Erwerb desselben zu warten, hat im Zuge der sozialen Entwicklung in unserem Land deutlich nachgelassen, wofür nicht zuletzt die Banken mit verantwortlich sind, indem sie besonders um 1980 großzügig Bau-Kredite auch bei sehr geringem Eigenkapital gewährten. (Da das Real-Einkommen der Arbeitnehmer seit 1979 insgesamt kaum noch gewachsen ist – im Gegensatz zu den Jahren davor – konnte seitdem so manche Familie – insbesondere bei Arbeitslosigkeit – ihren Finanzplan nicht mehr erfüllen, und ihr Haus kam unter den Hammer; bei diesen ca. 9000 Fällen im Jahr 1986 wurden übrigens durchweg nur 50 % – 70 % des Verkehrswerts erlöst, so daß anschließend häufig das Haus, nicht aber alle Schulden weg waren.)

Beim 'ordentlichen' Bausparen kann eine solche Eigenkapital-Unterdeckung eigentlich nicht vorkommen: Bei fast allen Bauspar-Tarifen muß der Bausparer nämlich 40 % (bei manchen sogar 50 %) der Bauspar-Summe angespart haben, ehe er diese ausgezahlt bekommt (sog. **Zuteilung** des Bauspar-Vertrags), wovon dann eben die

40 % (oder mehr) ihm sowieso gehören und lediglich die Differenz bis 100 % das Darlehen, also Fremdkapital, darstellen. Mit dessen Abtragung kann man zwar immer noch überfordert sein; damit ist aber weniger zu rechnen, da man durch das Ansparen seine Finanzkraft unter Beweis gestellt hat.

Nun haben aber, wie gesagt, viele Bau-Willige zu dem Zeitpunkt, wo sie Bau-Geld brauchen, keinen Darlehens-Anspruch aus einem Bauspar-Vertrag bzw. keinen in ausreichender Höhe, und es be steht Bedarf an einer Sofort-Finanzierung eines mehr oder weniger hohen Betrags. Um die Durchführung solcher Finanzierungen bewerben sich Kreditinstitute wie Geschäftsbanken, Hypothekenbanken, Versicherungen usw. und auch die Bausparkassen mit ihrem Angebot der sog. **Vor-Finanzierung** (mit der weniger bedeutenden Variante der Zwischen-Finanzierung): Es wird das gewünschte Darlehen sofort gewährt; und für dieses sind zunächst nur Zinsen und keine Tilgung zu zahlen. Getilgt wird auf einen Schlag, und zwar dann, wenn ein gleichzeitig abzuschließender (oder schon vorhandener) Bauspar-Vertrag in gleicher Höhe zugeteilt wird.

Bei der Vor-Finanzierung eines Bauspar-Vertrags zahlt man also: In der Anspar-Phase die Zinsen für das Darlehen (der Zinssatz dafür ist meist moderat; er liegt häufig im unteren Bereich von markt-üblichen Hypotheken-Zinssätzen, z.Z. bei ca. 6,5 %); in der Darlehens-Phase die Tilgung des Bauspar-Darlehens und 5 % Zinsen, allerdings nur für 60 % (oder weniger) des ursprünglichen Darlehens. Außerdem erhält man in der Anspar-Phase ja noch die Haben-Zinsen! Und nach etwa 20 Jahren ist alles bezahlt!

Da wundert man sich doch, daß andere Formen der Bau-Finanzierung überhaupt existieren, besonders wo dort die Zinssatz-Festschreibung i.a. spätestens nach 10 Jahren aufgehoben wird und man dann u.U. mit höheren Zinssätzen zu rechnen hat. Nun sind die Banken usw. durch die PAngV zur Angabe des effektiven Zinssatzes (bzw. anfänglichen effektiven Zinssatzes für die Zeit der Zinssatz-Bindung) verpflichtet. Da kann man ja einmal vergleichen: Eine Hypothek über 100 000 DM mit 100 % Auszahlung, nominal 7,4 % Zinsen und 1 % Tilgung hat bei monatlichen Raten von 700 DM einen anfänglichen effektiven Zinssatz von 7,76 %. Ein entsprechendes Darlehen zu nominal 6,5 % hat einen effektiven Zinssatz von 6,70 %; wenn es nach etwa 10 Jahren abgelöst wird, beträgt das Bauspar-Darlehen dann noch gut 40 000 DM, dessen Tilgung wiederum etwa 8 Jahre dauert mit einem effektiven Zinssatz von

ca. 5,7 %, so daß man für das Gesamt-Geschäft bei dieser Variante einen effektiven Zinssatz von ca. 6,5 % (eine Art gewichtetes geometrisches Mittel) erhält. Und davon müßten die Haben-Zinsen noch irgendwie abgezogen werden.

Wer so rechnet, macht einen unscheinbaren, aber entscheidenden Gedankenfehler und wendet den Begriff des effektiven Zinssatzes (nicht etwa die Formel der PAngV!) falsch an.

2. Wie man den effektiven Zinssatz ausrechnet

Im folgenden werde ich diesen Begriff im Prinzip erläutern. Für zahlreiche wichtige Einzelheiten möchte ich auf Hestermeyer (1985, 1987) verweisen. Man kann die Arbeit mit dem effektiven Zinssatz in der SI je nach Niveau recht weit treiben. Für eine Formel wie in der PAngV werden arithmetische und geometrische Reihe gebraucht; der Taschenrechner ist unabdingbar; funktionales Denken ist wesentlich: Was passiert mit linker und rechter Seite der jeweiligen Gleichung bei Änderung des Zinssatzes?

Bei der Anwendung auf das Bausparen (mit oder ohne Vor-Finanzierung) braucht man eine noch kompliziertere Formel als die in der PAngV. Dies zusammen mit der notwendigen Motivation zur Beschäftigung mit dem Bauspar-Wesen läßt eine Verlagerung in die SII eventuell in Verbindung mit dem Einsatz des Computers geboten erscheinen. Wenn schließlich die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit des effektiven Zinssatzes behandelt werden, werden Kurven-Diskussionen für Polynom-Funktionen gebraucht, und man befindet sich direkt im Analysis-Unterricht oder wenigstens in dessen Nähe.

<u>2.1 Das Gleichgewicht zwischen Ein- und Auszahlungen, hergestellt über den effektiven Zinssatz</u>

Die Grundidee des effektiven Zinssatzes ergibt sich aus folgender Fragestellung: Für ein Darlehen in Höhe von D wird nach n Jahren der Betrag A (A>D) zurückgezahlt. Die Zinsen A-D denkt man sich folgendermaßen entstanden: In jedem Jahr wird der Jahres-Anfangsbestand um einen bestimmten über die Jahre **konstanten** Prozentsatz (effektiver Zinssatz) auf den Jahres-Endstand erhöht (wobei Zinseszinsen entstehen). Wie hoch ist dieser Prozentsatz, so daß aus D am Anfang A am Ende wird? **Mathematisch** liegt ein ungestörter Wachstums-Prozeß mit dem Wachstumsfaktor $1+x_e$ und der Wachstumsrate x_e vor (s. Kirsch 1976). Aus der Gleichung

(1) $D(1+x)^n = A$

ergibt sich x_e eindeutig (und zwar $x_e>0$; als ein Maß für die 'Güte' des Darlehens). Gewöhnlich finden bei einem derartigen Geldgeschäft auch innerhalb der Laufzeit Zahlungen statt; der 'Wachstums-Prozeß' ist 'gestört'. Auch hierfür definiert man ein Gütemaß in Form eines effektiven Zinssatzes. So wie schon im einfachen Fall (1) eine Mittelbildung vorliegt (der effektive Zinsfaktor $1+x_e$ als geometrisches Mittel der tatsächlichen Zinsfaktoren $1+x_1$, $1+x_2$, ..., $1+x_n$), wird auch jetzt jede Zahlung, egal ob vom Darlehensgeber oder -nehmer, mit ein und demselben Zinssatz aufgezinst, und die Frage lautet nun: Wie hoch ist dieser zu wählen, damit sich die (positiven und negativen) aufgezinsten Zahlungen gerade im Gleichgewicht befinden und das Geldgeschäft also mit der letzten Zahlung zum Zeitpunkt n von beiden Seiten als erledigt erklärt wird? Sind D $(D>0)$ das Darlehen und A_1, A_2, ..., A_n $(A_i\geq 0)$ die Zahlungen des Darlehensnehmers, dann ist der effektive Zinssatz x_e derjenige Zinssatz, bei dem folgende Gleichung in $y:=1+x$ mit $y_e:=1+x_e$ erfüllt ist:

(2) $Dy^n = A_1y^{n-1} + A_2y^{n-2} + \ldots + A_{n-1}y + A_n$,

die speziell für $A_1=A_2=\ldots=A_n=:A$ zu

(3) $Dy^n(y-1) = A(y^n-1)$

(unter Benutzung der geometrischen Reihe!) wird. Zur Analyse dieser Gleichung im Mathematik-Unterricht der SII betrachtet man günstigerweise das Polynom

(4) $p(y) := Dy^n - A_1y^{n-1} - \ldots - A_n$ (im Bereich $y\geq 1$).

Dieses hat offenbar höchstens dann eine Nullstelle y_0 (mit y_0 >1), wenn

(5) $p(1) = D - A_1 - A_2 - \ldots - A_n < 0$

(der Beweis wird weiter unten in anderem Zusammenhang geführt). Sei (5) ab jetzt gegeben. Man überlegt sich elementar, daß man

y nur groß genug machen braucht, damit $p(y)>0$ gilt. Also hat p (aus Stetigkeitsgründen, die man recht naiv einbringen kann) eine Nullstelle y_e (im Bereich $y>1$). Sobald aber für ein $y_0\geq 1$ gilt, daß $p(y_0)\geq 0$, dann gilt für alle y mit $y\geq y_0$, daß $p(y)\geq 0$. Um dies einzusehen, beachte man, daß $q(y):=D-A_1/y-A_2/y^2-\ldots-A_n/y^n$ im Bereich $y\geq 1$ streng monoton steigend ist, so daß für ein y_0 mit $q(y_0)\geq 0$ gilt, daß $q(y)>0$ für alle y mit $y>y_0$. Zwar ist $p(y)$ ($=y^nq(y)$) nicht notwendig monoton steigend, aber es ergibt sich hiermit, daß es genau eine Nullstelle hat. (Alle diese Überlegungen bleiben gültig, wenn das Darlehen in mehreren Teilbeträgen ausgezahlt wird; es muß dabei nur gewährleistet sein, daß sämtliche Zahlungen des Darlehensgebers **vor** denen des Darlehensnehmers stattfinden und in der Summe **niedriger** als jene sind.) Die eindeutig existierende Nullstelle von p wird als der effektive Zinssatz genommen.

Bekanntlich läßt diese Nullstelle sich i.a. nur iterativ bestimmen. Man muß hier keineswegs mit dem Newton-Verfahren arbeiten; die primitive Intervallhalbierungs-Strategie tut's auch: Man wertet (2) oder (3) mit irgendeinem Wert x $(x>0)$ bzw. y ($y=1+x>1$) aus: Ist der linke Term größer als der rechte, dann befindet man sich im oben analysierten Positivitäts-Bereich von p und muß mit einem keineren Wert fortfahren. Ist der linke Term kleiner, dann muß man den Wert für x vergrößern. Inhaltlich bedeutet das: Bei einem zu hohen Wert für den effektiven Zinssatz reichen die Rückzahlungen A nicht aus, um aufgezinst das entsprechend aufgezinste Darlehen auszugleichen. Da sie aber für ausreichend erklärt sind, muß der effektive Zinssatz niedriger sein; usw.

2.2 Das Vergiß-Prinzip gegen den entscheidenden Gedankenfehler beim Bausparen

Es sollte aufgefallen sein, daß von (Dis-)Agio, Gebühren, nominalem Zinssatz, unterjähriger Verzinsung, Aufteilung in Zins- und Tilgungsanteil u.ä. keine Rede ist. Natürlich spielen diese Größen eine Rolle, indem sie Höhe und Dauer der Zahlungen bestimmen. Aber wenn die Zahlungsreihe $D,-A_1,-A_2,\ldots,-A_n$ einmal feststeht, kann und muß man zur Berechnung des effektiven Zinssatzes alle diese Größen (vorübergehend) vergessen (**Vergiß-Prinzip**) und nur mit der Zahlungsreihe arbeiten.

Die konsequente Anwendung dieses Prinzips macht den oben behaupteten Gedankenfehler beim Bausparen mit Vor-Finanzierung durchschaubar: Um $D = 100\,000$ DM direkt zu erhalten, muß man ein Darlehen in dieser Höhe aufnehmen und einen Bauspar-Vertrag in gleicher Höhe abschließen. Bis zur Zuteilung nach etwa 10 Jahren müssen jährlich die Zinsen für das Darlehen und die Bauspar-Beiträge gezahlt werden. Diese beiden **zusammen** machen die Zahlungen $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ des Darlehensnehmers aus, wobei es keine Rolle spielt, als was diese Zahlungen etikettiert sind.

Wo bleiben bei dieser Überlegung die Haben-Zinsen? Sie wirken sich zunächst nicht auf den Zahlungsstrom aus, sondern erhöhen das 'Guthaben' des Bausparers auf dem Bauspar-Konto. Damit tragen sie dazu bei, daß es bis zur Zuteilung nicht noch länger dauert und daß das Bauspar-Darlehen niedriger ausfällt und daher schneller getilgt wird, da die Höhe der Tilgungsraten (A_{11}, A_{12}, ... in Fortsetzung von oben) nur von der Höhe der Bauspar-Summe (Vertrags-Summe) und nicht von der Höhe des Bauspar-Darlehens abhängt.

2.3 Die Berücksichtigung unterjähriger Zahlungen

Um diese Überlegungen an einem realistischen Beispiel verdeutlichen zu können, sind noch die Auswirkungen unterjähriger Zahlungen zu berücksichtigen, da im Bauspar-Geschäft monatliche Zahlweise üblich ist: Während 6000 DM Zinsen am Jahresende für ein Darlehen von 100 000 DM einen effektiven Zinssatz von 6 % bedeutet, stellen 500 DM an jedem Monatsende für dieses Darlehen einen höheren effektiven Zinssatz dar, nämlich aus dem zu (2) analogen Ansatz

(6) $$D(1+x) = A_1^*(1+\tfrac{11}{12}x) + A_2^*(1+\tfrac{10}{12}x) + \ldots + A_{12}^* + D$$

entsteht mit $A^* := A_1^* = A_2^* = \ldots = A_{12}^*$

(7) $$Dx = A^*(12 + \tfrac{x}{12}(11+10+\ldots+1+0)) = A^*(12 + 5{,}5 \cdot x)$$

(arithmetische Reihe), und mit den Zahlen des Beispiels ergibt sich $x_e = 6{,}17$ %.

In der Formel der PAngV werden unterjährige Zahlungen genau auf diese Weise berücksichtigt: Sie werden bis zum jeweils nächsten Jahresende **einfach** verzinst, und ab dann normal jährlich: Eine Zahlung A^* um die Zeitspanne t $(0 \leq t \leq 1)$ vor Jahresende hat

am Jahresende dann einen 'Wert' von $A^*(1+tx)$ mit dem fraglichen Zinssatz x. Das bedeutet nichts anderes, als so zu tun, als ob A^* über $A^*(1+tx) = A^*((1-t) + t(1+x)) = A^*(1-t) + tA^*(1+x)$ in zwei Teilbeträge

(8) $$tA^* \text{ und } (1-t)A^*$$

aufgespaltet wird, die (fiktiv) auf Jahresanfang und -ende verteilt und entsprechend ganz normal aufgezinst werden, der erstgenannte Teilbetrag ein Jahr länger als der andere. Die Gewichtung der beiden Teilbeträge ergibt sich aus dem Zeitpunkt, zu dem die Zahlung tatsächlich geleistet wird. Diese Art der Behandlung entspricht der tatsächlichen Verzinsung auf einem idealen Konto mit jährlicher Zinsgutschrift. Ihr mathematischer Vorzug liegt darin, daß bei einer Laufzeit von n Jahren die Bestimmungsgleichung (2) keinen höheren Grad als n hat, z.B.

"ein Darlehen von 5000 DM wird 5 Jahre lang an jedem Monatsende mit 100 DM zurückgezahlt":

(9) $$5000 \cdot (1+x)^5 = (650 + 550 \cdot (1+x)) \cdot ((1+x)^4 + (1+x)^3 + (1+x)^2 + (1+x) + 1)$$

ergibt $4450 \cdot (1+x) = 1200 \cdot ((1+x)^4 + (1+x)^3 + (1+x)^2 + (1+x) + 1) - 550 = 1200 \cdot \frac{(1+x)^5 - 1}{x} - 550$ und weiter iterativ $x_e = 7{,}70$ %.

Wenn man nun noch beachtet, daß bei nicht-ganzjähriger Gesamt-Laufzeit die letzte Zinsperiode dann nicht als ganzes Jahr, sondern entsprechend kürzer angenommen wird, kann man für ein beliebiges Darlehen den effektiven Zinssatz im Sinne der PAngV ausrechnen: Ist D das Darlehen, sind $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ die jährlichen Zahlungen des Darlehensnehmers (die sich ihrerseits aus (fiktiven) Teilbeträgen aus unterjährigen Zahlungen zusammensetzen können, wie in (8) ausgeführt), dann ergibt sich der effektive Zinssatz aus

(10) $$D(1+x)^n(1+tx) = (A_0(1+x)^n + A_1(1+x)^{n-1} + \ldots A_{n-1}(1+x) + A_n)(1+tx) + A_{n+1}$$

(man beachte: $0<t\leq 1$; $0 \leq A_i$; $0<A_{n+1}$; $A_0 < D < A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}$).

Falls die Raten etwa monatlich in gleicher Höhe A^* zu leisten sind, dann hat man (mit $t = m/12$; $0 < m \leq 12$)

(11) $(D-5{,}5\cdot A^*)(1+x)^n(1+\frac{m}{12}x) = A^*((12\cdot\frac{(1+x)^n-1}{x}+\frac{m-1}{2}-5{,}5)(1+\frac{m}{12}x)+\frac{m+1}{2})$

(die Formel der PAngV in übersichtlicherer Form), und diese Formel läßt sich zur Not gerade noch mit dem Taschenrechner auswerten.

3. Der effektive Zinssatz beim Bausparen

Nun endlich zum Bauspar-Beispiel: Für ein Darlehen von 120 000 DM seien nominal 6,5 %, also monatlich 650 DM Zinsen bis zur Zuteilung des Bauspar-Vertrags nach 10 Jahren zu zahlen. Für den Bauspar-Vertrag seien in dieser Zeit monatlich 500 DM, danach monatlich 720 DM, und zwar 7 Jahre 9 Monate lang, und zum Schluß noch eine Rate von 209 DM zu zahlen. Dann hat man

(12) $(120\,000 - 5{,}5\cdot 1150)(1+x)^{17}(1+\frac{10}{12}x) = (12\cdot 1150\cdot((1+x)^{16} + (1+x)^{15} + \ldots + (1+x)^{8}) + (6{,}5\cdot 1150 + 5{,}5\cdot 720)(1+x)^{7} + 12\cdot 720\cdot((1+x)^{6} + (1+x)^{5} + \ldots + (1+x)) + 720\cdot(6{,}5+4{,}5))(1+\frac{10}{12}x) + 720\cdot 4{,}5 + 209$, und daraus $x_e = 7{,}90$ % .

Könnte man eine Hypothek ergattern zu einem **effektiven** Zinssatz von 7 % mit 10-jähriger Festschreibung, so hätte man bei den monatlichen Raten wie in (12) von 1150 DM nach 10 Jahren noch eine Schuld von $(120\,000 - 5{,}5\cdot 1150)\cdot 1{,}07^{10} - 12\cdot 1150\cdot\frac{1{,}07^{10}-1}{0{,}07} + 5{,}5\cdot 1150 = 39\,274$ (DM). Würde nach Aufhebung der Zinssatz-Bindung der Markt-Zinssatz auf 16,37 % (!) steigen, dann wäre diese Schuld gerade mit monatlichen Zahlungen von 720 DM in 7 Jahren 9 Monaten und einer letzten Rate von 209 DM getilgt; und sobald der Markt-Zinssatz niedriger wäre, würde man bei dieser Variante besser fahren als bei (12).

Auch wenn die Zuteilung der Bauspar-Summe bei der oben angenommenen monatlichen Sparrate von 0,417 % schon nach knapp 8 Jahren erfolgen würde (wie bis in die siebziger Jahre üblich), beliefe sich der effektive Zinssatz im entsprechend modifizierten Beispiel (12) noch auf 7,36 %.

Nanu – die Darlehen werden durch die Verknüpfung mit Bausparen teurer! Da müßte man doch einmal den effektiven Zinssatz für den Bauspar-Vertrag allein berechnen. Er muß deutlich höher sein als die 5,7 % für die Darlehens-Phase; und das liegt gewiß daran, daß für das Darlehen, das ja erst nach 10 Jahren zur Verfügung

gestellt wird, schon sehr früh Rückzahlungs-Raten geleistet werden, nämlich schon **vor** Empfang des Darlehens! So und nicht anders ist die Anspar-Phase im Gesamtzusammenhang zu sehen. Also analog Ansatz (4) ergibt sich (zwecks Rechen-Vereinfachung werden noch etwas günstigere Bedingungen angenommen: Die Darlehens-Phase soll nur 7 Jahre dauern, d.h. mit denselben Tilgungs-Raten wie oben soll das Darlehen schon nach 7 Jahren als getilgt gelten):

(13) $p(y) = 120\,000\,y^{7} - 5{,}5\cdot 500\cdot y^{17} - ((12\cdot 500\cdot\frac{y^{10}-1}{y-1} + 5{,}5\cdot(720-500))\cdot y^{7} + 12\cdot 720\cdot\frac{y^{7}-1}{y-1} - 5{,}5\cdot 720)$.

Man stellt fest, daß p keine positive reelle Lösung hat. Dies liegt anscheinend daran, daß das Darlehen in der Laufzeit so spät ausgezahlt wird, daß es mit keinem, noch so großen, Zinssatz aufgezinst den entsprechend aufgezinsten Zahlungen des Darlehensnehmers Gleichgewicht halten kann. – Aber wir haben doch im Anschluß an (5) bewiesen, daß p genau eine positive reelle Nullstelle hat! – Jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der führende Summand des Polynoms der Darlehens-Betrag ist, und dies ist bei (13) nicht gegeben.

Zur weiteren Analyse sucht man sich ein einfacheres Beispiel: $A_0=A_1=A_2=:A = 1000$ DM und $D = 2800$ DM . Dafür sind verschiedene Varianten zu betrachten, wo D jeweils zum Zeitpunkt t $(0\le t\le 1)$ ausgezahlt wird. Es entsteht eine Schar von Polynomen

(14) $p_t(y) = 2800\cdot(1-t)\cdot y^2 + 2800\cdot t\cdot y - 1000\cdot(y^2+y+1) = (1800-2800\cdot t)\cdot y^2 + (2800\cdot t-1000)\cdot y - 1000$.

Für $t\le 1000/2800$ liegt ein 'normales' Darlehen vor (zuerst eine Darlehens-Zahlung, dann die Rückzahlungen), und auch für $1000/2800<t<1800/2800$ hat man noch den unproblematischen Fall, daß das Darlehen quasi in zwei Teilbeträgen am Anfang ausgezahlt wird. Daher existiert für $t<1800/2800$ eindeutig eine Nullstelle y_e (im Bereich $y>1$), also ein effektiver Zinssatz $x_e=y_e-1$. Dies gilt auch noch für $t=1800/2800$, wo p_t ein Polynom ersten Grades mit einer Gerade als Graph ist. Rechnet man die jeweilige Nullstelle von p_t explizit aus, sieht man, daß sie mit t wächst. Die Graphen der p_t sehen aus wie in Abb.1.

Abb.1

Wenn nun $t > 1800/2800$ ist, ist die jeweilige Parabel nach unten geöffnet. Im Bereich $y > 1$ ergeben sich zunächst 2 Nullstellen. Mit steigendem t wird das Maximum von p_t kleiner, die kleinere Nullstelle größer und die größere kleiner, bis schließlich das Maximum 0 wird und die beiden Nullstellen zusammenfallen. Wenn das Maximum schließlich negativ wird, gibt es gar keine Nullstelle mehr.

Offensichtlich ist die kleinere Nullstelle als effektiver Zinssatz zu nehmen: Sie entsteht stetig aus dem effektiven Zinssatz im klassischen (eindeutigen) Fall, und sie verhält sich 'vernünftig', indem sie wächst, wenn - bei gleichbleibenden Rückzahlungsbeträgen - der Darlehensbetrag kleiner oder später ausgezahlt wird. Für $t > \frac{15-2\sqrt{5}}{14} \approx 0{,}752$ muß man also wohl oder übel $x_e = \infty$ setzen. Dies wird auch deutlich, wenn man x_e als Funktion von t abträgt: Diese ist streng monoton steigend, und im o.a. Endpunkt wird die Steigung sogar ∞ (s. Bender 1987).

Abb.2

Beim Bausparen (s. Polynom (13)) tritt genau derselbe Effekt auf: Läßt man den Auszahlungs-Zeitpunkt des Darlehens (bei unverändertem Rückzahlungs-Strom) von $t=0$ bis $t=10$ gehen, so hat man im ersten Jahr eine Zeitlang eine eindeutig lösbare Gleichung für den effektiven Zinssatz. Dann tritt bald eine zweite Lösung auf; die kleinere (die als der effektive Zinssatz zu nehmen ist) und die größere wachsen zusammen, und etwa bei $t \approx 8$ beginnt der Bereich, wo $x_e = \infty$ zu setzen ist (keine positive reelle Nullstelle mehr existiert). (Eine allgemeinere Begründung für den Sachverhalt ist die Kartesische Nullstellenregel: Ein Polynom $p(y)$ hat in $\mathbb{R}^+$ höchstens so viele Nullstellen, wie die Folge seiner Koeffizienten Vorzeichenwechsel hat.)

Für diese mathematischen Überlegungen kann der Rückzahlungsstrom F-S trotz Variation des Zuteilungs-Termins zwar unverändert gehalten werden, in der Praxis wird dieser Strom natürlich beeinflußt: Bei früherer Zuteilung wird die Anspar-Phase kürzer und die Darlehens-Phase länger. Für einige geläufige Bauspar-Tarife habe ich Modellrechnungen durchgeführt, und je nach dem bewegt sich der effektive Zinssatz bei Ansparzeiten von 7 Jahren (und einigen Monate länger) in Bereichen von 9 % bis über 12 % und steigt bei weiterer **geringer** Verlängerung der Ansparzeit schnell auf große Werte (und ist bald gar nicht mehr definiert bzw. ∞), so daß in diesen Bereichen die Aussagekraft des effektiven Zinssatzes eher global gesehen werden muß.

Nun ist festzustellen, daß in der Praxis Ansparzeiten nur in diesen Bereichen auftreten, da das vertraglich erforderliche Mindest-Sparguthaben (meist 40 %, in manchen Tarifen 50 %, der Bauspar-Summe) bei normaler Sparleistung frühestens nach knapp 8 Jahren erreicht wird. Man kann die Anspar-Phase zwar durch Sonderzahlungen abkürzen, im häufig vorkommenden Extremfall z.B. dadurch, daß man sofort bei Vertrags-Abschluß das Mindest-Sparguthaben einzahlt (indem man sich etwa das vor-finanzierte Darlehen nicht ganz auszahlen läßt), aber hierbei ist zu beachten, daß hohe Zahlungen des Darlehensnehmers, besonders am Anfang, auch den effektiven Zinssatz entsprechend erhöhen. Die bei dieser Variante heute üblichen Wartezeiten (von vier und deutlich mehr Jahren) liegen ebenfalls in dem Bereich, in dem der effektive Zinssatz ∞ zu nehmen ist, wie man mit entsprechenden Modellrechnungen überprüfen kann.

Bei der mathematischen Behandlung ist darauf zu achten, daß die Bedingung (5) $D < A_0 + A_1 + \ldots + A_{n+1}$ erfüllt ist. Wenn sie verletzt ist, treten ganz andere Sachverhalte auf (s. z.B. Bender 1987). Inhaltlich bedeutet dies nämlich, daß die Rollen von Darlehensnehmer und -geber vertauscht werden. Diese Rollen können ja nicht mehr über die Reihenfolge der Zahlungen definiert werden, sondern z.B. über die Gesamtsummen: Derjenige ist der Darlehensnehmer, der insgesamt mehr gezahlt hat (diese Mehr-Zahlungen sind nämlich als Zinsen u.ä. zu interpretieren). Da Bedingung (5) insbesondere bei Bauspar-Verträgen in der Praxis immer erfüllt ist (es sei denn, der Bausparer wird vorzeitig endgültig zahlungsunfähig), braucht man den Fall nicht zu untersuchen, wo sie verletzt ist und braucht sich um diese anderen Sachverhalte nicht zu kümmern (deren Untersuchung allerdings auch nicht allzu schwierig ist).

Ein effektiver Zinssatz von ∞ bedeutet nun nicht, daß die Bausparkasse unendlich viel verdient oder der Bausparer unendlich viel verliert (auch wer z.B. ein Darlehen von 100 DM noch am selben Tag mit 101 DM tilgt, hat einen unendlich hohen effektiven Zinssatz), sondern besagt lediglich: Mit keinem, noch so hohen, Zinssatz können die aufgezinsten Zahlungen des Darlehensnehmers von der des Darlehensgebers egalisiert werden. Ein solches Darlehen ist - von der Effektiv-Verzinsung her - recht ungünstig für den Darlehensnehmer.

Diese Überlegungen haben sich in der PAngV und den Ausführungshinweisen nicht niedergeschlagen. Man kann dies aus zwei Gründen rechtfertigen: Zum einen ist die Anwendung des Begriffs des effektiven Zinssatzes auf Geldgeschäfte vom Typ eines kompletten Bauspar-Vertrags (mit Anspar- und Tilgungs-Phase; sog. 'Ansparдarlehen') nicht üblich und nicht anerkannt, offensichtlich auch aus Scheu vor den nicht ganz trivialen mathematischen Überlegungen; zum anderen würden die Adressaten einer solchen Angabe den Wert $x_e = \infty$ i.a. nicht richtig interpretieren.

Formal hat man das Argument, daß Anspar- und Darlehens-Phase bei einem Bauspar-Vertrag weitgehend getrennt voneinander sind, daß ~~viele~~ manche Bausparer das Darlehen gar nicht in Anspruch nehmen und daß der ganze Verlauf, auch bei völlig 'normaler' Spar-Tätigkeit, nicht genügend genau vorausbestimmt werden kann, da die Wartezeiten bis zur Zuteilung bei Vertrags-Abschluß nicht vorauszusehen sind. - Dies trifft zwar alles zu; aber die Angabe des effektiven Zinssatzes mit etwa 5,7 % (für das Bauspar-Darlehen allein) verschleiert objektiv die Nachteile des Bausparens. Nicht umsonst haben sich unter allen Arten von Kreditinstituten i.w. allein die Bausparkassen zufrieden über die PAngV geäußert (s. z.B. die Stellungnahmen in der Zeitschrift "Der langfristige Kredit" 1985).

Auch wenn zwei Bauspar-Verträge beide einen effektiven Zinssatz von ∞ haben, so müssen sie nicht gleichwertig sein. Wie könnte man sie aneinander messen? Eine Möglichkeit wäre, sie beide - fiktiv - mit einem gleichartigen Darlehen vor-zufinanzieren; dabei erhält man ja einen 'normalen' effektiven Zinssatz, über den man die beiden Verträge vergleichen kann. Auch wer dem Begriff des effektiven Zinssatzes bei reinen Bauspar-Verträgen (wegen der Existenz- und Eindeutigkeits-Probleme) skeptisch gegenübersteht, kommt, auf Grund dieser Methode der fiktiven Vor-Finanzierung, nicht umhin zu erkennen, daß der effektive Zinssatz eines gewöhnlichen Darlehens sich durch dessen Kopplung mit einem Bauspar-Vertrag deutlich erhöht, daß Bausparen also teuer ist.

4. Weitere Nachteile des Bausparens

Ein weiterer Nachteil des Bausparens ist, daß das Darlehen mit recht hohen Raten in kurzer Zeit abgewickelt wird, so daß man auf Gesamt-Laufzeiten von etwa 20 Jahren (gegenüber Hypotheken mit etwa 30 Jahren) kommt. Freiheit von Schulden ist zwar für viele Bürger ein Ideal, das sie raschestmögich erreichen wollen; aber diese Strategie ist unökonomisch, besonders unter Beachtung der Inflation, wie Wille (1985) überzeugend dargelegt hat. Vorfinanzierte Bauspar-Verträge bringen zudem noch besonders hohe monatliche Belastungen in den ersten Jahren mit sich, gerade dann, wo man sein Geld für allerlei Anschaffungen, auch im Zusammenhang mit dem Hausbau, viel dringender braucht als in späteren Lebensaltern.

Für viele Bausparer (mich persönlich eingeschlossen) liegt der Vorteil des Bausparens in der Zinssatz-Sicherheit. Jedoch auch diese wird durch das Risiko langer Wartezeiten bis zur Zuteilung relativiert: So mancher Bausparer mußte Anfang der achtziger Jahre zusehen, wie sich diese Wartezeiten rapide von ca. 8 auf 10 Jahre und mehr verlängerten und die damals teuren Vor-Finanzierungen sich entsprechend in die Länge zogen!

Wie berechnen sich eigentlich diese Wartezeiten? Auf diese Frage muß man **vor** Inkrafttreten des Vergiß-Prinzips eingehen, oder man muß dieses Prinzip noch einmal aufheben, die Bauspar-Bedingungen hernehmen und die Entwicklung eines Kontos genau nachvollziehen. Da gibt es zahlreiche Details, durchweg zuungunsten des Bausparers: Abschlußgebühr, Darlehensgebühr, jährliche Kontogebühr, vierteljährliche Zins-Belastung, aber nur jährliche Zins-Gutschrift, Beginn der Verzinsung von Gutschriften nicht sofort ab Eingangs-Datum usw.

Diese müssen im Unterricht nicht im einzelnen analysiert, aber ihre Vielzahl sollte schon zur Kenntnis gebracht werden. Zur Ermittlung der Zahlungsreihe, und damit zur Vorbereitung des Vergiß-Prinzips, kann auch manche dieser Feinheiten übergangen werden. Insgesamt ist lediglich die Berechnung der Länge der Darlehens-Phase (in der SI) etwas anspruchsvoller. Aber diese Rechnungen lassen sich nicht vermeiden, wenn man, ausgehend von den Bauspar-Bedingungen, die Zahlungsreihe und dann den effektiven Zinssatz haben möchte.

Noch einmal: Wie ermittelt man nun die Wartezeit? Es genügt leider nicht, einfach den Zeitpunkt auszurechnen, an dem das Bauspar-Guthaben 40 % der Bauspar-Summe erreicht hat; denn der Zeitpunkt der Zuteilung hängt von den Mitteln ab, die die Bausparkasse zur Verfügung hat, im Vergleich zu den erworbenen Ansprüchen **aller** ihrer Kunden. Alle halbe Jahre wird eine Rangfolge aufgestellt, in der die Kunden Anspruch auf Zuteilung haben, und zwar werden nach einer bestimmten Regel (z.B. halbjährliche Kumulierung des Konto**standes** mit anschließender Division durch die Bauspar-Summe) Höhe und Frühzeitigkeit der Einzahlungen berücksichtigt; und diese Rangfolge wird dann nach Maßgabe der entsprechenden Mittel abgearbeitet.

Jede Bausparkasse hat in ihren Tarifen ein bestimmtes Niveau an Wartezeiten, und eigentlich nur an diesem bemißt sich ihre Qualität im Vergleich zu den Konkurrenz-Unternehmen. Der einzelne Bausparer kann zwar seine Wartezeit durch Sonderzahlungen oder durch den Übergang zu einem Tarif mit höheren Sparraten verkürzen, aber das Niveau seiner Bausparkasse hängt von deren Zahlungs-Ein- und Ausgängen ab, und diese wiederum sind ein Ergebnis der Geschäftspolitik (neu gegründete Bausparkassen haben i.a. sehr kurze Wartezeiten, da sie zunächst fast nur Zahlungs-Eingänge haben), aber auch der allgemeinen wirtschaftlichen Lage. Das Wartezeiten-Niveau der einzelnen Bausparkassen in der BRD ist wohlbekannt, aber nur für bereits zugeteilte Verträge; und Voraussagen für die Zukunft werden dem Kunden gegenüber grundsätzlich nicht gemacht, auch wenn die Kassen selbstredend sehr genaue realistische Vorstellungen darüber haben. Aus diesem Grund habe ich für das oben durchgerechnete Beispiel 10 Jahre angenommen, ein Wert, der mit der entsprechenden Sparrate von mancher Bausparkasse bequem erreicht wird.

5. Zur didaktischen Relevanz

Die hier mit ihren fachlichen Grundlagen erörterte Frage nach der Rentabilität des Bausparens ist ein **echtes** Beispiel für anwendungsorientierten Mathematik-Unterricht (in der SII): Zwar sind allerlei handfeste mathematische Sachverhalte wichtig, aber diese liefern nur **einen** Argumentations-Strang, der mit anderen, mindestens gleichberechtigten Strängen verknüpft ist und zu deren Erhellung wesentlich beiträgt.

Literatur

Bender, P.: Effektiver Zinssatz, Preisangabenverordnung, Anspardarlehen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1987

Hestermeyer, W.: Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten. In: Praxis der Mathematik 27, 129-145, 237-249 (1985)

Hestermeyer, W.: Wer mit Schulden leben will, muß rechnen können. In: mathematiklehren 20, 44-47 (1987)

Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik 4, 257-284 (1976)

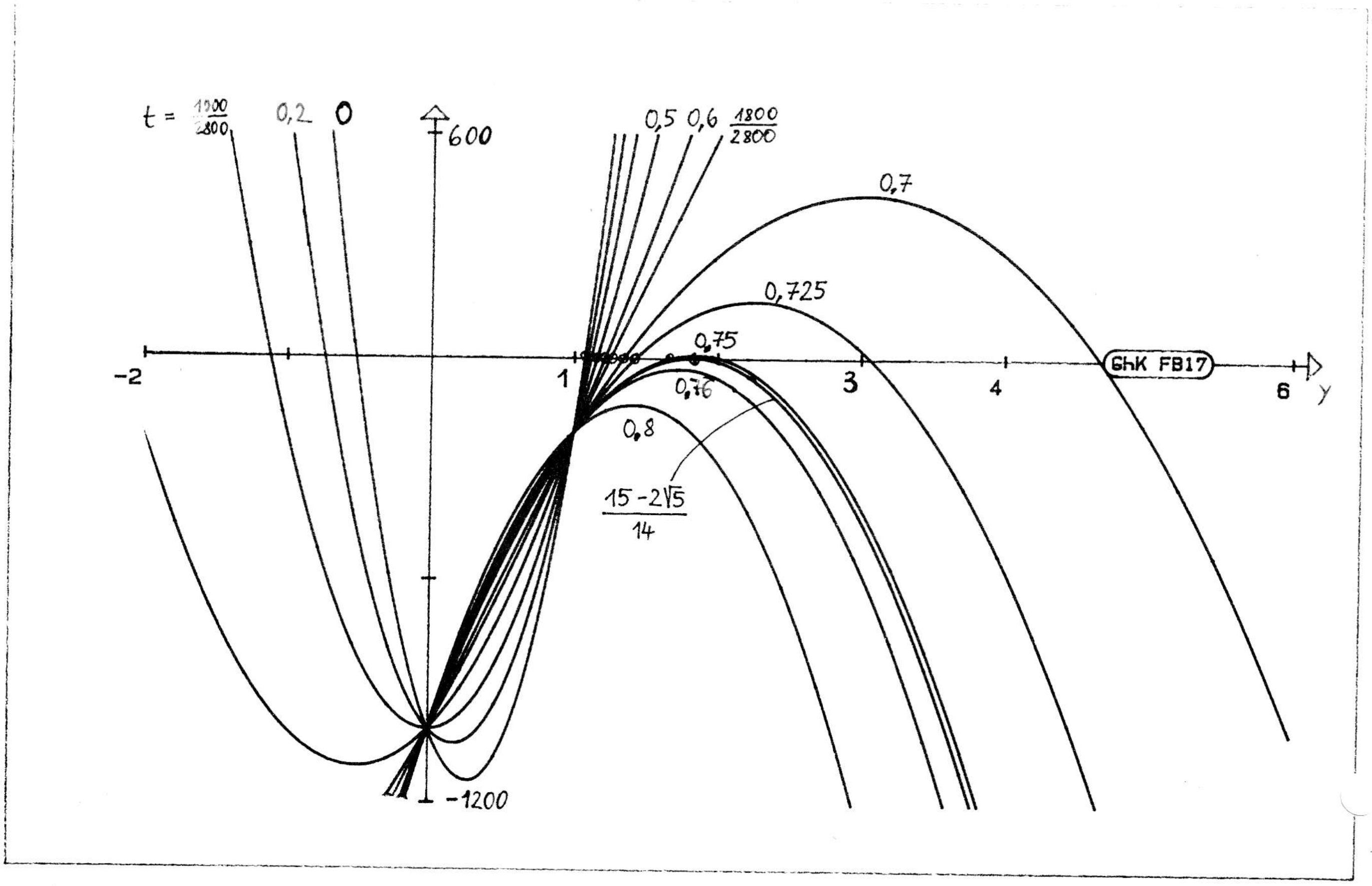
Wille, F.: Über den Einfluß der Geldentwertung auf Hypotheken. In: Mathematische Semesterberichte 32, 233-254 (1985)

Stellungnahmen und Anmerkungen zum "effektiven Jahreszins". In: Der langfristige Kredit 36, 734-737 (1985)

Eine populäre Einführung in das Bausparen findet man z.B. in: **Mehler**, H.A.: Ratgeber Geld. München: Heyne 1986

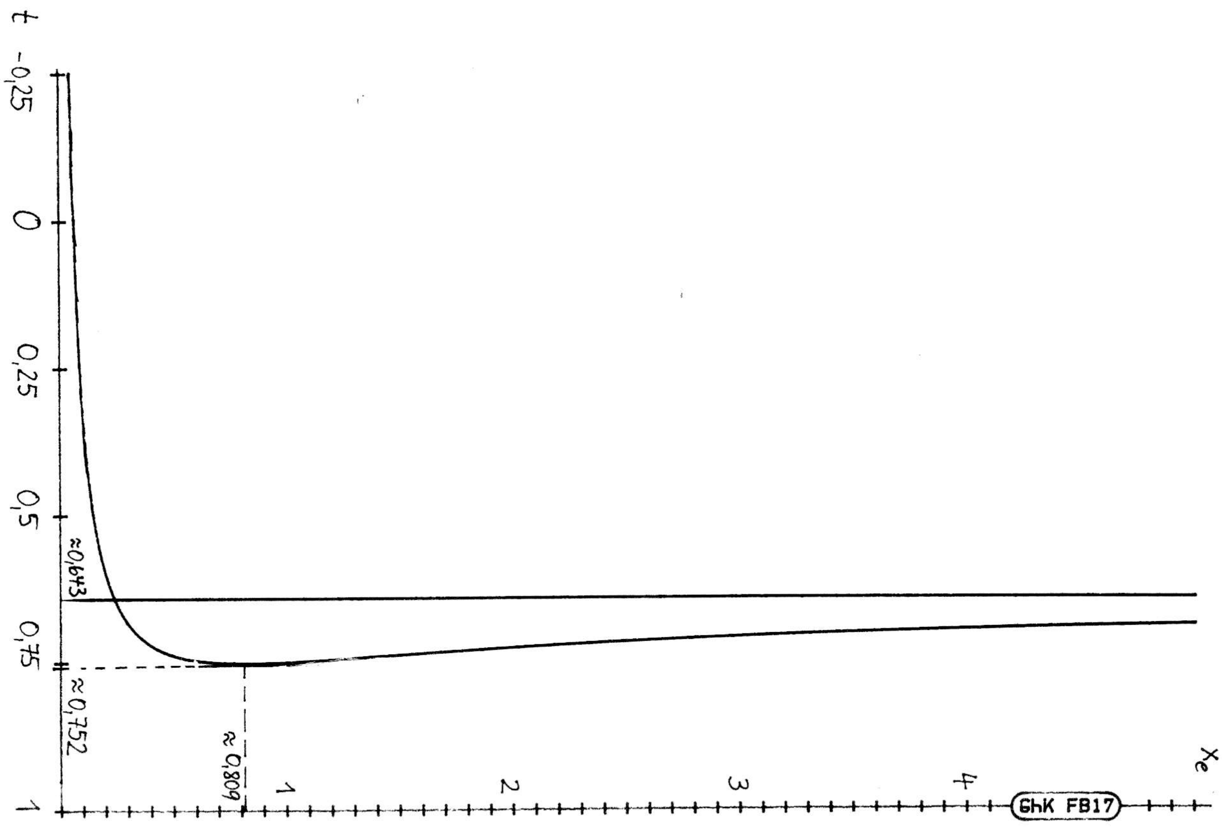
Die **Stiftung Warentest** hat vor einigen Jahren einen Vergleich zwischen den Tarifen der deutschen Bausparkassen durchgeführt in: test 18, Heft 8, 16-27, und Heft 9, 17-24 (1983). Das Vergleichsverfahren für den Fall monatlicher Sparbeiträge ist ausgesprochen umständlich, während im Fall der Sofort-Einzahlung der effektive Zinssatz i.w. in der Weise herangezogen wird, wie ich sie oben angegeben habe (bei Vor-Finanzierungen). Die Autoren bemerken zwar, daß ein Kredit durch das Bausparen teurer wird, sie regen jedoch an, dies in Kauf zu nehmen, und zwar wegen der Zinssatz-Sicherheit (Heft 9, S.21). Die Einführung in das Bausparen in Heft 8 ist knapp, aber instruktiv.

Betriebswirtschaftlich-mathematische Zusammenhänge (aus der Perspektive der Bausparkassen) werden dargestellt von: **Laux**, H.: Das erweiterte Tarifwerk der Bausparkassen in bauspartechnischer Sicht. In: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 16, 327-356 (1983/84); und in zahlreichen weiteren Aufsätzen dieses Autors in dieser Zeitschrift.



t = 1000/2800
0,2
0
600
0,5
0,6
1800/2800
0,7
0,725
0,75
0,76
0,8
15 - 2√5 / 14
-2
1
3
4
6
y
GhK FB17
-1200

Abb. 1



t
-0,25
0
0,25
0,5
≈0,643
0,75
≈0,752
≈0,809
1
2
3
4
x_e
GhK FB17

Abb. 2