In: Peter Bender (Hrsg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen 1988, 15-28

denen bestimmt noch wichtige Beiträge zur Mathematikdidaktik hervorgehen werden.
Heinrich Winter hat die Mathematikdidaktik erheblich bereichert und vorangebracht. Die in diesem Buch versammelten Autoren und darüber hinaus zahllose Kollegen, Hochschullehrer, Lehrer, Studenten, Angehörige der Schulbehörden, Verlagsmitarbeiter, haben von ihm persönlich und fachlich viel profitiert. Wir empfinden ein tiefes Gefühl der Verehrung und Dankbarkeit für unseren Lehrer und Mitstreiter und widmen ihm diesen Band zum 60. Geburtstag mit den herzlichsten Wünschen für ein langes, gesundes, sorgenfreies Leben mit der Familie und der Hoffnung auf ein weiteres fruchtbares mathematikdidaktisches Schaffen.

20. Juli 1988
Peter Bender

PETER BENDER, Kassel

Eine neue Untersuchung zur sachmathematischen Kompetenz von Viert- und Fünftkläßlern

Eine der vielfältigen Aktivitäten *Heinrich Winters* war die Betreuung des Arbeitskreises ‚Mathematik in der Grundschule' im Regierungsbezirk Arnsberg von 1971 bis 1986 (s. *Winter* 1987). Die gegenseitige Befruchtung von Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts in diesem Arbeitskreis zeigte sich nicht nur in einem bemerkenswerten didaktischen Reflexionsniveau aller Teilnehmer, sondern konkretisierte sich z.B. auch in den nordrhein-westfälischen Primarstufenlehrplänen von 1973 und 1985, an deren Erstellung Heinrich *Winter* prägend mitwirkte.
Ein anderes, wohl dokumentiertes, Produkt dieses Arbeitskreises sind die Untersuchungen zur sachmathematischen Kompetenz von Grundschülern am Ende des 4. Schuljahres. In den Jahren 1978, 1980, 1983, 1984 und 1985 haben auf Initiative des Arbeitskreises in dessen Einzugsbereich jeweils etwa 1000 Viertkläßler etwa ein Dutzend mathematische Sachaufgaben gelöst (s. *Bender* 1980, 1985a, 1985b). Diese Aufgaben wurden im Laufe der Jahre im wesentlichen von Heinrich *Winter* entwickelt. Er richtete sich dabei weniger nach etwaigen Belangen der Statistik, sondern fühlte sich zuerst inhaltlichen (didaktischen) Fragestellungen verpflichtet - damit seinem Grundsatz vom Primat genuiner Mathematikdidaktik treu bleibend. Noch bei einer scheinbar so trockenen Tätigkeit wie dem Entwickeln von Testbatterien zeigt sich seine unerschöpfliche Kreativität. Viele der Aufgaben sind neu, so daß nicht solche Schüler bevorzugt werden, bei denen ein bestimmtes Pensum schon behandelt ist. Der Anteil an Rechenfertigkeit ist gering gehalten, weil es ja nicht um diese, sondern um sachmathematische Kompetenz geht. Die meisten Aufgaben wären auch hervorragend als Stoff für einen Mathematikunterricht geeignet, der an Heinrich *Winters* Überlegungen zum sog. Sachrechnen (s. *Winter* 1976) ausgerichtet ist. Entsprechend hat er auch stets Wert darauf gelegt, vor der statistischen Analyse der Tests eine genaue didaktisch orientierte Sachanalyse der einzelnen Aufgaben durchzuführen und diese mit zu veröffentlichen.
Während es bei dem allerersten Test 1978 noch um eine Bestandsaufnahme ging („Was können unsere Schüler nun, nachdem sie vom 1.Schuljahr an komplett den reformierten Mathematikunterricht erlebt haben?"), hat sich der Schwerpunkt der Fragestellung mehr auf das Problem verlagert, *wie* die Schüler eine sprachlich gegebene, mathematikhaltige Sachsituation bearbeiten.

1. Allgemeine Bemerkungen zum Test

Da kommt man in Bereiche, wo der Aufgabencharakter schon auf der sprachlichen Ebene beginnt. Dies wirkt sich spätestens dann als Nachteil aus, wenn Schüler oder Lehrer den Test nicht mehr ernst nehmen, weil sie ihn nicht als zur

Mathematik gehörig empfinden. Dies konterkariert dann ein wenig die Ergebnisse, die ansonsten eine recht hohe Aussagekraft für die Verhältnisse in der ganzen Bundesrepublik haben. Die Schullandschaft im Regierungsbezirk Arnsberg ist nämlich weitgehend repräsentativ für die der BRD; und dasselbe gilt für die Auswahl der Klassen, die am Test teilgenommen haben. Hinzu kommt, daß die Testpopulation mit 939 ziemlich groß ist und die Zufälligkeit der Auswahl gewährleistet zu sein scheint, weil es sich bei den teilnehmenden Klassen in der Mehrzahl nicht um solche von Mitgliedern des Arbeitskreises handelte. Neu war diesmal, daß etwa ein Drittel der Testteilnehmer Fünftkläßler aus Hauptschule, Realschule und Gymnasium waren, allerdings aus ganz wenigen Schulen.

Im Anhang ist der Test vollständig abgedruckt. Dabei sind die (von uns so gesehenen) richtigen Antworten angekreuzt. Zu dieser Festlegung von ‚richtig' und ‚falsch' kann man auch anderer Meinung sein, insbesondere wenn man einen formalen Standpunkt einnimmt (den ich allerdings in Anbetracht der Schülerpopulation und des Themas nicht für angemessen halte):

In Aufgabe 5 ist z.B. auch Rechenweg B richtig, wenn man die Kenntnis negativer Zahlen und die Fähigkeit zu entsprechenden Interpretation von Zahlungsforderung und -verbindlichkeit voraussetzen kann. Diese Voraussetzung ist bei Viert- und Fünftkläßlern allerdings nicht gegeben; vielmehr ist dort davon auszugehen, daß, wenn B angekreuzt wird, stillschweigend Minuend und Subtrahend vertauscht werden und damit der Rechenweg doch nicht richtig wiedergegeben ist. Daß die Entscheidung für B bestimmt kein Anzeichen besonders souveränen Verhaltens ist, zeigt sich daran, daß nur etwa ein Viertel der 331 Schüler, die sich für B entscheiden, dann konsequent die Kombination A-B-D wählen.

Der Text von Aufgabe 3 läßt die Möglichkeit offen, daß der Treffpunkt *doch* nach räumlichen Kriterien festgelegt ist und C nicht richtig sein muß. - Bei dieser Interpretation dürfte dann keine der Antworten angekreuzt werden, weil ja über den genauen Ort des Treffens immer noch nichts ausgesagt ist. Nur wenige Schüler (1,5%) haben bei dieser Aufgabe tatsächlich nichts angekreuzt, und diese gehören (bis auf einen mit 9 Punkten) auch noch zu den schwächeren (Durchschnitt 2,38), so daß es (bis auf den einen) zweifelhaft ist, ob sie ihre Entscheidung aufgrund dieser doch recht raffinierten Überlegung getroffen haben.

Was heißt „normalerweise" und „erwachsen" (in Aufgabe 1)? Ist jeder Mehl-Typ feinkörniger als jeder Zucker-Typ (Aufgabe 4)? Wenn man (in Aufgabe 6) 15 Wahlmöglichkeiten hat, dann hat man auch 5, 6 und 10 Wahlmöglichkeiten. Diese und noch ferner liegende Spitzfindigkeiten (wie sie zu Zeiten der Mengen-Euphorie im Mathematikunterricht durchaus vorkamen) werden von den Schülern offensichtlich durchweg nicht in Betracht gezogen.

Die Durchschnittszahl vollständig richtig gelöster Aufgaben beträgt 2,67 (von 10) und würde ohne die sehr leichte Aufgabe 1 mit ihren 0,89 Punkten noch niedriger liegen. 7 und mehr Punkte erzielten nur 27 Schüler (2,9 %); insgesamt ist die Verteilung bei allen wesentlichen Teilstichproben linkssteil.

Für dieses ‚schlechte' Ergebnis sind zwei Ursachen in der Anlage des Tests auszumachen: Um den Einfluß von Mutmaßungen und zufälligen Ankreuzungen zu verringern, haben wir die Eindeutigkeit der richtigen Antworten aufgehoben und dadurch die Aufgaben erheblich erschwert. Da außerdem so gut wie nichts zu

‚rechnen' (im herkömmlichen Sinn) ist, scheinen manche Schüler den Eindruck von Rätseln zu haben und ihren Ehrgeiz in eine rasche Erledigung des Tests zu legen (wie aus einigen Klassen berichtet wurde). Allerdings wird das Bearbeitungsprinzip (bei jeder Aufgabe sind 0, 1 oder mehr Antworten möglich) durchweg richtig verstanden: Nur 45 Schüler (4,8%) kreuzen bei jeder Aufgabe genau 1 Antwort an, darunter sind jedoch immerhin 11 Hauptschüler (18%). (Natürlich steht keineswegs fest, daß bei diesen Schülern tatsächlich ein Irrtum vorliegt.)

2. Zu den Aufgaben im einzelnen

Die Hälfte der Aufgaben (nämlich 1, 2, 5, 6, 7) sind Wiederholungen aus älteren Tests mit leicht veränderten Formulierungen bei den Fragen bzw. Antwortmöglichkeiten. Diese Änderungen sollten der Deutlichkeit dienen, die Situationen klarer darstellen und Mißverständnisse ausräumen. Für die didaktische Analyse dieser Aufgaben verweise ich auf (*Bender* 1985a, b).

Aufgabe 1: Früher war nach dem Gewicht eines Mannes mit entsprechend geänderten Größen (75 kg statt 60 kg und weitere leichte Änderungen) gefragt. Während die Mädchen 1983 (auf dem 1%-Niveau signifikant) schlechter abschnitten, sind sie nun leicht besser.

Aufgabe 2: Antwort C erscheint nun mit 26% wesentlich häufiger als 1983 und 1984 die entsprechenden (9% bzw. 11%). Dies führe ich auf die neu eingefügte Erläuterung „die genauen Geburtstage wissen wir nicht" zurück.

Aufgabe 5: Hier haben die Änderungen keine bemerkenswerte Auswirkungen mit sich gebracht.

Aufgabe 6: Die 28% richtigen Lösungen (gegenüber 18% bzw. 21% früher) sind m.E. vor allem darauf zurückzuführen, daß in der Erläuterung zur Aufgabe diesmal über die verbale Aufzählung von Kombinationsmöglichkeiten hinaus auch noch eine übersichtliche Notation (ES, VV, ...) angeboten ist.

Aufgabe 7: Hier hat offenbar die Aufforderung „stelle dir bei jeder Zeichnung vor, du würdest den Karton wieder zusammenfalten" gewirkt. Das richtige Netz wird nun von 43% angekreuzt (gegenüber früher 29% bzw. 22%).

Nun zu den 5 neuen Aufgaben: Bei den Aufgaben 3 und 4 sind jeweils zwei Größenbereiche miteinander in Bezug zu setzen, was ja begrifflich mit Hilfe von abgeleiteten Größenbereichen (Geschwindigkeit bei Länge und Zeit bzw. spezifisches Gewicht bei Gewicht und Volumen) geleistet wird. Allerdings ist diese Begrifflichkeit bei den Probanden noch recht naiv ausgebildet (was jedoch für den Test ausreicht). - Aufgabe 8 stellt einen Vorstoß in die euklidische Geometrie der Ebene dar, natürlich auch auf allereinfachstem Niveau. - Bei all diesen Aufgaben hätten (leicht anzufertigende) Skizzen eine erhebliche Hilfe bedeutet; solche Skizzen wurden aber - so weit erkennbar - durchweg nicht verwendet (der Test sah das ja auch gar nicht vor). - Aufgabe 9 befaßt sich mit dem Wahrscheinlichkeits-, Aufgabe 10 mit dem Verhältnisbegriff.

Aufgabe 3: Der Witz der Fragestellung liegt darin, daß für die Wahl des Treffpunkts nicht, wie gewöhnlich, die räumliche, sondern die zeitliche Abstandsgleichheit herangezogen ist (ein prominentes analoges Beispiel ist die unterschiedliche Angabe des Benzinverbrauchs von Autos in Europa als Menge (in l) pro Entfernungseinheit (100 km) und in USA als Reichweite (in Meilen) pro Mengeneinheit (in Gallonen)). Es kommen also nur die Antworten B und C in Frage, und in der Tat entscheiden sich 56% richtig für C. Jedoch scheint die Antwort A so stark an Alltagssituationen anzuschließen (in denen ja die räumliche Abstandsgleichheit gewöhnlich dominiert), daß sich insgesamt 71% für sie entscheiden, und zwar sogar 61% derjenigen, die auch C wählen, obwohl A und C sich offensichtlich widersprechen. Ein Kurzschluß wäre allerdings, diesen Schülern Unvermögen im logischen Denken zu unterstellen. Ich vertrete vielmehr die These, daß diese die beiden Formulierungen gar nicht auf Verträglichkeit geprüft haben.

Aufgabe 4: Hier liegt dieselbe Problematik wie bei Aufgabe 3 vor, nun jedoch im Größenbereich des spezifischen Gewichts: Ist dieses bei einem Stoff höher als bei einem anderen, dann nimmt dieser Stoff bei gleichem Gewicht ein kleineres Volumen ein, oder er hat bei gleichem Volumen ein größeres Gewicht. Im Vergleich zu Aufgabe 3 entstammt die Sachsituation nun einem stärker mathematisch elaborierten Bereich der Lebenswelt der Schüler. Dies führt dazu, daß die Schüler mehr ‚aufpassen' und bei B, C und D hohe Quoten richtiger Antworten erzielen. Verdorben wird das Ergebnis durch Antwort A, die sogar von 23% als einzige angekreuzt wird. Der Beweggrund dafür dürfte häufig darin liegen, daß ja sonst überhaupt kein Kreuz zu machen gewesen wäre und der Begriff der Feinkörnigkeit vielen Schülern nicht klar ist (wie explizit aus einigen Klassen berichtet wurde): Hat Mehl überhaupt eine Körnigkeit? Oder sind etwaige Klumpen gemeint? Wie verhält es sich bei Puderzucker? - Antwort A erweist sich als ungeeignet für den Test.

Aufgabe 8: In der Sprache der Geometrie formuliert, geht es um die dritte Seitenlänge eines Dreiecks bei Vorgabe der beiden anderen. Im Mathematikunterricht kommen gewöhnlich nur Aufgaben vor, wo zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte bestimmt werden muß (durch Addition, Subtraktion o.ä.). Ein Charakteristikum genuiner Sachmathematik ist dagegen, daß sich auch andere Lösungsmengen ergeben, wie hier ein Intervall. - Die angemessene Modellierung der Situation sind zwei Kreise um die Schule mit Radien 450 m und 500 m als Ortslinien für die beiden Wohnungen. Es ergeben sich unmittelbar die Intervallunter- und -obergrenzen 50 m und 950 m, jedenfalls wenn man keine axiomatischen Skrupel hat, und dann sind A und C offensichtlich richtig. - Die häufige Wahl von B (70%) ist m.E. eine direkte Folge der üblichen Dominanz von Eindeutigkeit. Für 44% dieser Schüler impliziert ihre Wahl (mit Recht) die von E, und umgekehrt wählen 87% derer, die E wählen, konsequenterweise auch B. - Das Überwiegen von Antwort D schließlich ist auf den Fragesatz „Was kannst du daraus schließen?" zurückzuführen, der

von den Schülern anscheinend nicht im mathematischen, sondern im umgangssprachlichen Sinn interpretiert wird. Es ist dann nur konsequent, daß die B-E-Schüler sich (auf dem 0,1%-Niveau) signifikant häufiger für D entscheiden als die A-C-Schüler. Die Fehlüberlegung, daß ein räumlich kürzerer Schulweg auch zeitlich kürzer sei, wie die gesamte Entscheidung für B und/oder E, rührt auch von der unterschwelligen Annahme, daß die beiden Kinder in derselben Richtung von der Schule aus wohnen.

Aufgabe 9: Diese ersetzt frühere Aufgaben zum Verständnis der Schüler von Wahrscheinlichkeit; und zwar ist die Situation nun stärker mathematisch elaboriert. Dennoch wurden die Antworten A und D noch recht häufig gewählt. M.E. läßt sich daraus aber nicht nur auf (mythische) Fehlvorstellungen über die (mathematische) Wahrscheinlichkeit schließen. Man muß auch in Betracht ziehen, daß diese Schüler die vorgelegte Situation nicht mit Hilfe der Gleichverteilung modellieren, sondern sich vielleicht zutrauen, etwa beim Fadenziehen mit etwas Geschick dem Erfolg nachzuhelfen. - Bei Antwort B wurde möglicherweise überlesen, daß hier nach dem Verlieren gefragt ist. Das Wort „verliert" hätte man günstigerweise unterstrichen.

Aufgabe 10: Hier handelt es sich um folgenden Inhalt: Ergänzt man eine Netto-Größe um ein Tara zu einer Brutto-Größe, dann ist das Verhältnis von Tara zu Netto größer als das von Tara zu Brutto. Dieser Sachverhalt wird insbesondere in der Prozentrechnung bedeutsam und ist den Schülern hier in einer sehr einfachen Form vorgelegt. Die ersten drei Antworten sind lediglich verschiedene Fassungen ein- und derselben Aussage, und eine Erschwerung für die Schüler besteht darin, daß alle vier Antwortmöglichkeiten anzukreuzen sind.

Es fallen bei diesem Test (wie auch schon bei den früheren) folgende Gesichtspunkte auf:

- *Im Mathematikunterricht scheinen nach wie vor zu wenige Aufgaben behandelt zu werden, die nicht genau eine Zahl als Lösung haben.*
- *Scheinbare Kleinigkeiten in der sprachlichen oder grafischen Gestaltung können sich (statistisch) stark auf das Löseverhalten auswirken.*
- *Schüler haben Probleme mit Wendungen wie „es kann sein, daß ..." oder „ist mit Sicherheit richtig".*
- *Vertraute Sachverhalte schieben sich vor einen Aufgabentext, wenn die beschriebene (ungewohnte) Situation nicht klar genug ist.*
- *Unvorbereitet dargebotene SI-Inhalte machen Schwierigkeiten.*
- *Im Rahmen der Sachmathematik lassen die ausgefeiltesten Formulierungen immer noch Spielraum für Interpretationen.*

Dies alles weist darauf hin, daß eine grundsätzliche Kluft zwischen Sache und Mathematik besteht, die insbesondere nicht dadurch überwunden werden kann, daß man die Mehrdeutigkeiten der Lebenswelt einfach ausblendet.

3. Unterschiede bei Schulformen, Nationalitäten und Geschlechtern

Die Testergebnisse wurden nach zahlreichen Merkmalen ausgewertet, von denen hier nur die wichtigsten besprochen werden sollen: Schulform, Nationalität und Geschlecht. Besonders bei der Schulform ist zu berücksichtigen, daß neben 32 Grundschul- nur 4 Hauptschul-, 6 Realschul- und 4 Gymnasialklassen mit 625, 62, 153 bzw. 99 Schülern beteiligt sind. Überhaupt ist zu beachten, daß nur ein sehr kleiner Ausschnitt aus dem Mathematikunterricht, und zwar ein auch noch üblicherweise vernachlässigter, abgeprüft wird.

Schulform: Die Gymnasiasten sind signifikant besser als die Grundschüler; diese sind besser als die Realschüler und diese wiederum signifikant besser als die Hauptschüler. Spitzenleute (7 und mehr Punkte) befinden sich nur in der Grundschule (3,2%) und im Gymnasium (7,1%; das sind 2,2% der SI-Schüler). Hier reproduziert sich das viel beklagte enorme Leistungsgefälle zwischen den Schulformen im SI-Bereich. Bemerkenswert ist das schwache Abschneiden der Realschule im Vergleich zur Grundschule. Dieses liegt zwar im wesentlichen daran, daß ihr die Spitzenleute fehlen, die die Grundschule noch hat und die offenbar alle potentielle Gymnasiasten sind. Man erwartet aber, daß die um 25% längere Schulzeit stärker zu Buche schlägt, und zwar nicht, weil dabei mehr Stoff behandelt wird (da ja die Aufgaben im Prinzip voraussetzungslos zu lösen sind), sondern in Form eines allgemeinen kognitiven Fortschritts.
Die Hauptschüler können nur bei den Aufgaben 1 und 4 mithalten, wo es um den Größenbereich ‚Gewicht' in sehr einfachen Situationen geht. Sie sind insgesamt zurückhaltender im Setzen von Kreuzen (11,6 bei 14,0 der Gesamtpopulation und 17 Richtigen).

Nationalität: Die erheblichen Unterschiede in früheren Tests sind zusammengeschrumpft. In einer einzigen Aufgabe (und in der Gesamtpunktzahl) sind die deutschen Kinder diesmal signifikant (jedoch nur auf dem 5%-Niveau) besser als die ausländischen. Die (naheliegende) Erklärung, daß der Test durch die Mehrfach-Antworten nun auch für die deutschen Kinder schwer geworden sei, greift deswegen nicht, weil sich auch bei der Auswertung der 46 einzelnen Antworten nur geringe Unterschiede ergeben. Deutet sich hier eine zunehmende Integration der Ausländer an?
Dies scheint zumindest für die ausländischen Mädchen zu gelten, die - entgegen den Verhältnissen bei den Deutschen - besser als die ausländischen Jungen (2,60 gegenüber 2,30) und, man staune, etwa so gut wie die deutschen Mädchen sind (man beachte jedoch die geringe Zahl 50 der beteiligten Ausländerinnen). In der Grundschule ist dieses Phänomen noch stärker ausgeprägt: Der Durchschnitt der 40 ausländischen Mädchen ist 2,58, der der deutschen Mädchen nur 2,42; allerdings liegt wegen der kleinen Zahl der Ausländerinnen immer noch nicht Signifikanz vor.
Deutliche Schwächen haben die ausländischen Kinder bei den Aufgaben 2 und 8. In beiden kommen sprachlich schwierige Wendungen vor, die von ausländischen

Kindern offenbar schlechter verstanden werden. Eine Cluster-Analyse hat gezeigt, daß diese beiden Aufgaben nicht nur bei den Ausländern, sondern auch bei der Gesamtpopulation am ähnlichsten sind, insbesondere die richtigen Antworten 2A, C, D, 8A und C. - Ausländer neigen eher dazu, bei Aufgabe 6 die fünf Eissorten als die Wahlmöglichkeiten aufzufassen – einer ihrer traditionellen Fehler. Auch ihre ausgeprägtere Entscheidung in Aufgabe 9 für das Würfeln als das gewinnträchtigste Glücksspiel paßt zu früher diagnostiziertem Verhalten: Wo sich nicht gleich ein Ansatzpunkt zeigt, neigen sie eher zum Raten und wählen dann eine Möglichkeit, die ihnen in irgendeiner Weise vertraut erscheint.

Geschlecht: Wie in allen bisherigen Tests schneiden die Mädchen im Gesamtergebnis, in mehreren Einzelaufgaben (2, 7, 10) und darüber hinaus bei einigen Einzelantworten (besonders in den Aufgaben 8 und 9) signifikant schlechter ab. Unter den 27 Spitzenleuten befinden sich nur 10 Mädchen (37%), unter den 9 Schülern mit mehr als 7 Punkten nur noch 1 Mädchen (11%), unter den Schülern mit 9 Punkten kein Mädchen (0%). Bei den deutschen Schülern allein ist der Leistungsunterschied zwischen Jungen und Mädchen noch größer (2,83 gegenüber 2,59), und in der Grundschule ist bei den Deutschen dieser Unterschied sogar auf dem 1%-Niveau signifikant (2,84 gegenüber 2,42).
Die in der Literatur vertretene These, daß die Mathematikleistungen bei Jungen und Mädchen erst nach der Pubertät auseinanderklaffen, wird hier *nicht* bestätigt. Es mag sein, daß sich bei Tests, die sich eng an den behandelten Stoff anlehnen und nicht allzu schwierig sind (insbesondere einfache Aufgaben zur Rechenfertigkeit enthalten), wie sie eher in der Primarstufe vorkommen, kaum Unterschiede zeigen. Wenn jedoch die Fragen unkonventionell sind und damit eher (pauschal ausgedrückt) Problemlöse-Fähigkeit abgeprüft wird, treten Unterschiede auch schon im Alter von 10 bis 11 Jahren auf.
Beachtet werden muß natürlich, daß die Mädchen nicht von vorneherein durch die Art der Fragen benachteiligt sind, d.h. z.B. zunächst ganz vordergründig, daß die auftretenden Personen, besonders in qualifizierten Stellungen, nicht überwiegend oder gar ausschließlich männlich sind oder auch daß die entworfenen Situationen nicht vorwiegend der Lebenswelt der Jungen entstammen. Die These, daß solche Gesichtspunkte tatsächlich eine Rolle spielen, wird z.B. von dem Ergebnis von Aufgabe 1 im Vergleich zu dem in früheren Tests gestützt (s. Abschnitt 2). Man könnte sogar noch radikaler vermuten, daß die Bevorzugung der Jungen schon dadurch stattfindet, daß der Test überhaupt von Männern entwickelt wurde (auch wenn diese sich, wie hier geschehen, um ‚Neutralität' bemühen). Die Ergebnisse des Tests halte ich dennoch nicht für beliebig; sie lassen vielmehr Rückschlüsse auf geschlechtsspezifische Unterschiede zumindest in der real existierenden (meinetwegen von Männern beherrscht zu nennenden) Gesellschaft zu.
Dies gilt insbesondere für die wohlbekannte These, daß Frauen ein schlechteres Raumanschauungsvermögen haben. Der Test bestätigt diese: Er enthält zwei Aufgaben genuin geometrischen Inhalts (Aufgaben 8 und 7). Bei beiden kreuzen die Mädchen die richtigen Antworten (7A, 8A, 8C) signifikant seltener an als die Jungen. Diese Leistungsunterschiede führe ich auf Unterschiede in der Sozialisation zurück: Jungen werden i.a. intensiver mit räumlichen Sachverhalten kon-

frontiert, sie lernen eher in mehr oder weniger spielerischer Form die geometrische Funktionsweise von allerlei Geräten und Konstruktionen kennen, und dies wird den Kindern auch von den Erwachsenen durchweg als der männlichen Rolle zugehörig vorgeführt. Hier hätte ein umwelterschließender Geometrieunterricht eine grundlegende kompensatorische Aufgabe.

Literatur

Bender, Peter (1980): Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 8, 150–155, 191–198, 226–233

Bender, Peter (1985a): Zum mathematischen Alltagswissen unserer (deutschen und ausländischen) Kinder am Ende der Grundschulzeit. In: Mathematische Unterrichtspraxis 6, Heft 2, 19–31

Bender, Peter (1985b): Zur sachmathematischen Kompetenz der Viertkläßler. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1985, Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 63–66

Winter, Heinrich (1976): Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 4, 337–353

Winter, Heinrich (1987): Eine langjährige Zusammenarbeit mit Grundschullehrern – Reminiszenzen und Reflexionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19, 68–71

Anhang: Auszug aus den Testergebnissen

In der folgenden Tabelle enthalten die Spalten nacheinander die Zahl der Teilnehmer, die Durchschnittszahl richtiger Lösungen ganzer Aufgaben, dann für jede Aufgabe, sowie für jede ihrer Antworten nacheinander der Anteil richtiger Lösungen. Signifikante Unterschiede auf dem 5%-Niveau sind mit ‚*' und solche auf dem 1%-Niveau mit ‚**' gekennzeichnet. Dabei sind gegeneinander getestet: Deutsche/Ausländer, Mädchen/Jungen, Grundschule/Realschule, SI/Grundschule, Hauptschule/Grundschule, Realschule/Hauptschule und Gymnasium/Realschule; und die Markierung erfolgt bei den ersten beiden Paaren jeweils beim höheren Wert und bei den anderen fünf jeweils beim erstgenannten, auch wenn dieser niedriger ist. Es wurde der Rang-Test nach *Wilcoxon* verwendet, und zwar durchweg einseitig.

	Alle	Deut	Ausl	Mäd	Jung	Grund	Sek I	Haupt	Real	Gymnas
N	939	837	94	467	468	625	314	62	153	99
%	100	89	10	50	50	67	33	7	16	11
x̄	2,67	*2,71	2,46	2,58	*2,76	2,61	*2,81	**1,71	**2,50	**3,97
1.	89	90	88	90	89	88	91	90	86	*100
A	99	100	98	99	100	99	100	98	100	100
B	99	99	100	99	100	99	99	100	97	100
C	99	99	99	99	99	99	99	95	99	100
Dx	93	93	93	93	93	91	94	92	94	100
E	99	99	99	99	99	99	99	98	99	100
F	94	94	94	94	93	92	96	98	93	100
2.	12	*13	4,3	8,8	*15	11	14	1,6	6,5	**32
Ax	87	88	83	87	87	87	87	*74	85	*97
B	62	63	57	*65	59	*63	59	*48	55	*72
Cx	26	27	21	22	*29	26	26	**6,5	*24	**41
Dx	31	**33	16	27	*35	*28	*37	**3,2	**37	**59
3.	19	20	16	20	19	18	22	18	22	25
A	29	29	29	28	29	28	32	29	32	32
B	88	89	84	90	87	88	89	94	86	93
Cx	56	*57	45	55	57	*54	*61	**27	**63	*78
D	94	95	91	94	94	94	96	97	93	100
4.	27	28	27	27	28	26	30	29	28	33
A	66	66	70	65	68	*64	*70	68	71	71
B	87	*88	80	87	88	85	*91	94	87	*97
C	76	76	81	77	75	76	75	82	73	74
D	79	79	71	79	78	79	77	79	78	75
5.	28	28	27	27	28	28	27	**8,1	*23	**46
Ax	55	56	50	57	54	53	*59	*40	50	**85
B	65	64	69	67	63	65	63	63	63	65
C	83	83	80	85	81	**85	*78	94	**71	80
Dx	57	57	55	55	59	*57	56	**27	**50	**84
E	89	90	89	90	89	88	92	85	92	96
6.	27	27	28	29	25	27	28	*9,7	*21	**50
A	88	*90	77	89	88	*86	*93	*74	**95	100
B	79	79	82	81	77	*79	80	77	68	**100
C	87	86	*96	89	86	90	*82	*73	84	86
D	97	96	98	97	96	96	97	95	97	99
Ex	28	28	28	29	26	28	28	*9,7	*22	**50
F	77	77	82	76	79	78	76	*94	*74	69

	Alle	Deut	Ausl	Mäd	Jung	Grund	Sek I	Haupt	Real	Gymnas
N	939	837	94	467	468	625	314	62	153	99
%	100	89	10	50	50	67	33	7	16	11
$\bar{x}$	2,67	*2,71	2,46	2,58	*2,76	2,61	*2,81	**1,71	**2,50	**3,97
7.	36	36	34	32	*39	35	37	**13	**36	**55
Ax	43	43	41	40	*46	42	46	**16	**48	*63
B	88	88	93	90	87	88	89	84	89	92
C	76	76	73	75	78	77	75	**53	**76	*87
D	88	88	93	89	87	88	87	84	86	91
8.	1,7	1,9	0,0	1,3	2,1	1,8	1,6	0,0	2,0	2,0
Ax	12	*13	4,3	9,0	*15	11	14	*0,0	11	*27
B	30	*31	22	28	32	28	*34	*11	**32	**51
Cx	16	16	12	10	**22	16	17	6,5	12	**31
D	27	27	30	28	27	27	28	**56	**22	19
E	64	65	60	66	63	*65	64	61	57	**76
9.	17	17	15	15	19	16	18	*1,6	*14	**33
A	78	77	79	74	*81	*75	*82	71	*82	88
Bx	29	29	32	30	29	29	31	*15	*33	38
Cx	65	66	62	64	67	64	68	56	65	*80
D	83	*85	70	80	*86	82	84	82	81	*92
10.	11	11	7,4	8,1	*13	10	12	*0,0	11	*21
Ax	27	28	22	24	*31	27	28	*15	*28	36
Bx	41	41	37	40	42	41	40	*26	*43	43
Cx	30	30	28	26	*34	27	*36	*16	*33	**52
Dx	77	*78	69	77	77	76	78	*65	*76	*90

Klassenarbeit <u>S a c h r e c h n e n</u>

Fülle bitte aus, oder kreuze das Richtige an.

Datum: .... Ort: ....

Schule: .... Klasse: .....

Mädchen? ○ Junge? ○

Deutsches Kind? ○ Ausländisches Kind? ○

Alter: ... Jahre und ... Monate. Letzte Zeugnisnote in Mathematik .... Lieblingsfächer: 1............. 2...............

Die folgenden Aufgaben sind ganz anders, als die Textaufgaben, die du sonst lösen mußt. Du brauchst hier fast gar nichts zu rechnen. Es kommt aber darauf an, daß du den Text richtig verstehst. Lies also gründlich durch, und überlege dann, welche der angegebenen Antwortsätze du für richtig hältst. Bei manchen Aufgaben sind mehrere Antwortsätze richtig, bei anderen ist nur einer richtig, bei wieder anderen Aufgaben ist keiner der Antwortsätze richtig. Kreuze bei jeder Aufgabe diejenigen Antwortsätze an, die du für richtig hältst.

1. Wie schwer etwa ist normalerweise eine erwachsene Frau? 89

10 kg ○ 99	1 t ○ 99	1000 g ○ 99
60 kg ⊗ 93	2 dz ○ 99	70 Pfund ○ 94

2. Anja wurde im Jahre 1975 geboren und Dieter im Jahre 1976. Die genauen Geburtstage wissen wir nicht. Welche Feststellungen sind dann sicher richtig? 12 j d
   - Anja ist älter als Dieter. ⊗ 87
   - Anja ist genau 12 Monate älter als Dieter. ○ 62 m
   - Anja könnte 20 Monate älter als Dieter sein. ⊗ 26 j
   - Anja könnte 1 Tag älter als Dieter sein. ⊗ 31 j dd

3. Birgit wohnt am einen Ende der Grünstraße, und Katja wohnt am anderen, am entgegengesetzten Ende. Sie wollen sich heute auf der Straße treffen. Sie gehen genau zur selben Zeit von zu Hause los und aufeinander zu, bis sie sich treffen. Birgit geht schneller als Katja.
Was ist dann auf jeden Fall richtig? 19

- Birgit ist etwas früher am Treffpunkt als Katja. ○ 29
- Wenn sich die beiden treffen, ist Birgit ein kürzeres Stück gegangen als Katja. ○ 88
- Wenn sie sich treffen, sind sie näher an Katjas Wohnung als an Birgits Wohnung. ⊗ 56d
- Birgit ist etwas größer als Katja. ○ 94

4. Auf dem Küchentisch stehen ein volles Paket Zucker und ein volles Paket Mehl. Der Inhalt jedes der beiden Pakete wiegt 1 kg. Das Paket Mehl ist größer als das Paket Zucker, es nimmt mehr Raum ein.
Was ist dann auf jeden Fall richtig? 27

- Zucker ist feinkörniger als Mehl. ○ 66
- 1 kg Zucker ist schwerer als 1 kg Mehl. ○ 87d
- Ein Becher voll Mehl ist schwerer als derselbe Becher voll Zucker. ○ 76
- Würde man den Zucker des Pakets in ein großes Glas schütten und das Mehl in ein anderes Glas derselben Form und Größe, so stünde der Zucker höher als das Mehl. ○ 79

5. Inge kauft im Bäckerladen 6 Brötchen, das Stück zu 20 Pf, und 1 Brot, das 1,90 DM kostet. Sie zahlt mit einem 5-DM-Stück und möchte selbst ausrechnen, wieviel Geld sie zurückerhält.
Kreuze die richtigen Rechenwege an. 28

- 5 DM - 6 • 0,20 DM - 1,90 DM ⊗ 55
- 6 • 0,20 DM + 1,90 DM - 5 DM ○ 65
- 5 DM - 6 • 0,20 DM + 1,90 DM ○ 83
- 5 DM - 1,90 DM - 6 • 0,20 DM ⊗ 57
- 5 DM - 0,20 DM - 1,90 DM ○ 89

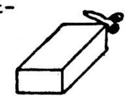
6. Du willst eine kleine Eisportion aus 2 Bällchen kaufen. Der Eismann hat 5 Sorten: Erdbeer (E), Brombeer (B), Vanille (V), Zitrone (Z), Schokolade (S). Da hast du viele Wahlmöglichkeiten, z. B.

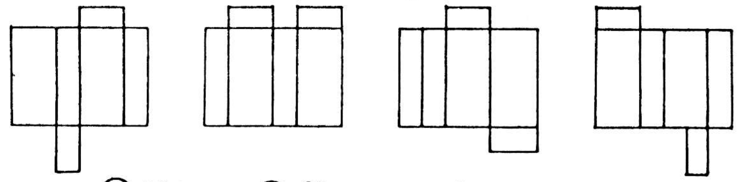
E S 1 Bällchen Erdbeer mit 1 Bällchen Schokolade,
V V beide Bällchen Vanille,
. . usw.

Wie viele Wahlmöglichkeiten hast du insgesamt? 27

5 ○ 88d	10 ○ 79	20 ○ 87a
7 ○ 97	15 ⊗ 28	25 ○ 77

7. Eine Schachtel wie diese wird so weit aufgeschnitten, daß man den Pappkarton platt auf den Tisch legen kann. Wie sieht dann der Pappkarton aus? Stelle dir bei jeder Zeichnung vor, du würdest den Karton wieder zusammenfalten, und kreuze dann die richtige Zeichnung an. 36j





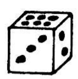
⊗ 43j ○ 88 ○ 76 ○ 88

8. Der Schulweg von Axel ist 450 m lang. Elke besucht dieselbe Schule, und ihr Weg ist 500 m lang.
Was kannst du daraus schließen? 1,7

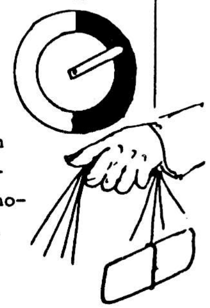
- Es kann sein, daß Elke 100 m entfernt von Axel wohnt. ⊗ 12jd
- Elke wohnt genau 50 m von Axel entfernt. ○ 30d
- Wenn Elke von zu Hause aus den Axel in seiner Wohnung besuchen will, so braucht sie höchstens 950 m weit zu gehen. ⊗ 16jj
- Axel braucht für seinen Schulweg eine kürzere Zeit als Elke. ○ 27
- Wenn Elke zur Schule geht, kommt sie an Axels Wohnung vorbei. ○ 64

9. Auf einem Schulfest werden mehrere Glücksspiele angeboten:

Würfeln: Einsatz 20 Pf. Wer mit einem einzigen Wurf eine 6 würfelt, erhält eine Tafel Schokolade.

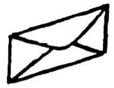


Glücksrad: Einsatz 20 Pf. Den Zeiger mit Schwung drehen und dann loslassen, so daß er sich noch weiter dreht. Bleibt er dann auf Schwarz stehen, erhält man eine Tafel Schokolade.



Fadenziehen: Einsatz 20 Pf. Ein Lehrer hält 4 Fäden in der Hand, die links und rechts aus der Hand heraushängen. Rechts ist an einem Faden eine Tafel Schokolade, an den anderen drei Fäden nichts befestigt. An der linken Seite darf man an einem der 4 Fäden einmal ziehen. Man kann nicht erkennen, an welchem die Tafel Schokolade hängt. Wer am richtigen Faden zieht, darf die Tafel Schokolade behalten.

Zahlenraten: Einsatz 20 Pf. In einem verschlossenen Umschlag befindet sich ein Zettel, auf dem eine Zahl zwischen 1 und 10 steht. Wer die richtige Zahl auf Anhieb errät, erhält eine Tafel Schokolade.



Uwe hat noch 20 Pf in der Tasche. Er überlegt, welches Spiel er machen soll, um die Tafel Schokolade am sichersten zu gewinnen. Welche seiner Überlegungen sind richtig? 17

Am ehesten gewinnt man beim Fadenziehen. ○ 78 j

Am ehesten verliert man beim Zahlenraten. ⊗ 29

Am ehesten gewinnt man beim Glücksrad. ⊗ 65

Am ehesten gewinnt man beim Würfeln. ○ 83 j d

10. Der Fahrer eines Omnibusses zählt die Fahrgäste, die er gerade in seinem Bus befördert. Er stellt fest, daß es genau dreimal so viele weibliche wie männliche Fahrgäste sind.
Welche der folgenden Aussagen sind dann sicher richtig? 11 j

Die Anzahl aller Fahrgäste ist (ohne Rest) durch 4 teilbar. ⊗ 27 j

Wenn 9 männliche Fahrgäste im Bus sind, dann sind es insgesamt 36 Fahrgäste. ⊗ 41

Der vierte Teil aller Fahrgäste ist männlich. ⊗ 30 j

Es sind mehr weibliche als männliche Fahrgäste im Bus. ⊗ 77 d

WILLIBALD DÖRFLER, Klagenfurt

Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff

Herr *Winter* hat sich in seiner didaktischen Forschungsarbeit immer wieder mit Problemen des Lernens und Lehrens von Begriffen auseinandergesetzt. In manchen seiner Arbeiten wie z. B. (*Winter* 1983) kann ich – aus meiner Sicht jedenfalls – Ansätze feststellen, mit denen die im folgenden entwickelte Position durchaus konform geht. Ich hoffe, daß Herr *Winter* meine Meinung teilen kann und damit diese Arbeit zu Recht im vorliegenden Band abgedruckt ist.
Ein erklärtes und legitimes Ziel des Mathematikunterrichts auf allen Stufen ist neben der Vermittlung von kalkülmäßigen Verfahren die Entwicklung von Begriffen und insbesondere von Begriffsverständnis beim und durch den Lernenden. Das methodische Vorgehen im Unterricht und die didaktische Forschung und Entwicklung zur Begriffsentwicklung basieren notwendigerweise auf mehr oder (meist) weniger expliziten Vorstellungen und Annahmen darüber, was ein Begriff überhaupt ist, bzw. sein soll. Eine Vorbedingung für didaktische Forschung zur Begriffsentwicklung ist eben nolens-volens ein Begriff von „Begriff".
Damit ist es aber im Sinne der Klärung von Grundlagen auch Aufgabe der Didaktik, Untersuchungen zur Adäquatheit der jeweiligen Konzepte von „Begriff" anzustellen. Damit meine ich nicht objektiv-naturwissenschaftliche Klärungen davon, was ein Begriff ist, so als ob dies a priori gegeben und nur zu erforschen wäre. Es geht im Gegenteil um die Entwicklung eines Konzepts von „Begriff", das in möglichst adäquater und effektiver Weise zur Regulierung fachdidaktischer Forschung beitragen kann, wobei dieser Beitrag sicher in systematischer Wechselwirkung mit dieser Forschung erfolgen muß. Es ist für mich „Begriff" kein ahistorisches und absolut fixiertes Konzept, sondern eines, das dynamisch und in Auseinandersetzung mit allen Bezugswissenschaften und mit der Realität des Unterrichts stets neu und weiter zu entwickeln ist. Dabei denke ich speziell an ein didaktisches Konzept von „Begriff", das sich durch die Hereinnahme der spezifischen didaktischen Aspekte (Unterricht) etwa von rein psychologischen, epistemologischen oder philosophischen Konzepten wird unterscheiden müssen.
So meine ich auch, daß die doch weit verbreitete Sichtweise von „Begriff" als einer Einheit kodifizierten mathematischen Wissens, determiniert durch eine Definition, zu kurz greift und für die Untersuchung und Erklärung von Lernen und Lehren bzw. allgemeiner von didaktischen Prozessen in didaktischen Situationen nicht ausreicht. In jener Sichtweise wird ein Begriff bloß zu einem objektiv gegebenen Gegenstand (des Denkens) und diese (scheinbare) Gegenständlichkeit des Begriffs verleitet leicht dazu, an eine Vermittelbarkeit von Begriffen analog zur Transportierbarkeit von materiellen Gegenständen zu glauben (z. B. durch Angabe einer Definition). Damit ist oft eine weitgehende Identifizierung des Begriffs mit