Ein Zugang zur Finanz-mathematik für den Bürgergebrauch

von Peter Bender
in Paderborn

August 1989

Universität-GH Paderborn
Fachbereich Mathematik
Warburger Str. 100
D-4790 Paderborn

Preprint mit zahlreichen, ausführlich gerechneten Beispielen eines gleichnamigen Aufsatzes in 'Der Mathematikunterricht' 1989, Heft 6

Peter Bender, Paderborn

Ein Zugang zur Finanzmathematik für den Bürgergebrauch

(Preprint mit zahlreichen, ausführlich gerechneten Beispielen eines gleichnamigen Aufsatzes in 'Der Mathematikunterricht' 1989, Heft 6)

0. Einleitung

Die Popularisierung des Taschenrechners hat ein Thema einer sinnvollen Behandlung im Mathematikunterricht zugänglich gemacht, das wegen seines rechentechnischen Ballasts für allgemein- (und berufs-!) bildende Schulen schlecht verdaulich schien: Die ***Zinseszinsrechnung.*** Intensiviert wurde der Aktualitätsschub durch eine völlige Neufassung der Berechnungsformel für den ***effektiven Zinssatz*** (Bund-Länder-Kommission 'Preisauszeichnung' vom 25.10.1979), den nach der ***Preisangabenverordnung*** (***PAngV***) ein gewerblicher Kreditgeber einem privaten Kunden seit dem 01.01.1981 für sog. Konsumentenkredite und seit dem 01.09.1985 auch für andere vorab nennen muß (s. Nick 1981, Becker 1982, Kirsch 1982 & 1983, Hestermeyer 1985, 1987).

Mit der Zinseszinsrechnung kann die Forderung nach einer stärkeren ***Ausrichtung*** des Mathematikunterrichts ***an Anwendungen*** erfüllt werden (die - nicht zuletzt infolge der Verbreitung des Taschenrechners - wieder an Bedeutung gewonnen hat). Schließlich bietet sich das Thema als Einsatzgebiet für den ***Computer in der Schule*** an (s. z.B. Weidig 1986, Schröder 1987, Ziegenbalg 1988).

0.1 Einordnung und Rechtfertigung des Themas

Ziel eines allgemeinbildenden Unterrichts in Zinseszinsrechnung kann es aber nicht lediglich sein, dem Schüler eine Methode zur Überprüfung eines effektiven Zinssatzes bei einem Kleinkredit an die Hand zu geben. Vielmehr sollte der Mathematikunterricht hier einen gewissen Beitrag zur elementaren politischen und ökonomischen Bildung leisten. Dabei ist jedoch die Perspektive des Kredit***nehmers*** eines Kleinkredits zu eng und einseitig; es müssen auch andere Arten von Geldgeschäften (Kontokorrentkredite, Wertpapiere, Hypothekendarlehen, Bausparen usw.) und die Sichtweise des Kredit***gebers*** beachtet werden. Außerdem sind noch die Geldentwertung (vgl. dazu z.B. Wille 1985) und wohl auch steuerliche Gesichtspunkte zu berücksichtigen.

Vor diesem Hintergrund erscheint das Ausrechnen eines effektiven Zinssatzes auf hundertstel Prozent genau und dazu mit einer komplizierten, in einem Gremium willkürlich ausgehandelten Formel kleinkariert. Aber umgekehrt hat man wenig von der Erörterung allgemeiner Fragen auf abstraktem Niveau ohne konkrete Realisierung im Detail, und die Formel der PAngV mit nach ihr gerechneten Beispielen ist eine solche Konkretisierung. Über diese hat es eine ausgiebige betriebswirtschaftliche (z.B. in "Der langfristige Kredit" 1985, s.a. Dübbern 1985) und auch eine mathematisch-begriffliche (Kirsch 1982 & 1983, Hestermeyer 1985, Jahnke 1987, Kirsch 1987, Bender 1988, Hestermeyer 1988, Weidig 1988, Jahnke 1988) Diskussion gegeben. - Nach meinem Dafürhalten stellt diese Formel eine sinnvolle Verbindung zwischen vernünftigen mathematisch-wirtschaftlichen Prinzipien und wirtschaftlichen Konventionen dar. Dies, zusammen mit ihrer Verbindlichkeit für das Kreditgewerbe, legitimiert m.E. ihre Behandlung im Unterricht und verleiht ihr (allerdings nicht in der unübersichtlichen Form wie im Text der Verordnung) die Rolle eines inhaltlichen ***Leit***ziels für die gesamte Zinseszinsrechnung, auch wenn der reale Unterricht vielleicht nicht bis zu ihr vorstößt oder sogar ihre Prinzipien in Frage stellt.

Es existiert zwar eine umfangreiche finanzmathematische Literatur, aber diese ist z.T. von Begriffen und Methoden aus der Zeit geprägt, als es noch keine Taschenrechner und Kleincomputer gab. Außerdem richten sich diese Werke regelmäßig nicht an den Bürger, sondern an Betriebswirte, und häufig ist die einfache mathematisch-wirtschaftliche Begrifflichkeit von betriebswirtschaftlichen Besonderheiten verschleiert, z.B. schon in der Grobstruktur, wenn etwa die Tilgungs- von der Rentenrechnung abgetrennt oder die Kursrechnung separat behandelt wird (s. z.B. den Klassiker der Finanzmathematik 'Kosiol 1950/1973').

Im folgenden geht es aber gerade darum, die mathematisch-wirtschaftliche Begrifflichkeit für den Bürger an potentiell relevanten Beispielen zu erschließen (ohne den Bezug zur Betriebswirtschaftslehre zu verlieren). Da ich auf den Vorlauf mit der einfachen Zinsrechnung verzichte, ist als Einstieg für den ***Mathematiklehrer*** der DIFF-Brief "Zinsrechnen" (Bardy u.a. 1984) geeignet, der sich inhaltlich dann immer noch mit dem vorliegenden Aufsatz überschneidet.

0.2 Zur Frage des Computer-Einsatzes

Eine schwache Begründungskraft für den Einsatz des Computers hat das Argument der Vorbereitung auf das Berufsleben (o.ä.): Zur Berechnung von Zinssätzen, Laufzeiten usw. verwenden Bankkaufleute nach wie vor überwiegend Tabellen, und wenn der Computer benutzt wird, dann als absolute 'Black Box'. Auch das will gelernt sein; aber dieser Lerninhalt, ebenso wie das Simulieren des Betriebs einer Bank mit Kontenverwaltung usw., ist offensichtlich etwas anderes als Zinseszinsrechnung.

Für diese ist zunächst einmal der Taschenrechner das wichtigste Instrument. Dieser soll den Schülern das Rechnen in den Grundrechenarten abnehmen, aber er erläßt ihnen nicht den eigenhändigen Nachvollzug der Entwicklung eines Kapitals, der m.E. ein wichtiger Bestandteil des Aneignungsprozesses der Schüler ist. So sollten sie u.a. einige Tilgungspläne mit Bleistift, Papier und Taschenrechner erstellen. Mit ihrer Redundanz haben solche Aktivitäten eine entlastende Funktion. Vor allem aber vermitteln sie einen intensiveren Eindruck von der Kapital-Entwicklung im Zeitablauf als ein vom Computer komplett ausgeworfener Plan. Ähnliches gilt auch für die iterative Bestimmung des effektiven Zinssatzes.

Mit dem Taschenrechner ist man da außerdem wesentlich flexibler. Er ist meist in genügender Anzahl vorhanden. Man braucht sich nicht um Ein- und Ausgabe-Routinen zu kümmern und muß keine Entscheidungen, insbesondere keine Abbruchbedingungen vorprogrammieren. Auch wenn das Redundanz-Argument wiederum ***für*** diese Aktivitäten und damit den Einsatz des Computers spricht, so nimmt diese ganze Programmier-Arbeit erfahrungsgemäß über Gebühr viel Zeit in Anspruch und lenkt zu stark von den eigentlichen finanzmathematischen Lerninhalten ab. - Stößt man jedoch in der Zinseszinsrechnung weit genug vor und häufen sich komplexere Beispiele, so liegt der Einsatz des Computers (programmierbaren Taschenrechners) zunehmend nahe, und dann kommt auch gleich wieder eine frühere Verwendung in Frage, nicht als Ersatz, sondern als Erweiterung des (gewöhnlichen) Taschenrechners.

Der Computer fungiert dabei nicht nur als Rechenknecht, sondern kann auch die Begriffsbildung beeinflussen, indem er den algorithmischen gegenüber dem algebraischen Aspekt akzentuiert (vgl. Ziegenbalg 1988): Wiederholte Zahlungen bzw. Verzinsungen brauchen nicht zu Summen zusammengefaßt zu werden, sondern werden Stück für Stück in (iterativen) Kontrollstrukturen abgearbeitet. Ob dies tatsächlich eine begriffliche Vereinfachung bedeutet, sei dahingestellt - immerhin kann man sich z.B. den Abkürzungsterm für die endliche geometrische Reihe sparen. Allerdings sollte man ihn sich nach meinem Dafürhalten trotzdem ***nicht*** sparen, und ich vermute, daß Schülern, denen diese Formel 'zu schwer' ist, auch der Begriff des effektiven Zinssatzes 'zu schwer' ist.

Die Betonung des algorithmischen Aspekts darf jedenfalls nicht dazu führen, daß dem Aufstellen und Lösen von Gleichungen aus dem Weg gegangen wird (im Extremfall etwa ein gesuchtes Anfangskapital aus gegebenem Endkapital, Zinssatz und Laufzeit ***iterativ*** ermittelt wird!). Im Gegenteil: Auch im Zeitalter des Computers bleibt die Frage nach algebraischen Vereinfachungen und Problemlösungen aus begrifflichen und praktischen Gründen wichtig; allerdings kann man heutzutage im Falle des Fehlens algebraischer Möglichkeiten häufig dennoch algorithmisch weiter arbeiten. Daher meine ich, ***beide Aspekte*** sollten berücksichtigt werden.

0.3 Zum Aufbau der Einheit

Die folgende stoffdidaktische Analyse stellt den Hintergrund für eine Unterrichtseinheit dar, die für das 10. bis 11., eventuell auch schon für das 9. Schuljahr, für schwächere Leistungsgruppen jedoch nur partiell geeignet ist. Vorausgesetzt werden: Umgang mit einfachen Gleichungen, Prozentrechnung, speziell die Gleich-

heit $4\ \% = \frac{4}{100} = 0{,}04$, Umgang mit einfachen Zinsen, mit der arithmetischen Reihe, Teile der Potenzrechnung, insbesondere die Summenformel für die endliche geometrische Reihe und Wurzelrechnen (z.T. können diese Voraussetzungen auch im Zuge dieser Einheit geschaffen werden). Auch wenn man an verschiedenen Stellen verschieden weit ins Detail geht und gewisse Einzelheiten wegläßt (z.B. die Behandlung von Spar- und Girokonten oder die Berücksichtigung von Gebühren), so sollten auf keinen Fall konkrete Anwendungen zu kurz kommen. So kann die von mir veranschlagte Gesamtzeit von acht bis zwölf Wochen, eventuell verteilt auf zwei Schuljahre, nur ein grober Richtwert sein. Es empfiehlt sich die Verwendung von Prospekten, Zeitungsanzeigen, Börsen- und sonstigen Wirtschaftsnachrichten, Kontoauszügen und Sparbüchern. Unbedingt erforderlich ist der Taschenrechner, eventuell der programmierbare (bzw. der Computer).

Der Stoff wird anhand von Beispielen entwickelt. Diese sind entweder authentisch oder quasi-authentisch, d.h. ihre Zahlenwerte sind zwar realistisch, aber erfunden, oder es wird (für den Aufbau der Begrifflichkeit unumgänglich) zunächst jährliche (statt unterjährige) Zahlweise angenommen. Die meisten Geldgeschäfte, denen man als normal am Wirtschaftsleben teilnehmender Bürger begegnet, sind mit vierteljährlicher oder monatlicher o.ä. Zahlweise verbunden; die entscheidenden finanzmathematischen Begriffe und Ideen haben aber mit unterjähriger Zahlweise nichts zu tun und werden durch deren Einbezug höchstens verwässert, zumal diese recht leicht in eine äquivalente jährliche Zahlweise verwandelt werden kann, was allerdings eine gewisse Vertrautheit mit finanzmathematischen Denk- und Arbeitsweisen voraussetzt. Da bei der Erarbeitung der grundlegenden Begrifflichkeit, also ***vor*** der Berücksichtigung unterjähriger Zahlungen, bereits Beispielmaterial eingesetzt wird, muß dessen volle Authentizität notgedrungen leiden. Selbstverständlich ist es auch möglich, sehr rasch zu unterjährigen Zahlweisen vorzustoßen und dann erst extensiv die Beispiele zu bringen; ich schätze dieses Vorgehen jedoch für weniger effizient ein.

Die Beispiele stammen im großen und ganzen aus der Zeit von 1986 bis 1988 und sind daher mit relativ niedrigen Zinssätzen ausgestattet. Im Verlauf der Einheit werden sie zunehmend kompliziert, d.h. es treten Bedingungen und Fragestellungen hinzu, die die rechnerische Behandlung immer umständlicher machen. So ergibt sich die Einteilung in zwei Kapitel '1. Darlehen mit einer Rückzahlung', '2. Darlehen mit mehreren Rückzahlungen'. Ein drittes Kapitel 'Beliebige Zahlungsströme' würde das Thema zwar mathematisch-begrifflich abrunden, hätte zugleich den Reiz, von der Finanzmathematik kaum erkundet zu sein und benötigt nur einfache Analysis, etwa Kurvendiskussionen bei Polynomen, wodurch es für die Sekundarstufe II mehrfach gut geeignet erscheint. Da es für den 'normalen' Bürger aber praktisch kaum relevant ist, verzichte ich auf eine Behandlung, möchte aber auf die knappen, jedoch fachlich umfassenden, didaktisch orientierten Artikel (Bender 1988 und 1989) und auf das fachlich orientierte Manuskript (Bender, in Arbeit) verweisen.

Grundlegend für den vorliegenden Aufsatz ist der Umgang mit Bestimmungsgleichungen bzw. Formeln (auch aus algorithmischer Perspektive!), aber nicht mittels Auswendiglernen, sondern mittels Herleiten aus einsichtigen Prinzipien, Interpretieren der Bestandteile und operativem Durcharbeiten. Daher muß auch nicht jedesmal die allgemeine Form mit Buchstaben für die Parameter hingeschrieben werden. Wichtig ist nur, daß bei der Verwendung konkreter Zahlen das Schema der Formel sichtbar bleibt.

1. Darlehen mit einer Rückzahlung

1.1 Das Wesen von Zinsen und Zinseszinsen

Text in Abb. 1: "**Mit Bundesschatzbriefen kann man sich steigern. ... Typ A läuft 6 Jahre, die Zinsen werden jährlich ausgezahlt. Typ B läuft 7 Jahre, Zins und Zinseszinsen werden angesammelt. ... 1. Jahr: 4,00 %; 2. Jahr: 5,50 %; 3. Jahr: 6,00 %; 4. Jahr: 7,00 %; 5. Jahr: 7,50 %; 6. Jahr: 8,00 %; nur Typ B 7. Jahr: 8,00 %.** ..."

Abb. 1

(1) **Welchen Betrag erhält man nach 7 Jahren, wenn man heute einen Schatzbrief Typ B für 1000 DM kauft?** Folgendes Schema ist (für den Anfang) zu entwickeln:

	K_0	= 1000			
	K_1	= 1000	+ 1000 *0,04	= 1000 *1,04	= 1040
	K_2	= 1040	+ 1040 *0,055	= 1040 *1,055	= 1097,20
(2)	K_3	= 1097,20	+ 1097,20*0,06	= 1097,20*1,06	= 1163,03
	K_4	=	.	1163,03*1,07	= 1244,44
	K_5	=	.	1244,44*1,075	= 1337,77
	K_6	=	.	1337,77*1,08	= 1444,79
	K_7	=	.	1444,79*1,08	= 1560,37 ,

also: Auszahlung 1560 DM. Und (ab der zweiten Zeile daneben):

$$
\begin{array}{lll}
 & K_1 = K_0*(1+0,04) & \\
 & K_2 = K_1*(1+0,055) & = K_0*(1+0,04)*(1+0,055) \\
 & K_3 = K_2*(1+0,06) & = K_0*(1+0,04)*(1+0,055)*(1+0,06) \\
(3) & K_4 = & \quad . \\
 & K_5 = & \quad . \\
 & K_6 = & \quad . \\
 & K_7 = K_6*(1+0,08) & = K_0*(1+0,04)*(1+0,055)*\ldots*(1+0,08)\ ,
\end{array}
$$

(4) allgemein: $K_n = K_0*(1+i_1)*(1+i_2)*\ldots*(1+i_n)$,

wo n die Laufzeit in Jahren und i_m der Zinssatz im m-ten Jahr ($1 \leq m \leq n$) ist.

(5) <u>Für die ***Rechengenauigkeit*** besteht folgende Regel: Es ist immer mit Taschenrechner-Genauigkeit zu rechnen, hingeschrieben werden aber genauestenfalls Pfennige; tatsächliche Zahlungen sind auf volle DM oder volle Pfennige genau, Zinssätze auf zehntel oder hundertstel Prozent genau anzugeben mit üblicher Rundung.</u>

Wichtig ist es, die wirtschaftliche Natur von Kapital und Zins zu erarbeiten. Für das Gesellschaftssystem, in dem wir leben, gilt: Wie Wohnungen, Videokassetten usw. kann man auch Geld ***mieten***. Der Mietpreis wird für eine 'Objekt'einheit und eine Zeiteinheit festgelegt (9,50 DM pro Quadratmeter und Monat; 2 DM pro Stück und Tag; 7 DM pro 100 DM und Jahr). Die Miete ist (bis auf etwaige Sonderbeträge) proportional zur Größe der Mietsache und zur Zeitdauer und wird i.a. in regelmäßigen Abständen in Teilbeträgen gezahlt (die Wohnung i.a. monatlich, Kassetten nach Rückgabe, Geld je nach Vereinbarung). Die Höhe des Mietpreises hängt noch vom Markt (Angebot und Nachfrage), vom Geschick der Geschäftspartner und sonstigen persönlichen Umständen, insbesondere von der Einschätzung der Bonität des Mieters, ab. Mit der Miete hilft der Mieter dem Vermieter, dessen Eigentum zu bezahlen, entschädigt ihn für die faktische Abnutzung (bei Geld z.B. die Inflation), leistet einen Deckungsbeitrag für seine sonstigen Kosten und ermöglicht ihm einen Gewinn.

Ist die Mietsache Geld, so spricht man von einem Darlehen (Kredit), von Darlehensgeber und -nehmer, von Forderung und Verbindlichkeit; und die Miete (genauer: ihr zeitabhängiger Anteil) heißt ***Zins***. Da hier Mietsache und Miete (Darlehen und Zinsen) vom selben Größentyp sind, nämlich Geld, werden sie jeweils zu einem einzigen Betrag (dem ***Kapital***) zusammengezogen. <u>Im Laufe eines Jahres ist das Kapital konstant. Nach Ablauf eines jeden Jahres (jeweils am letzten Tag) wird es um die Zinsen für dieses Jahr</u>
(6) <u>vermehrt. Diese werden dadurch '***kapitalisiert***', d.h. sie werden ab dann mit vermietet bzw. verzinst und werfen also Zinseszinsen ab; die Zinsen werden ***kumuliert***.</u> Am Laufzeitende hat das Kapital seinen Höchststand erreicht und wird dann durch Rückzahlung des ganzen Betrags auf 0 gebracht.

Eine andere weit verbreitete Möglichkeit (z.B. auch bei Schatzbriefen Typ A (s. Abb. 1)) ist die Bezahlung der Zinsen sofort an jedem Jahresende. In diesem Fall ist das Kapital über die ganze Laufzeit konstant. Die jährlichen Zinszahlungen lassen sich dabei ganz simpel berechnen; sie würden, bei ebenfalls 7-jähriger Laufzeit 40 DM, 55 DM, 60 DM usw. betragen, zusammen also 460 DM, d.h. 100 DM weniger als bei der anderen Variante. Aber dieses Geld stünde früher zur Verfügung, könnte also wieder angelegt und verzinst werden und wäre daher als Kapital mehr wert, als wenn am Ende 460 DM ausgezahlt würden. Wäre es auch mehr wert als 560 DM? Diese Frage nach der Bewertung ist bei jährlicher Auszahlung der Zinsen mathematisch schwieriger anzugehen (s. Kap. 2). Ich beschränke mich daher jetzt auf den Fall der Zinskumulation.

Der Vorgang der Kumulation zeigt sich bei den Formeln (3) und (4) in den Faktoren: Wenn das Kapital zu Beginn des m-ten Jahres K_{m-1} beträgt, dann wächst es bis zum Ende um die Zinsen i_m*K_{m-1} auf $K_m = K_{m-1} + i_m*K_{m-1} = K_{m-1}*(1+i_m)$. Die '1' in diesem Faktor, dem sog. ***Zinsfaktor*** (häufig mit $q_m:=1+i_m$ abgekürzt), liefert den Beitrag des Anfangskapitals; der - gewöhnlich viel kleinere - zweite Summand, der ***Zinssatz***, liefert den Beitrag der Zinsen zum Endkapital nach 1 Jahr. Das ist typisch für Wachstumsfunktionen (vgl. auch den Mehrwertsteuer-Operator *1,14 bei 14 % Mehrwertsteuer).

(7) Ein wichtiger Grundsatz bei solchen mehrjährigen Rechnungen lautet also: <u>Zwar interessiert der ***Zinssatz***, zu rechnen ist aber zunächst mit dem ***Zinsfaktor***.</u>

Jedes Jahr der Laufzeit ist durch genau einen Zinsfaktor vertreten. Die Reihenfolge der Faktoren ist wegen der Kommutativität der Multiplikation offenbar beliebig. Dieser Sachverhalt erscheint auch plausibel, wenn man überlegt, daß bei den gegebenen Konditionen die Zinsen am Anfang zwar niedrig sind, gegen Ende aber höhere Zinseszinsen bringen, während etwa bei umgekehrter Reihenfolge der Zinssätze die anfänglich höheren Zinsen später niedrigere Zinseszinsen abwerfen. Dies kann man auch nachvollziehen, indem man jeden entstehenden Betrag separat weiterverzinst (was einer Ausmultiplizierung der Formel (4) entspricht und bei einer Laufzeit von n Jahren zu 2^n Summanden führt), z.B. bei den Bedingungen in Abb. 1 mit Anfangskapital K=1 und abgekürzt auf n=4 Jahre:

wie oft Verzi?	0-m	1-mal	2-mal	3-mal	4-mal
nach 0 Jahren	1				
nach 1 Jahr		+0,04			
nach 2 Jahren		+0,055	+0,04*0,055		
nach 3 Jahren		+0,06	+0,04 *0,06 +0,055*0,06	+0,04*0,055*0,06	
nach 4 Jahren		+0,07	+0,04 *0,07 +0,055*0,07 +0,06 *0,07	+0,04*0,055*0,07 +0,04*0,06 *0,07 +0,055*0,06*0,07	+0,04* 0,055*0,06 *0,07

Für jede andere Reihenfolge der Zinssätze läßt sich die entsprechende Tabelle herstellen, und man sieht direkt die Identität aller dieser Tabellen bis auf spaltenweise Umordnung der Summanden.

1.2 Aufgaben zur Zinseszinsrechnung

Text zu Abb. 2: "**Finanzierungs-Schätze des Bundes: kurze Laufzeit - gute Zinsen. 2 Jahre Laufzeit; 4,77 % Rendite. ... Sie zahlen z.B. ... DM ein und erhalten nach zwei Jahren 1000 DM zurück....**"

Abb. 2

Diese Art der Stückelung erfreut sich einer gewissen Beliebtheit, weil man einen dreistelligen Betrag einzahlt und einen glatten

(8) Tausender zurückerhält. **Wie teuer muß der Bund seine Finanzierungsschätze anbieten?** 911 DM.

Oder: "**Ein Bundesschatzbrief soll mit Konditionen wie in Abb. 1**

(9) **ausgestattet werden, lediglich den Zinssatz im 7. Jahr möchte der Bund so erhöhen, daß der Auszahlungsbetrag eines 1000-DM-Schatzbriefes sich auf 1580 DM beläuft.**" 9,36 %.

(10) Und: "**Wann erreicht ein 1000 DM-Schatzbrief wie in Abb. 1 einen Wert von 1400 DM?**" Im 6. Jahr: genauer nach 5 Jahren und 210 Tagen (= 7 Monaten). Das Jahr erhält man durch sukzessive Multiplikation in Formel (4) bzw. direkt aus dem Schema (2). Wäre der Zinssatz über die Laufzeit konstant, so könnte man auch mit Logarithmen rechnen, und es galt früher, jedenfalls im Mathematikunterricht (nicht ganz unberechtigt), als verpönt, diese nicht zu verwenden, sondern in Formel (4) 'vorwärts' zu arbeiten. Allerdings war die Genauigkeit des Ergebnisses wenig wert; auch diese kann nur das Jahr liefern, und innerhalb dieses Jahres muß man mit einfachen Zinsen weiterrechnen, d.h. $K_5*(1+\frac{t}{360}*0{,}08) = 1400$

mit K_5 = 1337,77 ist nach t aufzulösen. Mögliches Vorgehen mit dem Taschenrechner: $\frac{1400}{K_5}$ = 1,04651771; $\frac{0,04651771}{0,08}$ = 0,5814714; t = 360*0,5814714 = 209,3; also am 210. Tag. (Diese Frage nach dem genauen Tag sollte jedoch an einer späteren, besser geeigneten Stelle aufgeworfen werden.)

Beim Umgang mit Formel (4) wird die Proportionalität zwischen Rückzahlungs- und Auszahlungskapital (sowie zwischen jedem Zinsbetrag und dem Kapital) offenbar: <u>Entscheidend für die Analyse ist eigentlich nur der Proportionalitätsfaktor, der Quotient aus Rückzahlungs- und Auszahlungskapital, das Produkt aus den Zins-</u>
(11) <u>faktoren. Diesen Faktor nenne ich ***Gesamtfaktor***</u>.

<u>1.3 Der effektive Zinssatz als Mittelwert und als Zinssatz des 'Normal'falls</u>

(12) **"Eine Bank bietet einen Sparbrief mit einer Laufzeit von 7 Jahren und einem jährlichen Zinssatz von 6 % an."** Hier beträgt der Gesamtfaktor $1{,}06^7$ = 1,50363; diese Geldanlage ist also schlechter als der Schatzbrief Typ B in Abb. 1.

(13) **"Wie hoch müßte denn ein jährlich gleichbleibender Zinssatz sein, damit die Geldanlage so gut wie der Schatzbrief Typ B in Abb. 1 ist?"** Der Ansatz lautet

(14) K*(1+x)*(1+x)*...*(1+x) = K*1,04*1,055*...*1,08 , bzw.
$(1+x)^7$ = 1,56 .

Nun wird Grundsatz (7) aktuell: Man braucht kein Polynom in x, sondern eines in 1+x (diesen Term kann man mit y abkürzen), und erhält 1+x = $\sqrt[7]{1{,}56}$ und x = 0,06559. Also: Der Zinssatz müßte 6,56 % betragen.

Hier, wie an weiteren Stellen, ist das Herauspräparieren einer eigenen Formel ziemlich wertlos. Jegliche Berechnungen sollten von der Formel (4) (gegebenenfalls mit Ansatz (14)) ausgehen.

Die Fehler bei der Rundung von Zinssätzen können recht groß werden: Bei der Verzinsung von 1000 DM mit 6,56 % in 7 Jahren ergibt sich ein Rückzahlungsbetrag von 1560,12 DM, also eine Abweichung von 0,25 DM. Eine solche wirkt sich aber häufig (so auch hier) nicht aus, weil der Betrag eh auf volle DM gerundet wird. Vor allem aber ist dieser Zinssatz eine 'fiktive' Größe, nach der die tatsächlich zu leistenden Zahlungen gar nicht berechnet werden, so daß man getrost auf unhandliche, genauere Angaben verzichten kann, die außerdem keinen Informationswert haben.

Der Wert von 6,56 % aus (14) ist eine Art Mittelwert der Zinssätze in (1). Hier liegt folgende Vorstellung von Mittelwert zugrunde: Hat man n Werte, die auf geeignete Art zu einem Wert w verknüpft werden können, so ist ihr Mittelwert d derjenige, den man n-mal mit sich selbst verknüpfen muß, um w zu erhalten. Bei den Körpergrößen der Schüler einer Klasse, den Monatsumsätzen eines Jahres, den erreichten Punktzahlen einer Klausur ist die Verknüpfung die Addition, und es liegt das arithmetische Mittel vor; bei den Kantenlängen eines Quaders (wenn es um das Volumen geht), den Wachstumsfaktoren einer Zellkultur oder den Zinsfaktoren eines Geldgeschäfts ist die Verknüpfung die Multiplikation, und es liegt das geometrische Mittel vor.

Also	$d+d+\ldots+d = w_1+w_2+\ldots+w_n$	und	$d*d*\ldots*d = w_1*w_2*\ldots*w_n$
bzw.	$n*d = w_1+w_2+\ldots+w_n$		$d^n = w_1*w_2*\ldots*w_n$
bzw.	$n*d = w$		$d^n = w$
bzw.	$d = \frac{w}{n}$		$d = \sqrt[n]{w}$

Man muß also nicht die Einzelwerte selbst kennen, sondern nur ihre ***Anzahl***, den Gesamtwert und den Typ der Verknüpfung.

Die Frage nach dem mittleren Zinssatz für (1) wird häufig mit dem arithmetischen Mittel beantwortet, nämlich $\frac{46\%}{7}$ = 6,57 %, ein für die Berechnung einfacher Zinsen korrektes Vorgehen (bei der Verwendung der Zinsfaktoren ergäbe sich mit $\frac{7{,}46}{7}$ = 1,0657 dasselbe). Das geometrische Mittel der Zinssätze ist $\sqrt[7]{0{,}04*0{,}055*\ldots*0{,}08}$ = 0,0641 und das der Zinsfaktoren schließlich nach (14) 1,0656. Welche dieser vier Vorgehensweisen zu wählen ist, ergibt sich eindeutig aus der Fragestellung (13); d.h. der mittlere Zinssatz ist recht umständlich zu berechnen.

Die Bedeutung der Mittelwerteigenschaft ergibt sich daraus, daß
(15) sie zum ***Normalfall (Idealfall)*** eines Kreditgeschäfts gehört. Darunter versteht man, daß ein bestimmter Betrag K den Besitzer wechselt, der über die ganze Laufzeit n (in vollen Jahren) mit einem konstanten Zinssatz i verzinst wird, dessen Zinsen nach Ablauf jedes vollen Jahres kapitalisiert werden und der zusammen mit diesen am Ende der Laufzeit zurückgezahlt wird: $K*(1+i)^n$. Die wenigsten Kreditgeschäfte stellen den Normalfall dar, aber zu jedem existiert ein Normalfall, der ihm insofern gleichwertig ist, als er dieselbe Laufzeit und denselben Gesamtfaktor (11) hat.

(16) Den Zinssatz des zugehörigen Normalfalls nennt man ***effektiven Zinssatz*** des Kredits (für den Kreditgeber auch: ***Rendite***).

Bei ***gleichen*** Laufzeiten ist ein Vergleich verschiedener Geldgeschäfte ohne den effektiven Zinssatz, allein mit dem Gesamtfaktor, möglich, bei unterschiedlichen Laufzeiten jedoch nicht. Dennoch kann der effektive Zinssatz nicht die alleinige Grundlage zur Bewertung verschiedener Angebote sein: Es kommt z.B. auch darauf an, wie lange man Geld braucht bzw. anlegen möchte und wie man die Entwicklung des Marktzinssatzes in der Zeit einschätzt, um die sich die Laufzeiten der beiden Angebote unterscheiden. Oder: Gegenüber dem Schatzbrief Typ B in Abb. 1 ist natürlich einer vorzuziehen, der **7 Jahre lang gleichmäßig mit 6,56 %** verzinst wird, weil dieser bei einem vorzeitigen Verkauf wertvoller ist (genau deswegen werden ja Schatzbriefe mit Zinssätzen ausgestattet, die zunächst niedrig sind: der Anleger soll sein Geld möglichst ***nicht*** vorzeitig abziehen).

Der effektive Zinssatz kann negativ sein: "**Jemand kauft Aktien**
(17) **für 3600 DM (einschließlich Provision usw.) und verkauft sie nach 4 Jahren für 3060 DM.**" Hier ist der Gesamtfaktor 0,85 (<1) und der effektive Zinssatz $\sqrt[4]{0,85} - 1 = -0,0398$. Es liegt ein negativer Wachstumprozeß mit einem jährlichen Verlust von etwa 4 % und einem jährlichen Zinsfaktor von 0,9602 vor. - Es ist klar: Der

effektive Zinssatz ist positiv (0, negativ), wenn die Rückzahlung größer als (so groß wie, kleiner als) die Auszahlung ist.

1.4 Vergleich von einfachen und Zinseszinsen

"**Ein Postsparbuch hat am 1. Januar einen Bestand von 876,54 DM;**
(18) **im ganzen Jahr erfolgen keine Aus- oder Einzahlungen; der Zinssatz beträgt bis zum 15. Mai 3 %, ab dann bis zum 31. August 2,5 % und danach 2,75 %.**"

Man muß wissen, daß jeder Monat 30 (und damit das Jahr 360) Zinstage hat und daß der Zinssatz grundsätzlich auf das Jahr bezogen ist. $876,54*\frac{135}{360}*0,03 + 876,54*\frac{105}{360}*0,025 + 876,54*\frac{120}{360}*0,0275 = 876,54*0,0277083 = 24,29$ (DM Zinsen); bzw. das Endkapital ist $876,54*(1+0,0277083) = 900,83$ (DM) und der effektive Zinssatz 2,77 %. Die Zinsperiode ist 1 Jahr; und auch wenn sich der Zinssatz zwischendurch ändert, werden die Zinsen erst nach einem Jahr kapitalisiert. Es ergibt sich ein einziger Zinsfaktor, nämlich $1 + \frac{135}{360}*0,03 + \frac{105}{360}*0,025 + \frac{120}{360}*0,0275$, und der Zinssatz in diesem Faktor ist das (mit den Zeitdauern gewogene) arithmetische Mittel der tatsächlich angewandten Zinssätze. Dieser Zinssatz ist zugleich der effektive Zinssatz. Passend zu den Zinssätzen sind auch die Zeitdauern grundsätzlich in Jahren angegeben. Es empfiehlt sich die Bruchschreibweise mit 360, 12 oder 4 als Nenner je nach dem, ob mit Tagen, Monaten oder Quartalen gearbeitet wird, während die dezimale Schreibweise nur günstig ist, wenn gewährleistet ist, daß die Dezimalzahlen abbrechen.

Das Produkt $876,54*\frac{135}{360}*0,03$ (876,54 DM werden 135 Tage lang mit 3 % verzinst) läßt sich auch interpretieren als die Zinsen eines Kapitals von $\frac{876,54*135}{360} = 328,70$ (DM) nach 1 Jahr bei 3 % oder eines Kapitals von 876,54 DM nach 1 Jahr bei einem Zinssatz von $\frac{135*0,03}{360} = 0,01125$. Bei der ersten dieser alternativen Interpretationen hätte man in (18) drei Kapitalien, die ***zusammen*** 876,54 DM ergeben und mit 3 % bzw. 2,5 % bzw. 2,75 % je ein Jahr lang verzinst würden, bei der zweiten Interpretation würde in (18) das Kapital von 876,54 DM quasi dreimal in einem Jahr jeweils sehr niedrig verzinst, und zwar mit Zinssätzen, die zusammen gerade 2,77083 % ergäben.

(19) Fortsetzung von (18): "**Im darauffolgenden Jahr wird wieder nichts aus- oder eingezahlt. Der Zinssatz beträgt bis zum 31. März 2,75 %, ab dann 2,25 %.**" Die Gesamtentwicklung des Kapitals sieht nun so aus: $876{,}54*(1+\frac{3}{8}*0{,}03+\frac{7}{24}*0{,}025+\frac{1}{3}*0{,}0275)*(1+\frac{1}{4}*0{,}0275+\frac{3}{4}*0{,}0225) = 876{,}54*1{,}0521164 = 922{,}22$. Hier liegt Formel (4) vor (mit zwei Zinsfaktoren), allerdings in der Verallgemeinerung, daß die Zinssätze nicht direkt gegeben sind, sondern sich als gewogene arithmetische Mittel errechnen:

(20) $$i_m = t_{m1}*i_{m1} + t_{m2}*i_{m2} + \ldots + t_{mk_m}*i_{mk_m} \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

In (19) ist $n=2$, $k_1=3$, $k_2=2$, $t_{11}=\frac{135}{360}$, $t_{12}=\frac{105}{360}$, ..., $t_{22}=\frac{270}{360}$, $i_{11}=0{,}03$, ..., $i_{22}=0{,}0225$, $i_1=0{,}277083$, $i_2=0{,}02375$. Die Summe aller vorkommenden Zeitspannen muß gerade die Gesamtlaufzeit ergeben, im Beispiel etwa $\frac{3}{8}+\frac{7}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{9+7+8+6+18}{24} = 2$. Es ist klar, wie nach (14) der effektive Zinssatz auszurechnen ist: $876{,}54*(1+x)*(1+x) = 922{,}22$, also $1+x = \sqrt{\frac{922{,}22}{876{,}54}} = 1{,}0257261$, also $x = 2{,}57$ %. Man braucht wieder nur den Gesamtfaktor (11) und muß nicht wissen, wie dieser im einzelnen entsteht.

(21) Die Auswirkungen von Zinseszinsen zeigt drastisch die folgende Aufgabe: "**Eine Sparkasse überreicht jedem Neugeborenen in ihrem Einzugsbereich ein Sparbuch über 10 DM. Dieser Betrag wird gleichmäßig mit 5 % verzinst. Wie hoch wäre das Guthaben nach einer Laufzeit von Christi Geburt bis heute?**" Eine Rechnung mit einfachen Zinsen ergibt $10*(1+1989*0{,}05) = 1004{,}50$. Dies ist ein mickriger Betrag im Vergleich zur Zinseszinsrechnung: $10*1{,}05^{1989} = 1{,}398*10^{43}$. Um von dieser Zahl eine gewisse Vorstellung zu erhalten, muß man sie schrittweise aufbauen: Nach wieviel Jahren hat sich das Vermögen verdoppelt? 15 Jahre. Wie groß ist es nach 30, nach 60, nach 100 Jahren? Ungefähr das 4-Fache, 18-Fache, 131-Fache. Nach 500 Jahren? Das 40-Milliarden-Fache. Usw. Also kurz nach Untergang des Römischen Reichs (oder bei einer Anlage zur Zeit der Entdeckung Amerikas 1492 bis heute) würde sich das Guthaben auf 400 Mrd DM belaufen und sich nach wie vor alle 15 Jahre mehr als verdoppeln. Hier konkretisiert sich die Wucht exponentiellen Wachstums, aber auch schlicht die Rechenregeln der Potenzrechnung: $10*1{,}05^{1989} \approx 10*(1{,}05^{15})^{133} \approx 10*2{,}08^{133}$ (viel mehr als die $2^{64}-1$ Reiskörner, die man zur ständigen Verdoppelung auf den 64 Feldern eines Schachbretts braucht) oder $10*1{,}05^{1989} \approx 10*(1{,}05^{100})^{20}*0{,}5 \approx 5*131{,}5^{20} \approx 5*(40\ \text{Mrd})^4$.

1.5 Graphische Darstellungen

Die physikalische Auffassung von der Zeit als reellem Kontinuum ist für wirtschaftliche Sachverhalte oft nicht geeignet. Dort besteht ein Definitionsbereich 'Zeit' in der Regel nur aus abzählbar vielen Elementen, die ihrerseits zwar Zeitspannen sind, aber auf der Abszisse als Punkte abgetragen werden. Da der Größenbereich der Geldbeträge auch N isomorph ist, hat man insgesamt ein $N_0 \times N_0$-Gitter mit dem Funktionsgraphen als einer Menge von Gitterpunkten. Zur besseren Übersicht werden diese von links nach rechts durch einen Streckenzug miteinander verbunden.

Handelt es sich um ***Umsatzgrößen*** (Umsatz, Kosten, Gewinn usw.), so ist auch ein Säulendiagramm angemessen. Bei ***Bestandsgrößen*** (z.B. Kapital) dagegen ist man u.U. doch wieder geneigt, einen kontinuierlichen Zeitablauf zu unterlegen, indem man die markierten Punkte auf der Abszisse als Periodenenden und die Strecken dazwischen als Perioden interpretiert. Die Verbindungsstrecken des Funktionsgraphen sagen aber i.a. nichts über die tatsächliche Entwicklung des Bestands innerhalb der Perioden aus; lediglich

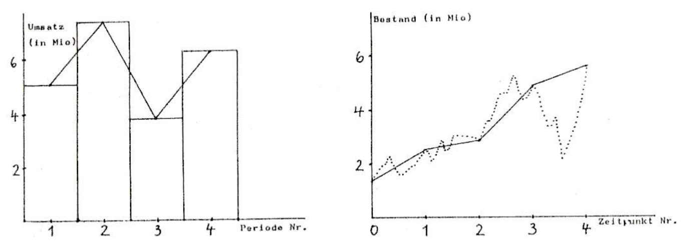


Abb. 3

bei der Zinsrechnung geben sie bei einer gewissen Interpretation (rechnerisches Kapital K_3 in (22)) den Funktionsverlauf einigermaßen genau wieder.

Beim ausgewiesenen Kapital (K_2 in (22)) hat man pro Jahr eine Stufe und einen Sprung am Jahresende. Geht es um die rein rechnerische laufende Entwicklung des Kapitals (einfache Verzinsung!), hat man 360 Stufen jedes Jahr. Der Tag ist i.a. die kleinste wirtschaftliche Zeiteinheit, insbesondere in der Zinsrechnung, und das Kapital ist eine Funktion der Zeit in ganzen Tagen und nicht einzelner Tageszeitpunkte. So bietet sich an, die Tage wieder als Punkte aufzufassen und benachbarte Punkte des Funktionsgraphen durch Strecken zu verbinden. Dies korrespondiert mit der Eindeutigkeitsforderung an Funktionen, ohne daß man mit halboffenen Strecken arbeiten müßte. Bei den üblichen Zeichenmaßstäben sitzen die Punkte so dicht, daß man keine Verbindungsstrecken zeichnen braucht, bzw. an 'Sprungstellen' kann man getrost eine scheinbar lotrechte Strecke zeichnen; man weiß ja, daß hier eigentlich ein Übergang vom vorletzten zum letzten Tag (etwa eines Jahres) vorliegt. So sieht die Entwicklung eines Kapitals von 1000 DM mit einer (zum Zwecke der Deutlichkeit hoch angesetzten) Verzinsung von 60 % und einer Laufzeit von 5 Jahren folgendermaßen aus:

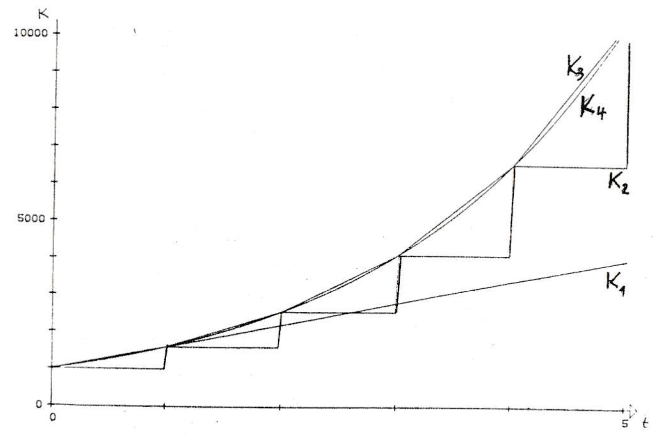


Abb. 4

Die Graphen haben folgende Gleichungen (wobei [t] die größte ganze Zahl $\leq t$ ist):

	$K_1 = 1000*(1+t*0{,}6)$	einfache Zinsen
(22)	$K_2 = 1000*1{,}6^{[t]}$	ausgewiesenes Kapital
	$K_3 = 1000*1{,}6^{[t]}*(1+(t-[t])*0{,}6)$	rechnerisches Kapital
	$K_4 = 1000*1{,}6^{t}$	'stetige' Verzinsung

Für einfache Zinsen ergibt sich selbstverständlich eine Gerade mit der Steigung 600; für Zinseszinsen ist innerhalb eines Jahres [t] konstant, es ergibt sich für das ausgewiesene Kapital die 'Treppenfunktion' K_2 und für das rechnerische (K_3) jeweils eine Strecke mit der Steigung $600*1{,}6^{[t]}$, die also von Jahr zu Jahr größer ist: Die Steigung hängt nämlich nicht nur vom Zinssatz, sondern auch vom Kapital am jeweiligen Jahresanfang ab.

Die Funktion K_4 schließlich ist eine Fortsetzung der Funktion mit demselben Funktionsterm, aber ganzzahligem Definitionsbereich. Für ganzzahlige Argumente stimmt sie mit der wahren Kapitalentwicklung überein. Ihre Fortsetzung auf $\mathbb{R}_0^+$ oder schon auf $\frac{1}{360}*\mathbb{N}_0$ weicht jedoch von dieser ab, so daß man bei ihrer Auswertung außerhalb $\mathbb{N}_0$ einen systematischen Fehler macht: Dort wird immer ein zu kleines Kapital ermittelt, d.h. für $t \notin \mathbb{N}_0$ ist $K_4 < K_3$. Dies ist kein Widerspruch zu der einleuchtenden Tatsache, daß ein Kapital mit Zinseszinsen schneller wächst als mit einfachen. Am Beginn eines jeden Jahres haben K_2, K_3 und K_4 denselben Wert. Das exponentielle K_4 ist so definiert, daß es in einem Jahr denselben ***Gesamt***-Anstieg wie das lineare K_3 hat. Dann muß es innerhalb des Jahres kleinere Werte annehmen, denn sobald sein Graph an einer Stelle die zu K_3 in diesem Jahr gehörende Gerade erreicht, übertrifft es diese ab dann, da ja zu jedem Zeitpunkt sofort Zinseszinsen anfallen und (bei gleichem Zinssatz) das Wachstum schneller als bei dem linearen K_3 wäre. Für einen Spezialfall ausgedrückt: Liegt K_4 zugrunde, dann erbringt ein Kapital in einem halben Jahr weniger als die Hälfte der Zinsen, die es (beim selben Jahreszinssatz!) in einem Jahr erbringen würde.

Rechnerisch ist mit K_4 einfacher umzugehen als mit K_3, jedenfalls wenn es bei Laufzeiten über 1 Jahr um zwischenjährige Zeitpunkte geht. Für Kirsch (1982 & 1983) liefert K_4 den "***wirklichen*** effektiven Zinssatz". Die dieser Funktion zugrundeliegende tägliche Kapitalisierung der Zinsen widerspricht jedoch dem Denken 'normaler' Teilnehmer am Wirtschaftsgeschehen: Zwar sind auch unterjährige Zinsen weit verbreitet, aber die Grundvorstellung ist doch, daß ein Kreditnehmer erst einmal eine Zeitlang das Geld zur Verfügung hat, ehe er Zinsen zahlt, im Prinzip für ein Jahr (als wirtschaftliche Zeiteinheit) oder z.B. für eine Lohnperiode (bei Lohnempfängern). Die Zinsen sind eine Art Miete (s.o.), die in vielen Fällen nach jeder Periode wirklich gezahlt wird, so daß dann der Gesichtspunkt ihrer tatsächlichen oder fiktiven Kapitalisierung irrelevant ist. Diese Irrelevanz führt ja sogar dazu, daß bei einer 'zwischenjährigen' Rückzahlung eines Kredits die Schlußzinsen sofort und nicht erst nach Vollendung des laufenden
(23) Jahres fällig werden (sog. ***Sparkassen-Konvention***), obwohl diese Zinsen für den Rest dieses Jahres noch einmal angelegt werden können. Diese Konvention, die nicht bei allen Arten von Geldanlagen gilt (z.B. i.a. nicht bei Wertpapieren), verleiht der Funktion K_3 die handfeste Bedeutung, jederzeit den aktuellen Rückzahlungswert des Kapitals anzugeben. - Für viele Zwecke liefert die Funktion K_4 brauchbare Näherungen, auch wenn sie prinzipiell nicht den tatsächlichen Verlauf wiedergibt.

1.6 Unterjährige Verzinsung

Sogar wenn der Zinssatz über die ganze Laufzeit konstant bleibt, können die Konditionen doch so sein, daß der effektive Zinssatz von ihm abweicht: durch unterjährige Zinskapitalisierung oder durch Gebühren (Provisionen, Kurssetzungen u.ä.) am Anfang der Laufzeit. Der in den Konditionen genannte Zinssatz heißt dann, im Unterschied zum effektiven, ***nominaler Zinssatz***. Er ist offenbar regelmäßig kleiner als der effektive. Zunächst zur unterjährigen Verzinsung:

(24) **"1000 DM werden bei einer Laufzeit von 1 Jahr mit 9 % verzinst. Die Zinskapitalisierung erfolgt vierteljährlich."** Das bedeutet, daß alle drei Monate die Zinsen, die sich bis dahin rechnerisch ergeben haben, kapitalisiert werden. Das Darlehen ist also mit $1000*(1+\frac{1}{4}*0{,}09)^4 = 1093{,}08$ (DM) zurückzuzahlen. Hier liegt wieder Formel (4) vor.

Man erkennt jetzt, daß Zinsfaktoren nicht notwendig Jahren, sondern allgemeiner Zinsperioden (Zeitspannen zwischen 2 aufeinander folgenden Zinskapitalisierungs-Zeitpunkten) zugeordnet sind. Die Zinssätze in diesen Faktoren sind grundsätzlich auf Jahre bezogen (hier 9 %) und müssen noch mit der Länge der Periode (ebenfalls in Jahren anzugeben), bzw. der Geltungsdauer des jeweiligen Zinssatzes, falls diese kürzer ist (hier $\frac{1}{4}$), multipliziert werden. Das Produkt $\frac{1}{4}*0{,}09 = 0{,}0225$ könnte auch als auf ein Quartal bezogener Zinssatz interpretiert werden; dann müßten die Zeitdauern eben in Quartalen angegeben werden, und das o.a. Produkt könnte entsprechend $1*0{,}0225$ geschrieben werden.

Der effektive Zinssatz beträgt 9,308 %; denn so hoch muß der Zinssatz sein, damit ein Kapital in einem Jahr im Normalfall (Zinsperiode ist da 1 Jahr!) von 1000 DM auf 1093,08 DM wächst, wobei der genaue Verlauf der Entwicklung eigentlich wieder nicht interessiert. Es ist $1{,}09308 = (1+\frac{1}{4}*0{,}09)^4$, und bei einer Laufzeit von n Jahren ($n \in \mathbb{N}$) ist der Gesamtfaktor $(1+\frac{1}{4}*0{,}09)^{4n} = 1{,}09308^n$ und der effektive Zinssatz nach wie vor 9,308 %. Bei einem Zinssatz von 9 % ist eine vierteljährliche Zinskapitalisierung also gleichwertig mit einer jährlichen Zinskapitalisierung bei 9,308 %.

(25) **"Sind nun die Bedingungen wie (24), jedoch mit monatlicher oder gar täglicher Zinskapitalisierung"**, dann beträgt das Darlehen nach einem Jahr $1000*(1+\frac{1}{12}*0{,}09)^{12} = 1093{,}81$ (DM) bzw. $1000*(1+\frac{1}{360}*0{,}09)^{360} = 1094{,}16$ (DM) mit entsprechend jeweils etwas höherem effektiven Zinssatz. Da $\lim_{p\to\infty} 1000*(1+\frac{0{,}09}{p})^p = 1000*e^{0{,}09} = 1094{,}17$ gilt, ist durch weitere Verkürzungen der Perioden so gut wie keine Steigerung der Zinsen mehr möglich. Der entscheidende Sprung ist eigentlich schon beim Übergang zu Quartalen gemacht.

Hat man n aufeinanderfolgende Zinsperioden $m=1,2,\ldots,n$ mit Längen t_m (in Jahren angegeben) und (Jahres-) Zinssätzen i_m, dann entwickelt sich ein Kapital K zu $K_{rück}$ nach der Formel

(26) $$K_{rück} = K*(1+t_1*i_1)*(1+t_2*i_2)*\ldots*(1+t_n*i_n) ,$$

und ändert sich der Zinssatz innerhalb einzelner Perioden, dann ist zusätzlich wie in (20) vorzugehen.

1.7 Zinsen auf einem laufenden Konto

Ein Spar- oder Girokonto (Staffelkonto) bei vorgegebenen Konditionen und vorgegebenen Bewegungen über mehrere Zinsperioden bearbeiten zu können, ist eine Voraussetzung für den Begriff des effektiven Zinssatzes (den man sich tunlichst an der Entwicklung eines solchen Kontos klarmacht). Dabei erscheinen zunächst folgende Vorgehensweisen gleichwertig zu sein: (a) In jeder Zinsperiode werden für jeden Kontostand die Zinsen bis zum Zeitpunkt der Änderung dieses Kontostands (bzw. zum Ende der Periode) berechnet und am Ende (positiv oder negativ) kapitalisiert. (b) In jeder Zinsperiode werden für jede Bewegung die Zinsen bis zum Ende berechnet und dann (positiv oder negativ) kapitalisiert. (c) Für jede Bewegung werden die Zinsen über alle Perioden hinweg nach Formel (26) (positiv oder negativ) separat berechnet.

Bei (b) und (c) sind etwas souveränere Vorstellungen erforderlich: Negatives Kapital bringt negative Zinsen, bzw. jede Bewegung begründet sozusagen ein eigenes Konto, und die Rollen von Kreditnehmer und Kreditgeber können dabei laufend wechseln, während die Bedingungen gegenseitig gleich sind. Bei (a) sind solche Vorstellungen erst erforderlich, wenn negative Salden vorkommen können, also z.B. nicht beim Sparkonto, wohl aber beim Girokonto. Für dieses erweist sich (a) schließlich als einzig korrekte Methode, weil positive Bestände mit einem anderen Zinssatz verzinst werden (i.a. 0 % bis 0,5 %) als negative (ca. 9 % und höher) und dieses Splitting bei einer separaten Auswertung einzelner Bewegungen nicht erfaßt wird. (Es ist übrigens nichts gegen dieses

Zinssatz-Splitting einzuwenden, sondern nur gegen die Höhe der Differenz zwischen Haben- und Sollzinsen.)

Auf einem Giro- oder normalen Sparkonto werden die Zinsen für eine Ein- oder Auszahlung ***nicht erst 1 Jahr*** (allgemeiner: eine volle Periode) ***danach, sondern schon mit Ablauf des jeweiligen Kalenderjahrs*** (-monats o.ä.) kapitalisiert; eine organisatorische Vereinfachung ähnlich der Sparkassen-Konvention (23).

1.8 Zinsperioden nach Kalenderjahr oder nach Laufzeitbeginn?

Bei Krediten mit exakt gleichen Bedingungen können sich unterschiedliche Rückzahlungsbeträge ergeben, je nach dem, an welchem Tag im Jahr ihre Laufzeit beginnt: "**Eine Geldanlage über 1000 DM**
(27) **wird mit 6 % verzinst und läuft 4 Jahre. Die Zinsen werden am 31.12. jedes Kalenderjahres und am Ende der Laufzeit kapitalisiert.**" Man kann nun für verschiedene Anfangsdaten im 1. Kalenderjahr den ganzen Rückzahlungsbetrag am Ende der Laufzeit ausrechnen. Allgemein gilt bei t Zinstagen im ersten und 360-t Zinstagen ($0 \le t \le 360$) im letzten Kalenderjahr $K_{end} = 1000*(1+\frac{t}{360}*0{,}06)*(1+0{,}06)^3*(1+\frac{360-t}{360}*0{,}06)$. Für welches t ist K_{end} am größten, für welches am kleinsten? Es kommt nur auf den ersten und den letzten Faktor an, und man kann die Aufgabe so auffassen, daß man in einem Jahr der Laufzeit eine zusätzliche Zinskapitalisierung einführt und deren Termin so legen soll, daß der effektive Zinssatz maximal wird.

Für t=360-t, d.h. t=180, d.h. wenn die Zinsperioden im 1. und 5. Jahr gleichlang sind, ist der Rückzahlungsbetrag am größten: 1263,55 DM; für t=0 (oder t=360) ist er am kleinsten: 1262,48 DM. Es empfiehlt sich, für diese und weitergehende Überlegungen die beiden Faktoren auszumultiplizieren: $(1+0{,}06+t*(360-t)*\frac{0{,}06^2}{360^2})$ und nur den variablen Ausdruck $t*(360-t)$ zu betrachten, dessen Verhalten bequem ohne Differentialrechnung analysiert werden kann. Man erkennt dabei auch, daß die zu erzielenden Unterschiede (über 6 % hinaus) sehr klein sind.

Grundsatz: Für die Berechnung des effektiven Zinsatzes nach der PAngV werden die gerade erörterten Schwankungsmöglichkeiten aus-
(28) geschlossen und die ***Zinskapitalisierungs-Zeitpunkte*** immer nach vollen Jahren der ***Laufzeit*** angenommen. Im Beispiel (27) beträgt der effektive Zinssatz also 6 % und nicht 6,02 % in 4 Jahren (bzw. sogar 6,09 % in 1 Jahr). Ab jetzt werden also nicht mehr Kalenderzeitpunkte, sondern nur noch Laufzeitpunkte betrachtet.

1.9 Gebühren, Kurse

Eine weitere Möglichkeit der Geldinstitute, den für ihre Kredite effektiven gegenüber dem nominalen Zinssatz zu erhöhen, ist, wie erwähnt, die Erhebung von Gebühren i.a. am Anfang der Laufzeit,
(29) z.B.: **"2 % vom *Auszahlungs*betrag K_{aus}. Möge dieser 10 000 DM lauten"**, dann beträgt das Darlehen sofort K = 10 200 DM, und dieser Betrag wird über die Laufzeit (z.B. mit 8 % in 3 Jahren) verzinst, so daß am Ende $K_{rück} = 10000*1{,}02*1{,}08^3 = 12\,849{,}06$ (DM) zu zahlen ist und der effektive Zinssatz sich mittels der Gleichung $10000*(1+x)^3 = K_{rück}$ auf $x = \sqrt[3]{1{,}02*1{,}08^3} - 1 = 1{,}08*\sqrt[3]{1{,}02} - 1 = 8{,}72$ % beläuft. D.h. 8 % von 10 200 DM entspricht (im Laufe von 3 Jahren) 8,72 % von 10 000 DM; und das ist die allein interessante Zahl. Es kommt nach wie vor nur auf den Quotienten aus Rück- und Auszahlungsbetrag (und die Laufzeit) an; der Gebührenfaktor ist in den Gesamtfaktor (11) einzubeziehen (die Reihenfolge der Faktoren spielt ja - wie mehrfach betont - keine Rolle).

Die Behandlung der Gebühren ist für den Kreditnehmer häufig noch etwas ungünstiger, nämlich wenn der Gebührensatz sich nicht auf den Auszahlungsbetrag, sondern auf den ***Darlehens*betrag** K bezieht:
(30) **"Bei einer Auszahlung von 10 000 DM und einem Gebührensatz von 2 %"** gilt mit dem noch unbekannten Darlehensbetrag K die Beziehung $K*(1-0{,}02) = 10\,000$, also $K = \frac{10\,000}{0{,}98} = 10\,204{,}08$ (DM). Man muß sich also 10 204,08 DM leihen, um 10 000 DM zu erhalten. Hier spricht man von einem ***Disagio*** (Abgeld), die oben beschriebene Variante heißt ***Agio*** (Aufgeld). Ist der Auszahlungsbetrag K_{aus} und der Gebührensatz g, dann berechnet sich der zu verzinsende Darlehensbetrag so:

(31) Agio: $K = K_{aus}*(1+g)$ Disagio: $K = \frac{K_{aus}}{1-g}$.

Mit Laufzeit n und nominalem Zinssatz i ist der Ansatz für die Berechnung des effektiven Zinssatzes x dann

(32) $K_{aus}*(1+x)^n = K*(1+i)^n$ und $x = (1+i)*\sqrt[n]{\frac{K}{K_{aus}}} - 1$.

Setzt man schließlich noch b für den Anteil des Auszahlungsbetrags am Darlehensbetrag, also $K_{aus} = b*K$, also $b = 1-g$ im Falle des Disagios und $b = \frac{1}{1+g}$ im Falle des Agios, dann ist

(33) $x = (1+i)*\sqrt[n]{\frac{1}{b}} - 1$.

Bei positivem Gebührensatz g (das bedeutet b<1) ist der Darlehensbetrag K natürlich größer als der Auszahlungsbetrag; und bei gegebenem Auszahlungsbetrag K_{aus} und Gebührensatz g (0<g<1) ist der Darlehensbetrag K im Falle des Disagios höher als im Falle des Agios, da $\frac{1}{1-g} > 1+g$, da $1 > 1-g^2$. Läge z.B. in (29) Disagio vor, dann würde sich der effektive Zinssatz auf 8,73 % belaufen.

Auch der Kurs von festverzinslichen Wertpapierten (s. Abb. 5) stellt eine Art (Dis-) Agio dar. Ein Kurs von 100,6 % heißt, für eine Obligation über 1000 DM muß man zwar 1006 DM bezahlen, aber verzinst wird nur der Nennwert von 1000 DM, so daß der Rückzahlungsbetrag $1000*1{,}06^5 = 1338$ (DM) lautet (im Moment sei das Faktum vernachlässig, daß die Zinsen bei dieser Anlageart nicht kumuliert, sondern jährlich ausgezahlt werden) und der effektive Zinssatz $\sqrt[5]{\frac{1338}{1006}} - 1 = 5{,}87$ % ist. Bezeichnet man den Nennwert (der Betrag, der verzinst wird) mit K, den zu zahlenden Betrag mit K_{aus} und den Kurs mit b, so ergeben sich für die Kursrechnung inhaltlich und formal die Formeln (32) und (33); allerdings kann man nicht mehr einheitlich von Auf- oder Abgeld reden, da der Kurs auch unter 100 % liegen kann.

Obligationen und andere festverzinsliche Wertpapiere werden von ihren Ausgebern erst zum Laufzeitende zurückgekauft (anders als etwa Schatzbriefe); sie können aber im Handel ver- und gekauft werden. Da ihr Zinsertrag immer gleichbleibend ist, während der

Abb. 5

Zinssatz am Markt sich laufend ändert, käme jedoch i.a. kein Handel zustande, wenn der Kaufpreis immer der Nennwert wäre. In Zeiten niedrigen Marktzinssatzes würde niemand seine (dann relativ hoch verzinslichen) Obligationen ***verkaufen***; in Zeiten hohen Marktzinssatzes würde sie niemand ***kaufen***. Geregelt werden Angebot und Nachfrage wie bei jeder Ware über den Preis, der hier Kurs genannt und in Prozent vom Nennwert angegeben wird. Ist der Marktzinssatz niedrig, steigt der Kurs und der effektive Zinssatz des Wertpapiers sinkt; und umgekehrt. Über den Kurs wird also der effektive Zinssatz dem Marktzinssatz angepaßt. (Häufig setzt auch schon der Ausgeber einen Kurs abweichend von 100 % fest.) Dieser Mechanismus spiegelt sich direkt in den Kurs-Übersichten der Zeitungen etwa für Anleihen wieder: Papiere, die in Hochzins-Zeiten mit einem hohen nominalen Zinssatz ausgestattet wurden, haben einen hohen Kurs; und umgekehrt (s. Abb. 6).

Bundesanleihen

		01-09-1988	31-08-1988
6,5	v 78 II (88)	100,30	100,25 G
5,75	v 78 (90)	99,90	99,90 EG
6	v 78 II (93)	99,45	99,40 G
7,25	v 79 I (89)	100,80 G	100,80
6,75	v 79 (89)	100,35	100,35 G
7,5	v 79 I (89)	101,25	101,25
8	v 79 I (89)	101,80	101,85
8	v 79 II (89)	102,05	102,00
7,5	v 79 II (89)	101,70 EG	101,65
7,75	v 79 II (89)	102,20	102,10 bG
7,75	v 80 (90)	102,30 bG	102,25
10	v 80 (90)	105,90	105,90
8,25	v 80 I (90)	103,95	103,95
8,25	v 80 II (90)	104,50 G	104,50
9	v 81 (91)	106,50	106,45
10,25	v 81 (91)	110,40	110,45
10,75	v 81 (91)	112,35 bG	112,35
10	v 81 I (89)	102,30	102,30
10	v 81 II (91)	111,00 bG	111,00
9,75	v 82 I (92)	110,40	110,35
9,75	v 82 II (92)	110,85 bG	110,80 bG
9,5	v 82 (92)	110,40	110,30
9	v 82 I (92)	109,00	108,95
9	v 82 II (92)	109,55 G	109,50
8,5	v 82 (92)	107,60	107,55 G
8,75	v 82 (92)	109,00 bG	108,95
7,75	v 82 I (90)	103,60	103,45
7,75	v 82 II (92)	105,65	105,70
7,5	v 83 I (93)	104,80 bG	104,75
7,5	v 83 II (93)	104,85	104,80
7,5	v 83 III (91)	103,60	103,55
8,25	v 83 I (93)	107,65	107,75
8	v 83 (93)	106,80	106,80
8,25	v 83 II (93)	107,80	107,80
8,25	v 83 III (93)	108,05	108,05 bG
8,25	v 83 IV (93)	108,15	108,15
8,25	v 83 V (93)	108,20 G	108,20
8	v 84 (94)	107,00	107,00
8,25	v 84 I (94)	108,20	108,05
8,25	v 84 II (94)	108,15	108,10
8,25	v 84 III (94)	108,35	108,35
8,25	v 84 IV (94)	108,35	108,30
8,25	v 84 V (94)	108,45	108,35
7,5	v 84 (94)	104,85 bG	104,80
7	v 84 (94)	102,50	102,50
7	v 85 I (95)	102,30	102,25
7,25	v 85 I (95)	103,45	103,45
7,625	v 85 (95)	105,40	105,30
7,5	v 85 (95)	104,70	104,65
7,25	v 85 II (95)	103,45	103,45
7	v 85 II (95)	102,15 bG	102,10
6,75	v 85 (95)	100,80	100,80
6,5	v 85 (95)	99,45 bG	99,40
6,375	v 86 I (96)	98,35	98,20
6,375	v 86 II (96)	98,20 G	98,20 bG
6	v 86 I (98)	94,65	94,60
5,75	v 86 I (96)	94,35	94,20
6	v 86 II (16)	83,05	83,00
5,75	v 86 II (96)	94,20	94,10
5,5	v 86 (96)	92,55	92,45
5,625	v 86 (16)	77,80	77,80
6	v 86 III (98)	94,40	94,35
6,5	v 86 (96)	98,65	98,50 EG
6,125	v 87 I (97)	96,05	95,95 bG
5,75	v 87 (97)	93,60	93,50 EG
6	v 87 (97)	95,10	95,00
5,5	v 87 (97)	91,75 bG	91,60
6,125	v 87 II (97)	95,80 bG	95,70
6,375	v 87 I (97)	97,45 bG	97,35
6,75	v 87 (97)	99,95 bG	99,90
6,375	v 87 II (97)	97,55	97,50
6,375	v 88 (98)	97,35	97,25
6,25	v 88 (98)	96,50	96,40
6,125	v 88 (98)	95,65 bG	95,60 EG
6,5	v 88 (98)	98,20	98,15
6,75	v 88 (98)	99,80	99,80

Bahnanleihen

		01-09-1988	31-08-1988
6,5	v 77 (89)	100,50	100,50 G
6	v 78 I (90)	100,10	100,05
8	v 79 (89)	101,75	101,75
8	v 80 I (92)	105,05	105,10
8	v 80 II (90)	103,30 G	103,30
9	v 81 (91)	106,45	106,45
10,5	v 81 (91)	111,20	111,30
10,25	v 81 (91)	111,20	111,25
10	v 82 (92)	111,15	111,15
9,5	v 82 (92)	110,55	110,55
8	v 82 (92)	106,05	106,05
7,75	v 83 (93)	105,20	105,15
8,25	v 83 (93)	107,85	107,85
8,25	v 84 (94)	108,40	108,40
7,25	v 84 (94)	103,10	103,10
7,12	v 85 (95)	102,35	102,30
7	v 85 (95)	101,55	101,45
6,375	v 86 (96)	97,85	97,70
6	v 86 (98)	93,55	93,55
6,5	v 86 (96)	98,20	98,10
6,125	v 87 (97)	95,50	95,45
6,25	v 87 (97)	96,15	96,15
6,625	v 87 I (97)	98,35	98,25
6,625	v 87 II (97)	98,30	98,20

Postanleihen

		01-09-1988	31-08-1988
8	v 80 (90)	102,80	102,70
7,75	v 80 (90)	103,30	103,25
8,75	v 80 (90)	105,45	105,40
10	v 81 (89)	101,95	101,90
10,25	v 81 (89)	103,10	103,05
10,5	v 81 (91)	111,90	111,90
8,5	v 82 (92)	107,60	107,60 G
8,75	v 82 (92)	108,15	108,15 G
9,75	v 82 (92)	110,65	110,65
7,75	v 83 (93)	105,25	105,25
8,5	v 83 (93)	108,60	108,60
8,25	v 84 (94)	107,60	107,50
8	v 84 (94)	106,95	106,90
7	v 85 (97)	101,00	100,95
6,50	v 85 (95)	99,10	99,00 bG
6,625	v 85 (95)	99,60	99,55
5,75	v 86 (01)	89,00	89,00
6	v 86 (96)	95,40	95,40
6,25	v 87 (97)	96,15	96,20
6	v 87 (97)	94,65	94,75
6,75	v 87 (97)	99,45	99,45
6,5	v 87 (97)	97,55	97,60
6,25	v 88 (98)	95,65	95,65

Bundesobligationen

		01-09-1988	31-08-1988
8	S 43 v 83 (88)	100,75	100,75
8,25	S 44 v 83 (88)	100,80	100,75
8	S 45 v 84 (89)	100,80	100,80
7,5	S 46 v 84 (89)	101,05	101,00
7,75	S 47 v 84 (89)	101,15 bG	101,10 bG
7,75	S 48 v 84 (89)	101,85	101,75 bG
7,5	S 49 v 84 (89)	101,85 EG	101,85
7,25	S 50 v 84 (89)	101,75	101,65 G
7	S 51 v 84 (89)	101,45	101,35
6,75	S 52 v 84 (89)	101,30	101,15
7,25	S 53 v 85 (90)	101,90	101,80 bG
7	S 54 v 85 (90)	101,60	101,50
6,75	S 55 v 85 (90)	101,40	101,30
6,5	S 56 v 85 (90)	101,05	100,95
6,25	S 57 v 85 (90)	100,65	100,55
6,75	S 58 v 85 (90)	101,65	101,55
6,5	S 59 v 85 (90)	101,15	101,05
6,25	S 60 v 86 (91)	100,60 EG	100,50
6	S 61 v 86 (91)	100,00	99,85
5,75	S 62 v 86 (91)	99,40 bG	99,25
5,5	S 63 v 86 (91)	98,80	98,60 bG
5,5	S 64 v 86 (91)	98,80	98,60 bG
5,25	S 65 v 86 (91)	98,00	97,80
5,75	S 66 v 86 (91)	99,30	99,10
5,5	S 67 v 86 (91)	98,45	98,30 bG
5,25	S 68 v 87 (92)	97,60	97,45
5	S 69 v 87 (92)	96,50	96,35 bG
5,25	S 70 v 87 (92)	97,10	96,95
5,5	S 71 v 87 (92)	97,95	97,85
5,75	S 72 v 87 (92)	98,70	98,65 G
6	S 73 v 87 (92)	99,60 bG	99,55
5,5	S 74 v 87 (92)	97,75	97,70
5,25	S 75 v 88 (93)	96,30 bG	96,25
5	S 76 v 88 (93)	95,35	95,30
5,25	S 77 v 88 (93)	96,05	95,95
5,5	S 78 v 88 (93)	96,85	96,80

Abb. 6

(34) Muster-Aufgabe: **"Wie hoch muß der Kurs sein, damit bei einer bestimmten Laufzeit und einem bestimmten nominalen Zinssatz ein bestimmter effektiver Zinssatz erreicht wird?"**

1.10 Nicht-ganzjährige Laufzeiten

Das Auftreten einer kürzeren Periode kann aber nicht mehr vermieden werden, wenn die Laufzeit ***insgesamt*** nicht **ganzjährig** ist. Wer z.B. Wertpapiere an- oder verkauft, muß dabei **häufig** für Laufzeiten n+t mit $n \in N_0$ und $0<t<1$, i.a. $360*t \in N$, Renditen (effektive Zinssätze) ermitteln. Im Anschluß an die Sparkassen-Konvention (23) sind dann die Zinsen n-mal nach vollen Jahren und noch einmal nach der Zeitspanne t zu kapitalisieren:

(35) $K_{aus}*(1+x)^n*(1+t*x) = K_{rück}$

Diese Formel läßt sich i.a. nicht nach x auflösen, vielmehr muß x durch Probieren (d.h. iterativ) ermittelt werden. Als Ausgangs-

wert kann x' aus der Gleichung $(1+x')^{n+t} = \frac{K_{rück}}{K_{aus}}$ genommen werden, der schon recht gut, aber immer ein wenig zu hoch ist, da $1+x <$
(36) $(1+\frac{x}{p})^p$ für p>1 und x>0. Ein Beispiel: **"Sei n=4,** $t=\frac{3}{4}$, $\frac{K_{rück}}{K_{aus}} =$ 1,5", dann ist $x' = \sqrt[4,75]{1,5} - 1 = 8,911$ %, und für die linke Seite l(x) von (35) ergibt sich (mit $K_{aus} = 1$):

x	8,9 %	8,89 %	8,895 %
l(x)	1,5002864	1,49963	1,4999581

, also x = 8,90 %.

Die Erfordernis iterativen Vorgehens, die man eigentlich erst bei den Problemen in Kap. 2 vermutet, tritt also schon hier auf.

2. Darlehen mit mehreren Rückzahlungen

Bei sehr vielen Geldgeschäften ist der Sonderfall mit einer Auszahlung am Anfang und einer Rückzahlung am Ende nicht erfüllt, vielmehr verteilen sich die Rückzahlungen auf mehrere Raten während der Laufzeit. Da gibt es mehrere Grundtypen:

(37) Am Ende jeder Zinsperiode werden genau die in ihr angefallenen Zinsen und am Laufzeitende zusätzlich das Darlehen selbst zurückgezahlt (Typ A beim Bundesschatzbrief, s. Abb. 1; Zwischenfinanzierung eines Bauspardarlehens; klassisch: Rentenrechnung).

(38) Am Ende jeder Zinsperiode werden genau die in ihr angefallenen Zinsen und (bei Laufzeit n) $\frac{1}{n}$ des Darlehens zurückgezahlt (klassisch: Tilgungsrechnung).

(39) Am Ende jeder Zinsperiode wird ein und derselbe Betrag zurückgezahlt (Annuitäten-Darlehen; klassisch: Tilgungsrechnung).

(40) Am Laufzeitende werden das Darlehen und Zinsen mit Zinseszinsen zurückgezahlt (Sonderfall, der in Kap. 1 behandelt ist).

(41) Die Rückzahlungen werden in einer sonstigen Weise auf die Periodenenden der Laufzeit verteilt.

(42) Auch die Auszahlung wird auf mehrere Perioden verteilt, die aber alle ***vor*** allen Perioden mit Rückzahlungen liegen (Lebensversicherung, Prämiensparen usw).

Vorläufig wird (42) nicht betrachtet. Außerdem sollen zunächst die Periodenlängen immer 1 Jahr betragen und die Zahlungen nur an Jahresenden stattfinden (so daß vorerst Kredite mit monatlichen Zahlungen nicht bzw. nur verfälscht behandelt werden können).

(43) Das Erreichen des ***Laufzeitendes*** ist gleichbedeutend damit, daß das Darlehen samt Zinsen für zurückgezahlt erklärt wird, und sei es dadurch, daß eine etwaige Restschuld durch ein neues Darlehen o.ä. abgedeckt wird. Bei dieser Auffassung löst sich der Begriff der Restschuld i.e.S. auf, da sie immer als Rückzahlung zum Laufzeitende zu verstehen ist. Bzw. umgekehrt: Nach jedem vollen Jahr der Laufzeit kann man so tun, als ob jetzt das Geldgeschäft abgeschlossen werden soll, und fragen, wie hoch dann die Restschuld wäre. So kann man sich jederzeit einen Überblick über den Stand des Darlehens verschaffen und die Zahlungen in einen Tilgungs- und einen Zinsanteil trennen. Diese Trennung, und damit die Typisierung (37)-(42), wird sich finanzmathematisch als gegenstandslos herausstellen (infolge des ***Vergiß-Prinzips*** (71)), sie kann aber betriebswirtschaftlich und steuerlich bedeutungsvoll sein.

2.1 Tilgungspläne

(44) **"Ein Darlehen über 8000 DM soll im Laufe von 5 Jahren gleichmäßig zurückgezahlt werden. Jedes Jahr sollen auch die Zinsen gezahlt werden. Zinssatz 7 %."** Tilgungsplan:

Jahr	Anfangsbestand	Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	560	1600	2160
2	6400	448	1600	2048
3	4800	336	1600	1936
4	3200	224	1600	1824
5	1600	112	1600	1712
6	0			

Möglich ist auch ein veränderlicher Zinssatz. Häufig werden die Bedingungen dann so abgefaßt, daß die Rückzahlungsraten (evtl. außer der ersten oder letzten) gleich hoch sind, z.B.: **"Ein Dar-**
(45) **lehen von 8000 DM soll in 5 Jahren mit jährlich 2160 DM (einschließlich Zinsen) zurückgezahlt werden."** Hier interessiert, welcher Zinssatz dabei wohl zugrunde gelegt ist. Tilgungsplan:

Jahr	Anfangsb.	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zinssatz (in %)
1	8000	560	1600	2160	7
2	6400	560	1600	2160	8,75
3	4800	560	1600	2160	11,67
4	3200	560	1600	2160	17,5
5	1600	560	1600	2160	35

Die spontane **Vermutung '7 %'** erweist sich als falsch; der Zinssatz liegt deutlich höher, wie sich aus der letzten Spalte oder aus dem Vergleich mit dem Tilgungsplan von (44) ergibt. Im ersten Jahr stimmt der Wert noch, aber dann bezieht sich derselbe Zinsbetrag auf ein immer niedrigeres Kapital, und das bedeutet einen immer höheren Zinssatz. Als Faustregel: In den 5 Jahren hat man im Durchschnitt 4800 DM als Darlehen zur Verfügung, dann bedeutet ein Zinsbetrag von 560 DM jährlich einen Zinssatz von 11,67 %, und dieser ist fast doppelt so hoch wie der Anfangs-Zinssatz.

Ehe die PAngV dem einen Riegel vorschob, war es üblich, bei Konsumentenkrediten, die durchweg (mit monatlichen, den Effekt noch steigernden Zahlungen) nach dem Muster von (45) gestaltet werden, den nur in der ersten Periode zutreffenden Zinssatz zu nennen (der noch nicht einmal den Namen 'nominaler Zinssatz' verdient) und damit den tatsächlich angesetzten Zinssatz systematisch um die Hälfte zu niedrig anzugeben.

Man trifft dieses Phänomen auch heute noch: **"Wer seine Versicherungsprämie (Auto, usw.) nicht auf einen Schlag am Jahresanfang,**
(46) **sondern etwa verteilt auf die 4 Quartale mit einem ('nominal') 5 %-igen Aufschlag zahlt, wird faktisch mit über 14 % belastet und bei halbjährlicher Zahlung mit 3 % Aufschlag immer noch mit über 12 %"** (Ausrechnung s. (141) in Abschn. 2.8).

Zurück zu Problem (45): Der o.a. Tilgungsplan ist - jedenfalls unmittelbar - nicht geeignet, den vom Darlehensgeber angenommenen Zinssatz herauszufinden. Der Fehler bestand darin, daß neben der jährlichen Gesamtzahlung auch die Aufteilung in Zinsen und Tilgung als konstant vorausgesetzt wurde: Die Unterstellung eines konstanten Zinssatzes für die ganze Laufzeit impliziert aber ***abnehmende Zinsbeträge***, da ja infolge laufender Tilgung das zu verzinsende Kapital dauernd kleiner wird, und damit ***zunehmende Tilgungsbeträge***. Und: Diese Zunahme ist nicht linear, sondern wird immer schneller. Ein Versuch mit 12 % ergibt folgenden Tilgungsplan (Zins-Spalte immer als vorletzte und Tilgungs-Spalte als letzte eintragen):

Jahr	Anfangsbestand	12 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	960	1200	2160
2	6800	816	1344	2160
3	5456	655	1505	2160
4	3951	474	1686	2160
5	2265	272	1888	2160
6	377			

Offenbar ist der Wert 12 % zu hoch, da sich bei ihm eine Restschuld nach 5 Jahren von 377 DM ergibt. Der 'wahre' Wert läßt sich (so) nicht berechnen. Man kann ihn aber auf *iterativem* Wege
(47) ermitteln, indem man den Tilgungsplan programmiert und, ausgehend etwa von den Werten 7 % und 12 %, den Zinssatz durch Intervallhalbierung einschachelt. Der nächste Wert wäre 9,5 %; ist die Restschuld positiv, muß man im unteren, ist sie negativ, muß man im oberen Intervall fortsetzen. Man hört auf, wenn der Betrag der Restschuld z.B. < 1 ist (wenn man mit Pfennigen rechnet), und erhält (auf zwei Stellen hinter dem Komma genau) 10,92 %.

In geschlossener Form läßt sich aber folgende Frage beantworten:
(48) **"Ein Darlehen über 8000 DM wird mit 7 % verzinst und mit jährlichen Rückzahlungsraten (einschließlich Zinsen) von 1500 DM getilgt. Wie lange läuft es?"**

Jahr	Anfangsbestand	7 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	560	940	1500
2	7060	494,20	1005,80	1500
3	6054,20	423,79	1076,21	1500
4	4977,99	348,46	1151,54	1500
5	3826,45	267,85	1232,15	1500
6	2594,30	181,60	1318,40	1500
7	1275,90	89,31	1275,90	1365,21

Es läuft 7 Jahre; die letzte Rate ist jedoch etwas niedriger.

(49) Varianten: "**Wie lange dauert es bei Rückzahlungsraten von 600 DM, 561 DM, 560 DM, 500 DM unter sonst gleichen Bedingungen?**"

(50) Weitere Fragestellungen: "**Wie hoch muß ein Kapital sein, um bei einem Zinssatz von 7,5 % eine ewige Rente von jährlich 1500 DM (nachschüssig) abzuwerfen?**" 20 000 DM. - "**Wie hoch, falls die**

(51) **Rente 20 Jahre lang laufen soll?**" Aus $K*1{,}075^{20} = R*\frac{1{,}075^{20}-1}{0{,}075}$ und $R = 1500$ ergibt sich 15 292 DM. Es ist bemerkenswert, daß dieser Betrag nach 20 Jahren völlig aufgebraucht ist, während der in (50) dann noch komplett erhalten ist.

Oder: "**Wie hoch muß die jährliche Zahlung (*Annuität*) sein, wenn**

(52) **ein Darlehen von 8000 DM bei einem Zinssatz von 9 % in 6 Jahren getilgt ist?**" Aus $K*1{,}09^6 = R*\frac{1{,}09^6-1}{0{,}09}$ und $K = 8000$ ergibt sich $R = 1783{,}36$ (DM). Die Annuität ist offenbar proportional zum Auszahlungsbetrag und wird günstigerweise gleich als Prozentsatz davon angegeben: $\frac{1{,}09^6 * 0{,}09}{1{,}09^6 - 1} = 22{,}29$ %. "**Wie hängt der Quotient aus**

(53) **Annuität und Auszahlungsbetrag von der Laufzeit bzw. vom Zinssatz ab?**" (Fragen, die sich der Darlehensgeber (die Bank) zu stellen hat, wenn er die Annuität festlegen will.)

2.2 Aufzinsung

"**Ein Darlehen über 8000 DM läuft 5 Jahre. In dieser Zeit wird es**

(54) **nacheinander je ein Jahr lang mit 7 %, 6 %, 5 %, 7 % und 8 % verzinst. Die ersten vier Rückzahlungsbeträge belaufen sich auf**

2000 DM, 2200 DM, 1500 DM und 2000 DM. Wie hoch ist der letzte?" (Ähnlich (48).)

Jahr	Anfangsbetr.	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zinssatz (%)
1	8000	560	1440	2000	7
2	6560	394	1806	2200	6
3	4754	238	1262	1500	5
4	3492	244	1756	2000	7
5	1736	139	1736	1875	8

Als Gleichung anstelle des Tilgungsplans ergibt sich

(55) $((((-8000*1{,}07 + 2000)*1{,}06 + 2200)*1{,}05 + 1500)*1{,}07 + 2000)*1{,}08 + x = 0$

und durch Ausmultiplizieren die dazu äquivalente Gleichung

(56)
$$\begin{array}{ll} -8000 & *1{,}07*1{,}06*1{,}05*1{,}07*1{,}08 \\ +\ 2000 & *1{,}06*1{,}05*1{,}07*1{,}08 \\ +\ 2200 & *1{,}05*1{,}07*1{,}08 \\ +\ 1500 & *1{,}07*1{,}08 \\ +\ 2000 & *1{,}08 \\ +\ x & = 0\ . \end{array}$$

(Es ist klar, **daß** Aus- und Rückzahlungen verschiedene Vorzeichen haben; **man muß** es nur für einen der beiden Typen **festlegen**, und zwar ***beliebig***. In dieser Arbeit sind Gutschriften für den Darlehensnehmer positiv.)

(57) Man kann also jede einzelne Zahlung separat als ein Kapital betrachten, das vom Zeitpunkt der Leistung bis zum Laufzeitende mit den in dieser Zeit gültigen Zinssätzen verzinst wird (***aufzinsen***). Die inhaltliche Entsprechung dieser formalen Umwandlung lautet: Der zu einem bestimmten Zeitpunkt m erreichte Darlehensstand K_m wird um die an diesem Zeitpunkt stattfindende Rückzahlung R_m vermindert. Dieser Betrag fehlt am Darlehen bei dessen weiterer Entwicklung, d.h. an jedem späteren Zeitpunkt fehlt genau der entsprechend aufgezinste, von R_m herrührende Betrag. Erklärung (43)

über das Laufzeitende bedeutet dann gerade, daß die Summe der aufgezinsten Rückzahlungen genau so groß wie die aufgezinste Auszahlung ist, daß also folgendes Gleichgewicht besteht:

(58) $K*q_1*q_2*...*q_n = R_1*q_2*q_3*...*q_n + R_2*q_3*q_4*...*q_n + ... + R_{n-1}*q_n + R_n$

(Dabei ist n die Laufzeit in Jahren, K>0 die Auszahlung, und für $m=1,...,n$ ist $R_m \geq 0$ die Rückzahlung und $q_m=1+i_m$ der Zinsfaktor im Jahr m.) Ist K, ein R_m oder ein q_m unbekannt, dann ist (58) eine Bestimmungsgleichung dafür (z.B. (54) für R_n). Häufig hat man einen konstanten Zinssatz, d.h. $q_1=q_2=...=q_n=:q$ (und $i=q-1$), oder einen konstanten Rückzahlungsbetrag (eventuell außer dem letzten oder ersten), d.h. $R_1=R_2=...=R_{n-1}=R_n=:R$ (eventuell $R_n \neq R$ oder $R_1 \neq R$), d.h. es liegt Darlehenstyp (39) (Annuitäten-Darlehen) vor, und Gleichung (58) vereinfacht sich zu

(59) $K*q^n = R*(q^{n-1}+q^{n-2}+...+q+1)$ $\quad$ $\left(= R*\frac{q^n-1}{q-1}\right.$, falls $q \neq 1$; $= n*R$, falls $q=1$).

(60) Der Faktor $\frac{q^n-1}{q-1}$ heißt ***Rentenfaktor***, weil er durch die Aufzinsung und Aufsummierung der beständig wiederkehrenden Leistung R, einer Rente, entsteht. Indem er n Summanden durch einen einzigen ersetzt, vereinfacht er die Auswertung von Gleichung (59) erheblich, besonders wenn q oder n gesucht ist. Bei seiner Herleitung sollte auch der Fall betrachtet werden, daß Anfangsglieder fehlen: $q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q^m = \frac{q^n-1}{q-1} - \frac{q^m-1}{q-1} = \frac{q^n-q^m}{q-1} = q^m*\frac{q^{n-m}-1}{q-1}$ ($0 \leq m<n$, $q \neq 1$). Steht der programmierbare Taschenrechner oder Computer zur Verfügung, ist der Rentenfaktor für das Rechnen nicht mehr unverzichtbar, da man die Reihe auch iterativ auswerten kann.

Bei Typ (37) ist $R = K*i$ und $R_n = K*q$ und damit (quasi tautologisch)

(61) $K*q^n = K*i*(q^{n-1}+...+q+1) + K$ $\quad$ $(= K*(i*\frac{q^n-1}{q-1}+1) = K*(q^n-1+1))$.

Bei Typ (40) schließlich ist $R = 0$ und $R_n = K*q^n$ (s. Kap. 1).

Man sieht (vor allem bei (58) und unter der Voraussetzung $q_m>1$, d.h. $i_m>0$ für alle m), daß eine Zahlung umso stärker ins Gewicht fällt, je früher sie liegt. Aufzinsen ist eine Bewertung der Zahlungen nach Höhe (sowieso) und Zeitpunkt: Je früher eine Zahlung liegt, desto höher wird sie bewertet. Zwischen den ***Netto-Zahlungen*** eines Geldgeschäfts besteht i.a. keine Gleichheit, sondern die Summe der Netto-Rückzahlungen ist i.a. größer als die Netto-Auszahlung, weil mit ihnen ja diese getilgt wird und zusätzlich Zinsen gezahlt werden. Da die Auszahlung früher liegt, wird sie durch die Aufzinsung in stärkerem Maße aufgewertet, besonders im Vergleich zu den ***späteren*** der Rückzahlungen, und so stellt sich dann das Gleichgewicht zwischen den ***aufgezinsten Zahlungen*** ein.

Sollen zwei Zahlungen äquivalent sein, so ist die früher liegende niedriger, weil sie durch die Aufzinsung stärker aufgewertet wird. Das sieht man schön beim Vergleich der Typen A und B von Bundesschatzbriefen in Abb. 1: Bei Typ A werden jährlich Rückzahlungen geleistet (in Höhe der gerade angefallenen Zinsen), nämlich (bei 1000 DM) 40 DM, 55 DM, 60 DM usw., während bei Typ B diese aufgezinst und erst am Ende gezahlt werden: $40*1{,}055*1{,}06*...= 60{,}01$ (DM), $55*1{,}06*... = 78{,}22$ (DM), usw. Die sonst nur rechnerisch vorgenommene Aufzinsung ist beim Typ B tatsächlich durchgeführt.

Sind 40 DM heute so viel wert wie 6 Jahre später 60,01 DM? Beim Bundesschatzbrief Typ B in Abb. 1 ist das so, jedenfalls wenn die Frage nach 1 Jahr gestellt wird. Beim Typ A könnte man die Frage nur bejahen, wenn man eine Möglichkeit zur Wiederanlage mit einer Laufzeit von 6 Jahren und einem Gesamtfaktor von $\frac{60{,}01}{40} = 1{,}50025$
(62) hätte (sog. ***Wiederanlage-Prämisse***). Dies wiederum hängt von allerlei externen Gegebenheiten, insbesondere vom Marktzinssatz ab.

Die im Anschluß an (57) vorgenommene inhaltliche Begründung der Aufzinsung basiert schon auf der Wiederanlage-Prämisse: Es wird nämlich unterstellt, daß das durch eine Rückzahlung frei werdende Kapital des Darlehensgebers in dem Fall, daß es gebunden bliebe, die Rückzahlung also unterbliebe, genauso zu verzinsen wäre wie das gebundene Kapital, daß die Rückzahlungsbeträge also zu den

Bedingungen des betrachteten Darlehens wieder angelegt werden könnten. Das klingt zwar plausibel, und man kann den entsprechenden Verlauf des Geldgeschäfts leicht hinschreiben, aber das wäre eben ein anderes als das tatsächliche. In der Finanzwirtschaft ist die Berechtigung der Wiederanlage-Prämisse durchaus umstritten. Auf jeden Fall tut man gut daran, deutlich zwischen rechnerischen Werten und tatsächlich durchgeführten Zahlungen zu unterscheiden und die rechnerischen Werte ***weniger als absolute*** und ***mehr als relative*** Beurteilungsmaßstäbe heranzuziehen.

Durch Aufzinsen werden Zahlungen (Kapitalien) vergleichbar gemacht, die zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen (realisiert werden). Den Wert eines aufgezinsten Kapitals zum Laufzeitende eines
(63) Geldgeschäfts nennt man ***Endwert***. Es kommen auch andere Bewertungszeitpunkte in Betracht, sogar solche, die *vor* der Realisierung liegen. Die Frage kann dann so gestellt werden: "**Welchen Wert hat eine Zahlung, die zum Zeitpunkt 7 in Höhe von 60,01 DM**
(64) **geleistet wird, zum Zeitpunkt 1 (beim Bundesschatzbrief Typ B, s. Abb. 1)?** Oder: **Welches zum Zeitpunkt 1 realisierte Kapital hat zum Zeitpunkt 7 den Wert 60,01 DM?**" Der Ansatz lautet

$$x*1{,}055*\ldots*1{,}08 = 60{,}01 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{60{,}01}{1{,}055*\ldots*1{,}08}\ .$$

Hier muß man ***abzinsen***. Als Bewertungszeitpunkt bietet sich der Laufzeitanfang an, und mit Benennungen wie bei (58) hat man als
(65) abgezinste Zahlungen K, $\frac{R_1}{q_1}$, $\frac{R_2}{q_1*q_2}$, ..., $\frac{R_n}{q_1*q_2*\ldots*q_n}$, die ***Barwert*** genannt werden. Dividiert man Gleichung (58) durch den Gesamtfaktor (11) $q_1*q_2\ldots*q_n$, so erhält man die Gleichung

(66) $$K = \frac{R_1}{q_1} + \frac{R_2}{q_1*q_2} + \ldots + \frac{R_n}{q_1*q_2*\ldots*q_n}$$

zwischen den Barwerten. Durch Multiplikation mit dem Anfangsstück $q_1*q_2*\ldots*q_m$ des Gesamtfaktors kann man alle Zahlungen bezogen auf einen beliebigen Bewertungszeitpunkt m ($0\leq m\leq n$) auf- bzw. abzinsen, und das (58) bzw. (66) entsprechende Gleichgewicht gilt bei jedem m. (66) bedeutet speziell, daß die Summe der Barwerte der Rückzahlungen gerade gleich der Auszahlung ist.

In der Finanzwirtschaft arbeitet man lieber mit Barwerten: Da lassen sich leichter Alternativen mit unterschiedlichen Laufzeiten vergleichen, die Laufzeit kann sogar (für theoretische Überlegungen) unendlich sein, und der Laufzeitanfang steht der betrieblichen Entscheidungssituation näher. Diese Argumente spielen für die weiteren Ausführungen in dieser Arbeit aber keine Rolle. Hier wird ***aufgezinst***, da diese Operation 'natürlicher' erscheint und die Gleichungen (58) usw. nur dann polynomial sind, wenn sie die Endwerte enthalten.

Der Ausdruck 'Barwert' erklärt sich leicht anhand folgender Aufgabe: "**Mit einer bestimmten Lebensversicherung erwirbt man sich**
(67) **einen Anspruch auf eine Rente von 10 000 DM, 20 Jahre lang immer am Jahresanfang zu zahlen. Als Alternative bietet die Versicherung eine einmalige sofortige (Bar-) Auszahlung von 120 000 DM.**" Um sich für eine dieser beiden Alternativen entscheiden zu können, sollten neben allerlei externen objektiven und subjektiven Gesichtspunkten, die z.T. nicht quantifizierbar sind, auch die finanzmathematischen 'Werte' verglichen werden, etwa indem man den Barwert der Rente (die Summe der Barwerte der 20 Zahlungen) ermittelt. Auch dabei spielt noch eine erhebliche Unsicherheit in der Annahme von Zinssätzen (für die nächsten 19 Jahre!) mit. Es ist üblich, daß man einen einheitlichen moderaten (quasi als mittleren) annimmt, der bei einer langfristigen Geldanlage zu erzielen wäre, z.B. 6 % (sog. ***Kapitalwert-Methode***). Dann ist der Barwert der Rente $10\,000 * (1+\frac{1}{1{,}06}+\frac{1}{1{,}06^2}+\ldots+\frac{1}{1{,}06^{19}}) = 10\,000 * \frac{(\frac{1}{1{,}06})^{20}-1}{\frac{1}{1{,}06}-1} = 121\,581$ (DM) und damit etwas günstiger als die Einmalzahlung.

Interessanter ist aber die Frage, "**bei welchem Zinssatz man genau**
(68) **auf 120 000 DM gekommen wäre, welchen Zinssatz also die Versicherung ihrer Kalkulation unterlegt hat**", die man wieder mittels einer Iteration beantworten könnte. Die Entscheidung für die Renten- und gegen die Einmalzahlung bedeutet, daß der Versicherung ein Darlehen über 120 000 DM zur Verfügung gestellt wird, das in 20 gleichen Jahresraten zu je 10 000 DM zurückgezahlt wird (genauer: ein Darlehen über 110 000 DM mit 19 Rückzahlungen zu je 10 000 DM, wegen der Vorschüssigkeit der Rentenzahlungen).

2.3 Der Zahlungsstrom und der effektive Zinssatz

Kennt man von einem Geldgeschäft die jährlich angewandten Zinssätze, so kann man dessen Wert dennoch nicht abschätzen, wenn man nicht weiß, wie sich die Rückzahlungen über die Laufzeit verteilen. **"Ein Darlehen über 1000 DM, einer Laufzeit von 5 Jahren und**
(69) **einem Zinssatz von 10 % in den ersten drei und von 1 % in den letzten beiden Jahren ist ungünstig, wenn nach 3 Jahren 1330 DM und am Ende 1,02 DM zurückgezahlt werden, und wesentlich günstiger, wenn nur am Ende 1357,75 DM zurückgezahlt werden"** (s. (78), (79), (85) bzw. (87)).

Umgekehrt reicht es für die Beurteilung sehr wohl zu wissen, wieviel in jeder Periode gezahlt wird, ohne die Zinssätze zu kennen. Ein Geldgeschäft ist finanzmathematisch vollständig durch das (n+1)-Tupel der in ihm stattfindenden Zahlungen, den ***Zahlungsstrom*** (cash flow)

(70) $(Z_0;\ Z_1;\ \ldots;\ Z_n)\ ,\ Z_0 \neq 0 \neq Z_n\ ,$

charakterisiert. Dabei sind Zahlungen mit unterschiedlichen Vorzeichen zu versehen, je nachdem ob sie vom Darlehensgeber (hier: negativ) oder -nehmer (hier: positiv) kommen. Am Anfang und Ende sollen tatsächlich Zahlungen stattfinden. In (58) ist also: $K = -Z_0$ und $R_m = Z_m$ für $m=1,\ldots,n$. Finden zu einem Zeitpunkt mehrere Zahlungen statt, so sind sie aufzuaddieren (zu saldieren). Es spielt keine Rolle, als was die Zahlungen betriebswirtschaftlich oder steuerlich aufzufassen sind (Tilgung, Zinsen, Gebühren, Provision o.ä.), entscheidend ist allein die Höhe der Zahlung, die aus dem Verfügungsbereich des einen in den des anderen Ge-
(71) schäftspartners gelangt (***Vergiß-Prinzip***).

Insbesondere werden keine reine Buchungen (z.B. Kontogebühren) berücksichtigt, wenn sie sich nicht als konkrete Zahlungen niederschlagen; einzige Ausnahme: eine Restschuld wird immer so behandelt, als ob sie gezahlt würde. Natürlich wirken sich auch reine Buchungen auf den Zahlungsstrom aus, indem sie z.B. die Laufzeit verändern und die Höhe der ***letzten*** Zahlung beeinflussen.

Beispiele:

(72)	Abb. 1, Schatzbrief B:	(-1000; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1560) bzw. (-1000; 6-mal 0; 1560)
(73)	Abb. 1, Schatzbrief A:	(-1000; 40; 55; 60; 70, 75; 1080)
(74)	Aufgabe (44):	(-8000; 2160; 2048; 1936; 1824; 1712)
(75)	Aufgabe (45):	(-8000; 5-mal 2160)
(76)	Aufgabe (48):	(-8000; 6-mal 1500; 1365,21)
(77)	Aufgabe (68):	(-110000; 19-mal 10000)
(78)	Aufgabe (69):	(-1000; 0; 0; 1330; 0; 1,02)
(79)	und:	(-1000; 4-mal 0; 1357,75)

(80) **"Würden bei (48) noch jährlich 15 DM Kontoführungsgebühr belastet"**, dann würde der Kontostand nach 7 Jahren um $15*(1{,}07^7 + 1{,}07^6 + \ldots + 1{,}07) = 15*\frac{1{,}07^8-1}{1{,}07-1} - 15 = 138{,}90$ (DM) auf 1504,11 DM erhöht; die Laufzeit würde um ein Jahr verlängert; und die letzte Rate betrüge $(4{,}11+15)*1{,}07 = 20{,}45$ (DM), der Zahlungsstrom würde also (-8000; 7-mal 1500; 20,45) lauten.

Die Unterscheidung der Darlehenstypen (37)-(41) ist durch das Vergiß-Prinzip hinfällig geworden. Sie alle sind charakterisiert durch die Bedingungen (eines 'normalen' Darlehens)

(81) $Z_0 < 0\ ;\ Z_m \geq 0$ für $m=1,\ldots,n-1;\ Z_n > 0\ .$

Bei Einschluß von (42) hat man ein m' mit $0<m'<n$ und

(82) $Z_0 < 0\ ;\quad Z_m \leq 0$ für $m=1,\ldots,m'-1;$
$Z_{m'} < 0\ ;\quad Z_m \geq 0$ für $m=m'+1,\ldots,n-1;\quad Z_n > 0\ .$

Das Problem noch allgemeinerer Geldgeschäfte, wo Aus- und Einzahlungen mehrfach wechseln können, kann hier nicht behandelt werden (ich verweise dazu auf Bender 1987a, b, 1988 und in Arbeit).

Offenbar ist der Zahlungsstrom, ein (n+1)-Tupel, zu unhandlich für z.B. den Vergleich zweier Geldgeschäfte. Man müßte jedes Geldgeschäft durch eine einzige Zahl charakterisieren und könnte diese Zahlen dann in eine Rangfolge bringen. Zu diesem Zweck wird nun der in Kap. 1 eingeführte Begriff des effektiven Zinssatzes auf Darlehen mit mehreren Rückzahlungen übertragen:

'Definition': Für ein Darlehen, also einen Zahlungsstrom (70) mit den Vorzeichenbedingungen (81) bzw. (82), ist der ***effektive Zinssatz*** derjenige Zinssatz x, mit dem sämtliche Zahlungen aufzuzinsen sind, so daß die Summe der Endwerte 0 ist, d.h. die Endwerte der Aus- und die der Rückzahlungen gerade im Gleichgewicht sind, also 'die' Lösung x der Polynomgleichung (83)

(84) $Z_0 * (1+x)^n + Z_1 * (1+x)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} * (1+x) + Z_n = 0$,

(mit dem Spezialfall (59) bei konstanter Rückzahlungsrate R, wobei $Z_0 = -K$ und $Z_m = R$ für $m=1,\ldots,n$ ist). Die inhaltliche Deutung ist die, daß ein für die gesamte Laufzeit konstanter Zinssatz gesucht ist, mit dem in jeder Periode das jeweils noch vorhandene Restdarlehen so verzinst wird, daß es, unter entsprechender Berücksichtigung der Rückzahlungen, am Laufzeitende gerade 0 beträgt. Im Falle einer einzigen Rückzahlung (Kap. 1) stimmt der Begriff (83) mit (16) überein.

2.4 Aufgaben zum effektiven Zinssatz

(85) **"Berechne für die Zahlungsströme (72)-(80) die effektiven Zinssätze."** Bei (72) und (79) hat man eine einzige Rückzahlung, und die Lösung läßt sich durch Radizieren in geschlossener Form angeben: 6,56 % bzw. 6,31 %. Bei (74) und (76) kennt man das Ergebnis bereits aus den Aufgaben (44) und (48), wo ja aufgrund des (inzwischen so bezeichneten) effektiven Zinssatzes die Zahlungsreihen erstellt worden waren: beidesmal 7 %.

Es ist zwar sinnvoll, diesen Wert durch Einsetzen in (84) zu überprüfen, man wird aber so gut wie nie genau 0 erhalten, und dann lautet die entscheidende Frage: Wie ist die Abweichung zu interpretieren? - Ist sie negativ, dann hätten bei dem angenommenen Zinssatz die Rückzahlungen nicht gereicht, um das Darlehen auf 0 zu bringen. Da sie aber gereicht haben, muß der Zinssatz

niedriger sein. - Ist sie positiv, dann muß er (mit der entsprechenden Argumentation) höher sein. - Sofort drängt sich nun die nächste Frage auf: Wie hoch ist er denn? Und schon ist man im Iterationsprozeß.

Ist die Abweichung klein, dann wird man den angenommenen Wert akzeptieren. Aber wie klein muß sie zu diesem Zweck sein? - Bei (76) erhält man z.B. mit x = 7 % für die linke Seite von (84) den Wert -0,01. Das ist offensichtlich klein genug, aber um wirklich sicher zu gehen, müßte man mit dem 'nächsten' Zinssatz probieren, bei $\frac{1}{100}$ % Genauigkeit also mit 6,99 %: Dafür erhält man 4,43, und der tatsächliche Zinssatz liegt offensichtlich viel näher an 7,00 %, so daß dieser zu wählen ist. Der Hintergrund dieser Argumentation ist der fast lineare Verlauf der linken Seite von (84) als Polynomfunktion von x in dem kleinen hier betrachteten Intervall; wollte man dieses Argument vermeiden, so müßte man mit x = 6,995% arbeiten: man erhielte 2,21 und wüßte damit sicher, daß der effektive Zinssatz im Intervall [6,995%; 7,005%[liegt, etwas unterhalb von 7 %.

Bei (73), (75), (77), (78) und (80) muß man iterativ vorgehen. Dies führe ich für (73) (Schatzbrief A) exemplarisch vor: Die linke Seite von (84) habe ich mit einem 30-DM-Taschenrechner programmiert. Den Eingabewert x überlege ich mir nach jedem Schritt neu. - Der effektive Zinssatz wird wohl etwas niedriger als beim Typ B (Aufgabe (72)) liegen; also fange ich mit 6,5 % an und erhalte -21,84. Er muß niedriger sein, in Anbetracht der Zinssätze in den Bedingungen bestimmt nicht niedriger als 6 %: Bei diesem ergibt sich 14,06, und das Ergebnis liegt tatsächlich zwischen 6 % und 6,5 %, und zwar etwas näher an 6 %; genauer: beim Wachsen des Zinssatzes von 6 % auf 6,5 % nimmt die linke Seite von (84) (etwa gleichmäßig) von 14,06 auf -21,84 ab und ist 0 etwa bei 6,2 % (klassische Interpolation).

Schätzungsweise kommt einer der Werte 6,18 %, 6,19 %, 6,20 %, 6,21 %, 6,22 %, d.h. eines der Intervalle [6,175 %; 6,185%[, [6,185 %; 6,195%[usw., in Frage. Protokoll der Iteration:

x	6,5	6	6,185	6,195	6,205	6,20 (%)
linke Seite von (84)	-21,84	14,06	0,88	0,17	-0,55	(DM)

(Eigentlich steht das Ergebnis schon nach der Berechnung für den Wert x = 6,195 % fest; die Auswertung für x = 6,205 % dient nur noch der Bestätigung.)

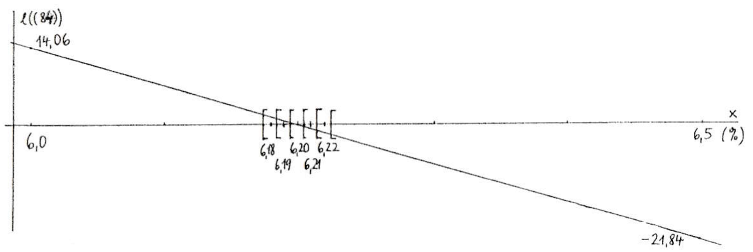


Abb. 7

Will man die Intervallschachtelung automatisch steuern, etwa mit einem Computer-Programm, so braucht man zunächst zwei Anfangszinssätze, von denen man sicher weiß, daß das Ergebnis im Intervall zwischen ihnen liegt. Mit z.B. 0 % und 1000 % erhält man im Fall eines realistischen Darlehens einen positiven und einen negativen Wert der linken Seite von (84). Dann wertet man diese an der Intervallmitte (hier: 500 %) aus, usw. (s. (47)). - Der begriffliche und programmiertechnische Aufwand, schneller konvergierende Verfahren oder Algorithmen für günstigere Startwerte zu programmieren, rentiert sich angesichts der kurzen Rechenzeiten heutiger (Klein-!) Computer nicht: In 20 Schritten ($2^{20} \approx$ 1 Mio) hat man die Intervallänge von 1000 % auf $\frac{1}{1000}$ % verkürzt.

Es fällt auf, daß der Schatzbrief A mit jährlicher 'Rück'zahlung der Zinsen schlechter ist als B mit Zinskumulation (s. Abb. 1), auch wenn dessen Laufzeit auf 6 Jahre verkürzt würde: B hätte
(86) dann den effektiven Zinssatz 6,32 %, A nur 6,20 %. Dies wird folgendermaßen plausibel: Anders als bei B ist bei A die Reihenfolge der tatsächlich anzuwendenden Zinssätze nicht mehr egal, weil diese den Zahlungsstrom beeinflußt. Da zur Ermittlung des effektiven Zinssatzes ***alle*** Zahlungen mit ein und demselben Faktor auf-

gezinst werden, ergeben die bei A später liegenden höheren Rückzahlungen insgesamt einen niedrigeren Endwert als bei B. Dieser Endwert bei A reicht aber nur dann schon zum Ausgleich der anfänglichen Auszahlung, wenn der effektive Zinssatz niedriger ist.

An dieser Stelle sei nochmals auf die Problematik der ***Wiederanlage-Prämisse*** (62) hingewiesen, die jetzt verschärft auftritt, wo der Wiederanlage-Zinssatz der effektive, also ein ganz und gar fiktiver, ist.

(87) Die anderen Ergebnisse: (75) 10,92 %; (77) 6,18 %; (78) 10,00 %; (80) 7,34 %. (Dabei können (75), (77) und (80) unter Benutzung des Rentenfaktors (60) mit dem ***einfachen*** Taschenrechner ausgewertet werden.) Man beachte den deutlichen Unterschied zwischen (78) und (79) (Aufgabe (69)) sowie zwischen (76) und (80) (Aufgabe (48)). Der Tilgungsplan für Aufgabe (45) (=(75)) sieht dann so aus (auf Pfennige genau):

Jahr	Anfangsbestand	10,92 % Zinsen	Tilgung	Zahlung
1	8000	873,60	1286,40	2160
2	6713,60	733,13	1426,87	2160
3	5286,73	577,31	1582,69	2160
4	3704,04	404,48	1755,52	2160
5	1948,52	212,78	1947,22	2160
6	1,30			

Die groß erscheinende Restschuld von 1,30 DM ergibt sich daraus, daß der Zinssatz von tatsächlich 10,9162... % durch die Rundung auf 10,92 % vergrößert wurde und bei ***diesem*** fiktiven Zinssatz die Rückzahlungen nicht ganz zum Ausgleich des Darlehens reichen. Diese (fikitve) Restschuld muß natürlich nicht nachgezahlt werden. - Auch wenn man noch so genaue Werte für den Zinssatz nimmt, kommt man, wegen der Rundung auf Pfennige bei jedem Schritt, höchstens einmal zufällig auf einen rechnerischen Restwert von exakt 0.

Zu den in Abschn. 2.1 behandelten Aufgabentypen seien noch folgende hinzugefügt:

(88) Ergänzung zu Abb. 5: **"Hat bei einem Kurs von 100 % die Obligation überhaupt den effektiven Zinssatz 6 %?"** Dies ergibt sich aus (61) mit n=5, i=0,06 und y:=q, wo x:=y-1 der effektive Zinssatz ist: Allgemein ist hier $K*y^n = K*i*\frac{y^n-1}{y-1} + K$, und wegen $y^n-1 = i*\frac{y^n-1}{y-1}$ ist i=y-1, also x=i. Mithin hat man: Ist der nominale Zinssatz konstant, dann stimmt bei jährlicher Rückzahlung der Zinsen der effektive Zinssatz mit dem nominalen und daher mit demjenigen effektiven Zinssatz überein, den man bei Zinskumulation erhielte (nicht so bei variablem nominalen Zinssatz; s. z.B. den Vergleich zwischen Schatzbriefen Typ A und B in (86)).

(89) **"Wie hoch muß der Kurs b sein, wenn die Obligation einen effektiven Zinssatz von 5,86 % haben soll?"** Aus $b*K*y^5 = i*K*\frac{y^5-1}{y-1} + K$ ergibt sich $b = \frac{0{,}06*(1{,}0586^5-1) + 0{,}0586}{1{,}0586^5 * 0{,}0586} = 100{,}59$ % (das Vergiß-Prinzip (71) ist berücksichtigt: der Zahlungsstrom lautet (-b*1000; 60; 60; 60; 60; 1060)).

(90) **"Prämiensparen: 6 Jahre lang wird immer am Jahresanfang ein fester Betrag angelegt; dieser wird über die ganze Laufzeit von 7 Jahren mit 3 % verzinst. Am Ende wird das aufgelaufene Kapital mit einer Prämie von 16 % (auf die Netto-Auszahlungen!) zurückgezahlt."** Der Endwert der sechs Auszahlungen (in konstanter Höhe K) beträgt $K*(1{,}03^7+1{,}03^6+...+1{,}03^2) = K*1{,}03^2*\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03}$; es wird also zurückgezahlt $K*(1{,}03^2*\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03}+6*0{,}16) = 7{,}822336*K$; der Zahlungsstrom lautet daher K*(-1; -1; -1; -1; -1; -1; 0; 7,822336); und mit dem Ansatz $(1+x)^2*\frac{(1+x)^6-1}{x} = 7{,}822336$ ergibt sich der effektive Zinssatz 5,96 % (wodurch der hohe Prämiensatz etwas ins rechte Licht gerückt ist).

2.5 Eindeutigkeit und Existenz des effektiven Zinssatzes

(Im folgenden werden nur Zahlungsströme betrachtet, die Darlehen sind, also (81) bzw. (82) erfüllen.)

(91) Möchte man **"für den Zahlungsstrom (-8000; 5-mal 1500) den effektiven Zinssatz ausrechnen"** und beginnt die Iteration bei x=0, so hat die linke Seite von (84) den Wert -500, und offenbar existiert kein (positiver) effektiver Zinssatz. Das sieht man dem Zahlungsstrom auch direkt an, denn die Summe der (Netto-) Rückzahlungen ist niedriger als die Auszahlung, d.h. das Darlehen ist noch nicht einmal ganz getilgt, geschweige denn verzinst, bzw.: es ist negativ verzinst worden (ähnlich wie bei (17)).

Es liegt auf der Hand, die Begriffe 'Aufzinsung', 'effektiver Zinssatz' usw. auf ***negative Zinssätze*** zu erweitern; jedenfalls so lange die Zins***faktoren positiv*** bleiben (1+x>0, also x>-1); denn nicht-positive Zinsfaktoren sind ökonomisch unsinnig, da sie den Wert jeder Zahlung in jeder Periode auf 0 setzen oder sogar vorzeichenmäßig umkehren. Die Iteration für Aufgabe (91) beginnt man also mit einem Wert, der etwas größer als -100 % ist (für die Rechnung kann man sogar -100 % selbst nehmen, wenn man beachtet, daß der Zinsfaktor, der dann 0 beträgt, nirgends im Nenner auftaucht). Der Wert der linken Seite von (84) ist dann sicher positiv, weil er gleich der letzten Zahlung $Z_n>0$ ist. - In (91) ergibt sich nun x = -0,0211.

Umgekehrt kann man leicht für jede, noch so große reelle Zahl einen Zahlungsstrom konstruieren, dessen effektiver Zinssatz größer als diese Zahl ist: Andererseits ist klar, daß es für jeden gegebenen Zahlungsstrom einen (entsprechend großen) Zinssatz gibt, so daß die Rückzahlungen nicht reichen, um die Auszahlung auszugleichen, und damit die linke Seite von (84) negativ wird. Der effektive Zinssatz muß also irgendwo zwischen -100 % und diesem oberen Zinssatz liegen, und man kann bei einer Iteration mit diesen beiden Zinssätzen beginnen (s. (47)).

Es drängt sich nun aber doch eine mathematische Absicherung dieser Plausibilitäts-Überlegungen auf, insbesondere: **Ist man tatsächlich sicher, daß bei gegebenem Zahlungsstrom ein höherer Zinssatz zu einem niedrigeren Wert der linken Seite von (84) führt?** Dazu betrachtet man (was sich schon seit einiger Zeit anbietet) die linke Seite von (84) als eine Funktion von 1+x (bzw. von y=1+x), und hat so ein Polynom n-ten Grades in y

(92) $S(y) := Z_0*y^n + Z_1*y^{n-1} + ... + Z_{n-1}*y + Z_n \qquad (y \in \mathbb{R}^+).$

Dieses hat folgende inhaltliche Bedeutung: Für einen vorliegenden Zahlungsstrom (Z_0; Z_1; ...; Z_n) gibt es, in Abhängigkeit vom Zinssatz x bzw. vom Zinsfaktor y, die Restschuld S an, also den Betrag, der, bei jeweils angenommenen x bzw. y, noch zur letzten Zahlung zu addieren wäre, damit das Geldgeschäft dann gerade erledigt wäre (s. (43)). (Dies ist eine Fragestellung desjenigen, der die Bedingungen des Geldgeschäfts festlegt). ***Hier*** geht es nun um die Frage etwa des Bankkunden: Da der Zahlungsstrom festliegt, ist derjenige Zinssatz x bzw. Zinsfaktor y gesucht, bei dem das Geldgeschäft mit diesem Zahlungsstrom genau erledigt ist, bei dem nichts mehr zu addieren ist, bei dem S=0 gilt (s. (84)!); es ist also 'die' positive Nullstelle von (92) gesucht.

Bekanntlich hat jede Polynomgleichung (84) n-ten Grades in y (=1+x) insgesamt n (komplexe) Lösungen. Aber die nicht-reellen sowieso, und die reellen nicht-positiven nach den obigen Überlegungen, kommen hier nicht in Betracht, d.h. die Grundmenge für die Lösungen ist $\mathbf{R}^+$, und diese Einschränkung beeinflußt die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit des effektiven Zinssatzes erheblich. In die weitere Argumentation geht wesentlich die Stetigkeit von Polynomen ein: Einmal in Form des Zwischenwertsatzes bei reellen Intervallen als Definitionsbereich. Wenn das Polynom an einer Stelle einen positiven und an einer anderen einen negativen Wert annimmt, so muß es dazwischen irgendwo eine Nullstelle haben. Aber auch: Hat das Polynom an einer Stelle einen positiven Wert, dann hat es in einer ganzen Umgebung dieser Stelle nur positive Werte.

Nun ist (mit einer geringen Erweiterung des Definitionsbereichs) $S(0)=Z_n>0$ und damit $S(y)>0$ für $y>0$ in der Nähe von 0. Für sehr große y überwiegt der Einfluß von Z_0 gegenüber dem der anderen Koeffizienten; das Polynom S geht asymptotisch gegen das Polynom $Z_0 * y^n$, das für $y>0$ wegen $Z_0<0$ nur negative Werte annimmt; d.h. S wird für große y negativ. Für eine einfache rechnerische Klärung betrachtet man hier die Funktion $T(y) := \frac{S(y)}{y^n}$ im Bereich $y>0$:

(93) $$T(y) = Z_0 + \frac{Z_1}{y} + \frac{Z_2}{y^2} + \ldots + \frac{Z_{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Z_n}{y^n} \qquad (y>0)$$

(die den ***Barwert*** der Restschuld - bzw. des Zahlungsstroms - beim angenommenen Zinssatz x bzw. Zinsfaktor y angibt). Mit

(94) $$y > \max_{1 \le m \le n} \sqrt[m]{n * \frac{Z_m}{|Z_0|}}$$

ist $\frac{Z_m}{y^m} < \frac{|Z_0|}{n}$ für m=1,...,n, damit $T(y)<0$ und wegen $y>0$ auch $S(y)<0$. Jeder Zinsfaktor y, der Bedingung (94) erfüllt, liefert eine obere Schranke für den effektiven Zinssatz des Zahlungsstroms. Für eine automatische Steuerung der Intervallhalbierung kann man y=0 und einen Wert nach (94) als Unter- und Obergrenze des Anfangs-Intervalls nehmen. Man erhält für S einen positiven und einen negativen Wert und weiß, daß der effektive Zinssatz dazwischen liegt.

Die ***Existenz*** ist also geklärt, und nun ist nur noch die ***Eindeutigkeit*** offen. Diese ergäbe sich direkt, wenn S eine streng monoton fallende Funktion wäre. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie man am folgenden Beispiel sieht: "**Für den Zahlungsstrom**
(95) **(-10000; 25000; 2600) ist etwa S(1) = 17600 < S(1,25) = 18225 > S(2,6) = 0.**" Also: Bei steigendem Zinssatz kann sich die rechnerische Restschuld durchaus auch zugunsten des Darlehensnehmers verändern. Dieser verblüffende Sachverhalt macht die vorher angestellten Plausibilitäts-Überlegungen fragwürdig bzw. zeigt, daß diese ergänzungsbedürftig sind:

Man stellt leicht fest, daß aber T(y), der Barwert des Zahlungsstroms, eine streng monoton fallende Funktion ist, die für kleine $y>0$ positive und für große y negative Werte annimmt. Also hat T im Bereich $y>0$ genau eine Nullstelle. Da $S(y)=T(y)*y^n$ ist, gilt für jedes $y>0$: Die Aussagen 'T(y)=0' und 'S(y)=0' sind gleichwertig. Die positive Nullstelle von S, und damit der effektive Zinssatz eines 'normalen' Darlehens (81), ist folglich eindeutig bestimmt, auch wenn S nicht monoton ist.

Die Betrachtung von T anstelle von S ist ein Beispiel für die Kraft abstrakten mathematischen Vorgehens: Zwar sind beide Funktionen ökonomisch interpretierbar, aber hier kommt es nur auf die (geometrische) Beschaffenheit der Graphen an: Etwaige Buckel und

Senken von S werden beim Übergang zu T eliminiert, während die Nullstellenmenge dabei invariant ist.

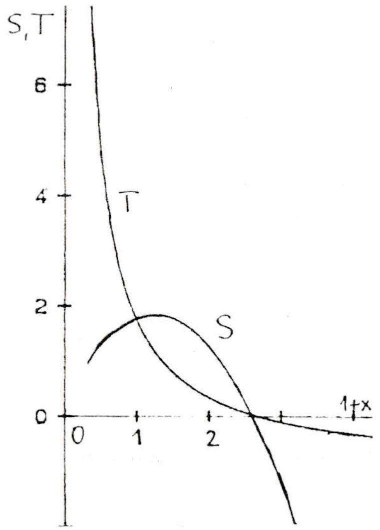


Abb. 8

Der tiefere Grund für die Monotonie von T zeigt sich erst, wenn man sich dem allgemeineren Fall (82) zuwendet, wo die Auszahlung auf mehrere Perioden verteilt sein kann, d.h. wo es m' ($0 \leq m' < n$) gibt mit $Z_m \leq 0$ für $m \leq m'$ und $Z_m \geq 0$ für $m > m'$: Dann ist nämlich nicht mehr T notwendig monoton, sondern die Funktion $T_{m'}$ in (96), und nicht die Periode 0, sondern m' ist Bezugsperiode, und lediglich im 'Normal'fall hat man m'=0:

(96) $$T_{m'}(y) := \frac{S(y)}{y^{n-m'}} = Z_0 * y^{m'} + Z_1 * y^{m'-1} + \ldots + Z_{m'} + \frac{Z_{m'+1}}{y} + \frac{Z_{m'+2}}{y^2} + \ldots + \frac{Z_n}{y^{n-m'}} \quad (y>0).$$

Noch weiter läßt sich auf diesem Wege die Begrifflichkeit jedoch nicht verallgemeinern: Wenn nicht alle Aus- *vor* allen Rückzahlungen liegen, dann kann S nicht mehr (bzw. nicht mehr so einfach) in eine monotone Funktion mit unveränderter Nullstellenmenge

transformiert werden, und tatsächlich zeigt sich, daß S dann i.a. mehrere Nullstellen hat (s. Bender 1987a, 1988, 1989, in Arbeit).

Letztlich ist der effektive Zinssatz ein Instrument zur Bewertung bzw. zum Vergleich von Zahlungsströmen. In ihm ist das Vergiß-Prinzip (71), das schon von den Bedingungen des Geldgeschäfts zum Zahlungsstrom geführt hat, auf die Spitze getrieben. Man kann ihn als Funktion auf der Menge der Darlehen (Zahlungsströme, die (81) bzw. (82) erfüllen) auffassen; denn von seiner Existenz und Eindeutigkeit dort hat man sich ja überzeugt.

Häufig kann man zwei Zahlungsströme aus dieser Menge schon ohne das Instrument des effektiven Zinssatzes bezüglich ihrer Rentabilität vergleichen, indem man ihre Einträge direkt oder nach leichten Umrechnungen, jedenfalls ohne Nullstellen-Ermittlung, zueinander in Bezug setzt. Seien im folgenden $Z = (Z_0; Z_1; \ldots; Z_n)$ und $Z' = (Z'_0; Z'_1; \ldots; Z'_{n'})$ zwei Zahlungsströme, die (81) bzw. (82) erfüllen mit o.B.d.A. $n' \leq n$. Zur Herstellung der Vergleichbarkeit sind möglicherweise zunächst einige simple Veränderungen an Z' vorzunehmen: Falls $n' < n$, dann wird die Laufzeit von Z' durch Anhängen von Nullen verlängert; es wird also Z'^* betrachtet mit $Z'^*_m = Z'_m$ für $m=0,1,\ldots,n'$ und $Z'^*_m = 0$ für $m=n'+1,\ldots,n$. Es ist nun nicht mehr notwendig $Z'^*_n > 0$, und damit sind (81) bzw. (82) zwar verletzt, aber diese Lockerung der Bedingungen ist läßlich, weil im Definitionsbereich y>0 der Funktionen (92), (93) und (96) keine zusätzlichen Nullstellen entstehen. Wichtig ist,
(97) daß es in Z'^* überhaupt echte Rückzahlungen gibt, d.h. daß es m_0 gibt, so daß $Z'^*_{m_0} > 0$.

(98) Zahlungsströme, die (81) bzw. (82) mit der Abschwächung (97) erfüllen, sollen auch ***Darlehen*** genannt werden; ihre Menge heiße D.

Eine weitere Operation zum Zwecke des Rentabilitäts-Vergleichs ist die Angleichung des Zahlungs-Volumens. Die Rentabilität ändert sich nicht, wenn der Zahlungsstrom, d.h. jede einzelne Zahlung, mit einem (positiven) Faktor r multipliziert wird. Zwei
(99) Darlehen Z und Z' sind ***offensichtlich gleich-rentabel***, wenn sie sich nur um einen Faktor r>0 unterscheiden, d.h. wenn $Z = r*Z'$,

d.h. $Z_m = r*Z'_m$ für m=0,1,...,n ist. Die Multiplikation mit einem r>0 bedeutet also eine ***Veränderung des Zahlungs-Volumens*** bei gleichzeitiger ***Erhaltung der Zahlungs-Struktur*** und ist geeignet, in vielen Fällen die Rentabilität von Zahlungsströmen mit unterschiedlichen Zahlungs-Volumina vergleichbar zu machen.

(100) Zunächst ist Z ***offensichtlich rentabler als*** Z', wenn $Z_m \geq Z'^*_m$ für m=0,1,...,n (Schreibweise: $Z \geq Z'^*$) ***und*** $Z_{m_0} > Z'^*_{m_0}$ für ein m_0 (Schreibweise: $Z > Z'^*$). (Für Auszahlungen Z_{m_1} bedeutet das $0 \geq Z_{m_1} \geq Z'^*_{m_1}$, also $|Z_{m_1}| \leq |Z'^*_{m_1}|$, d.h. als Betrag müssen ***diese Auszahlungen kleiner-gleich*** denen von Z'* und erst recht von Z' sein.)

(101) Mit (99) ergibt sich direkt: Z ist ***offensichtlich rentabler als*** Z', wenn es ein r>0 gibt mit $Z > r*Z'^*$, z.B. Z = (-100; 60; 60) und Z' = (-50; 30; 29) mit r=2.

Die Erklärung (101) ist eindeutig, d.h. wenn es ein r>0 gibt mit $Z > r*Z'^*$, dann gibt es kein s>0 mit $Z'^* \geq s*Z$; denn Z'* enthält Rückzahlungen $Z'^*_{m_0} > 0$ und Auszahlungen $Z'^*_{m_1} < 0$, so daß $\frac{Z_{m_1}}{Z'^*_{m_1}} \leq r \leq \frac{Z_{m_0}}{Z'^*_{m_0}}$ und mindestens eines der beiden '≤' sogar '<' ist; und daher gibt es kein s>0, so daß $\frac{Z'^*_{m_1}}{Z_{m_1}} \geq \frac{1}{s} \geq \frac{Z'^*_{m_0}}{Z_{m_0}}$.

Schließlich ist z.B. auch Z = (-100; 60; 60) offensichtlich rentabler als Z' = (-100; 50; 70), obwohl hier (101) nicht greift. Die Rückzahlungen bei Z liegen insgesamt früher als die bei Z'. Dieses 'insgesamt früher liegen' läßt sich einfach erfassen, indem man ***in jedem Jahr*** für Z und Z'* ***die*** beiden ***Nettosummen*** der bis dahin stattgefundenen Zahlungen vergleicht. Man bildet also die ***kumulierten Zahlungsströme***

(102) $Q := (Z_0;\ Z_0+Z_1;\ Z_0+Z_1+Z_2;\ \ldots;\ Z_0+Z_1+\ldots+Z_n)$

für Z und Q'* für Z'*. Es ist immer $Q_0 < 0$, und bei einem 'normalen', überhaupt rentablen Darlehen ist Q_n (die sog. ***Nettosumme***
(103) des Zahlungsstroms) positiv, d.h. die Rückzahlungen sind insgesamt so hoch, daß mit ihnen die Auszahlungen getilgt und darüber hinaus Zinsen gezahlt werden. Es kann vorkommen, daß $Q_n \leq 0$ ist (s. (17), (91)), z.B. beim Kursrückgang eines Wertpapiers, bei vorzeitiger endgültiger Zahlungsunfähigkeit eines Darlehensneh-

mers oder regelmäßig in einer stark deflationären Wirtschaft. Man muß sich vor Augen führen, daß ein solches unrentables Darlehen ($Q_n<0$) umso rentabler ist, je ***später*** (bei gleicher Höhe) ***die Rückzahlungen*** und ***früher die Auszahlungen*** liegen, weil ja ***jedes Kapital*** im Laufe der Zeit an Wert ***verliert*** (während sich bei $Q_n=0$ der Zeitpunkt der Zahlungen nicht auf die Rentabilität auswirkt).

Für einen Zahlungsstrom Z mit positiver Nettosumme Q_n kann man jedenfalls feststellen: Er ist ***offensichtlich rentabler*** als ein Zahlungsstrom Z', wenn für die kumulierten Zahlungsströme gilt: $Q > Q'^*$, z.B. bei Z = (-100; -50; 70; 50; 30; 20; 10) und Z' = (-120; -40; -10; 120; 0; 70). Für zwei beliebige Darlehen Z und Z' folgt aus $Z > Z'^*$ unmittelbar $Q > Q'^*$, so daß man, wenn wenigstens eines eine positive Nettosumme hat, für den Vergleich auch direkt ihre kumulierten Zahlungsströme heranziehen kann.

(104) Zusammenfassung: <u>Sind Z und Z' zwei Darlehen (die (81) bzw. (82) in der modifizierten Form (97) erfüllen, d.h. bei denen es echte Auszahlungen und echte Rückzahlungen gibt und alle Auszahlungen vor allen Rückzahlungen liegen), dann ist Z</u> ***offensichtlich rentabler als*** <u>Z', wenn es ein r>0 gibt, so daß</u> $Z > r*Z'^*$. <u>Ist außerdem die Nettosumme</u> Q_n <u>von Z positiv, dann ist Z schon</u> ***offensichtlich rentabler*** <u>als Z', wenn es ein r>0 gibt, so daß</u> $Q > r*Q'^*$. (Diese Definition läßt sich leicht auf den Fall nicht-positiver Nettosummen übertragen; in (Bender, in Arbeit) wird der Begriff 'offensichtlich rentabler' noch wesentlich erweitert.)

Der effektive Zinssatz x_0 ist eine Funktion auf D, die nicht injektiv ist (s. (99)), aber surjektiv, wenn man als Wertebereich $R_{>-1}$ nimmt. Außerdem hat sie folgende beiden Eigenschaften: <u>Sie</u>
(105) <u>ist</u> ***stetig*** <u>(d.h. ändert man den Zahlungsstrom nur gering, dann ändert sich auch der effektive Zinssatz nur gering, bzw. ausgehend von einem bestimmten effektiven Zinssatz zu einem bestimmten Zahlungsstrom kann man jeden effektiven Zinssatz im Wertebereich</u>
(106) <u>nahebei erzeugen) und</u> ***isoton*** <u>in folgendem Sinn: Sind zwei Zahlungsströme offensichtlich gleich-rentabel</u> (s. (99)), <u>dann haben sie auch denselben effektiven Zinssatz, und ist Z offensichtlich</u>

rentabler als Z' (s. (104)), dann ist der effektive Zinssatz x_o von Z höher als der effektive Zinssatz x_o' von Z'.

Die Bedeutung der Stetigkeit erschließt sich erst bei genauerer Analyse, wenn man auch Gegenbeispiele zur Verfügung hat (s. Ben-der, in Arbeit). Mit dem Funktionsgraphen für das Polynom (92) S in Abhängigkeit von 1+x und der Nullstelle x_o läßt sie sich gut veranschaulichen (vgl. Abb. 9a): Eine kontinuierliche Veränderung des Graphen führt zu einer ebensolchen Veränderung der Nullstelle. Der Beweis ist essentiell das Theorem über implizite Funktionen und gehört damit nicht mehr zur Schulmathematik.

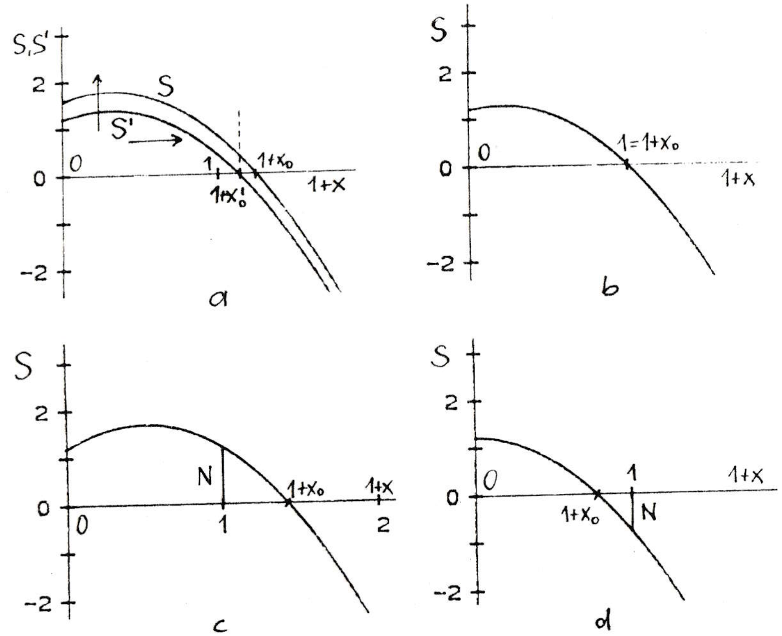


Abb. 9

Die Notwendigkeit der Isotonie im o.a. Sinn für einen irgendwie definierten effektiven Zinssatz ist offenbar. Für den effektiven Zinssatz (83) läßt sie sich elementar beweisen:

(107) Zunächst stellt man fest, daß für ein Darlehen Z der effektive Zinssatz x_o dasselbe Vorzeichen wie die Nettosumme Q_n hat (s. Abb. 9b-d): Es ist nämlich $S(1) = Q_n$ und $S(1+x_o) = 0$. Nach den Überlegungen zur Stetigkeit des Polynoms (92) hat man: Ist $x_o = 0$, dann ist $S(1) = 0$. Ist $x_o > 0$, dann ist erst recht $S(1) > 0$; ist schließlich $x_o < 0$, dann ist $S(1) < 0$.

Seien nun x_o und x_o' die effektiven Zinssätze der beiden Zahlungsströme Z und Z', und sei $Z > r{*}Z'^{*}$ für ein r>0. Dann ist x_o' auch effektiver Zinssatz von $r{*}Z'^{*}$, und es gilt $S(1+x) > r{*}S'^{*}(1+x)$ im ganzen Definitionsbereich x>-1 von S und S'*. Insbesondere ist $S(1+x) > 0$ für $-1 < x \leq x_o'$; und x_o kann sich, da $S(1+x_o) = 0$ ist, nicht im Intervall $]-1; x_o']$ befinden, also ist $x_o > x_o'$ (Veranschaulichung s. Abb. 9a).

Sei endlich statt $Z > r{*}Z'^{*}$ lediglich $Q > r{*}Q'^{*}$ für ein r>0 mit $Q_n > 0$, also $x_o > 0$, gegeben: Falls $Q_n'^{*}$ $(= Q_{n'}') \leq 0$ ist, dann ist wegen $x_o' \leq 0$ nichts mehr zu beweisen. Sei also auch $Q_n'^{*} > 0$ und damit $x_o' > 0$.

Es wird nun eine Folge von Zahlungsströmen $Z^{(o)} = r{*}Z'^{*}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(n-1)}$, $Z^{(n)}$ konstruiert, für deren effektive Zinssätze die Ungleichungskette $0 < x^{(o)} = x' \leq x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \ldots \leq x^{(n-1)} \leq x^{(n)} \leq x_o$ gilt, wobei mindestens eines der '$\leq$' sogar '<' ist: Hat man einen Zahlungsstrom $Z^{(m)}$ in dieser Folge ($0 \leq m < n$), dann entsteht $Z^{(m+1)}$ nach Prüfung der Differenz $Z_{n-m}^{(m)} - Z_{n-m}$ folgendermaßen: Die Zahl D_{n-m} soll gleich dieser Differenz sein, falls diese positiv ist, und sonst soll sie 0 sein. Nun wird $Z_{n-m}^{(m+1)} := Z_{n-m}^{(m)} - D_{n-m}$ $(= Z_{n-m})$, $Z_{n-m-1}^{(m+1)} := Z_{n-m-1}^{(m)} + D_{n-m}$ und $Z_k^{(m+1)} := Z_k^{(m)}$ für $n-m-1 \neq k \neq n-m$ gesetzt; d.h. höchstens die Einträge mit den Nummern n-m und n-m-1 werden (gegenläufig) geändert. Praktisch mustert man Z und $r{*}Z'^{*}$ von hinten nach vorne durch; sobald der Eintrag $r{*}Z_{n-m}'^{*}$ den Eintrag Z_{n-m} übertrifft, wird der Überschuß D_{n-m} in $r{*}Z'^{*}$ um eine Periode nach vorne übertragen.

Der ***kumulierte Zahlungsstrom*** ändert sich dabei immer nur an einer Stelle: $Q_{n-m-1}^{(m+1)} = Q_{n-m-1}^{(m)} + D_{n-m}$; während $Q_k^{(m+1)} = Q_k^{(m)}$ ist für $k \neq n-m-1$. Mit Induktion zeigt man, daß $Q \geq Q^{(m)}$ für m=0,...,n: Nach

Voraussetzung ist $Q \geq Q^{(0)}$. Sei $Q \geq Q^{(m)}$ für ein m (<n). Dann ist $Q_{n-m-1} + Z_{n-m} = Q_{n-m} \geq Q_{n-m}^{(m)} = Q_{n-m-1}^{(m)} + Z_{n-m}^{(m)} = Q_{n-m-1}^{(m)} + Z_{n-m} + D_{n-m} = Q_{n-m-1}^{(m+1)} + Z_{n-m}$, also insgesamt $Q \geq Q^{(m+1)}$. Insbesondere ist $Q \geq Q^{(n)}$, speziell $Z_0 = Q_0 \geq Q_0^{(n)} = Z_0^{(n)}$; und nach Konstruktion ist $Z_k \geq Z_k^{(n)}$ für k=1,...,n, also alles in allem $x_0 \geq x_0^{(n)}$.

Für die beiden Polynome (92) $S^{(m)}(1+x)$ und $S^{(m+1)}(1+x)$ zu den Zahlungsströmen $Z^{(m)}$ und $Z^{(m+1)}$ (m=0,1,...,n-1) gilt: $S^{(m+1)}(1+x) = S^{(m)}(1+x) + D_{n-m}*((1+x)^{m+1}-(1+x)^{m}) = S^{(m)}(1+x) + D_{n-m}*(1+x)^{m}*x \geq S^{(m)}(1+x)$ im Bereich x>0. Ist $x_0^{(m)} > 0$, dann ist also (s. Abb. 9a) $x_0^{(m+1)} \geq x_0^{(m)}$, und insgesamt hat man $0 < x_0^{(0)} = x_0' \leq x_0^{(1)} \leq \ldots \leq x_0^{(n)} \leq x_0$. Entweder ist $D_k > 0$ für mindestens ein k=1,2, ...,n, dann ist eines der '$\leq$' zwischen $x_0^{(0)}$ und $x_0^{(n)}$ sogar '<', oder aber es ist $Z_0 > Z_0^{(n)}$, damit $Z > Z^{(n)}$ und $x_0 > x_0^{(n)}$.

2.6 Zahlungen, die nicht an Jahresenden stattfinden

Bei sehr vielen Geldgeschäften, denen der Bürger begegnet, werden kürzere Perioden als 1 Jahr zugrundegelegt, meistens Quartale oder Monate. Hat man z.B. kürzere Perioden für die ***Zins-Kapitalisierungen*** oder sonstige Buchungen, dann beeinflußt dies den Zahlungsstrom in Laufzeit oder Höhe der Raten, aber wenn dieser einmal ermittelt ist, spielen die angesetzten Zinsperioden bei der Berechnung des effektiven Zinssatzes keine Rolle mehr (Vergiß-Prinzip (71)). - Meistens sind allerdings auch unterjährige ***Zahlweisen*** vorgegeben, und diese wirken sich ***direkt*** auf den Zahlungsstrom und damit auf den effektiven Zinssatz aus.

Unterjährige Zahlweisen passen zwar zu entsprechend kürzeren Zinsperioden, aber die Idee des effektiven Zinssatzes beinhaltet nun einmal die Fiktion einer einheitlichen Zinsperiodenlänge, und bei Ausrichtung an der Formel der PAngV beträgt diese 1 Jahr. Der Sinn kürzerer Perioden ist u.a. eine Verstetigung des Zahlungsstroms; insbesondere bei Lohn- und Gehaltsempfängern sollen sie dem Einnahme-Strom angepaßt werden. Vor allem aber hat der Darlehensgeber den Vorteil, daß er über Rückzahlungsbeträge schon früher verfügt und daß diese wertvoller sind, als wenn sie erst zum

Jahresende erfolgen würden. - Wie kann diese Werterhöhung quantifiziert werden?

Gemäß Grundsatz (28) müßte jede Zahlung vom Moment ihrer Realisierung an mit Zinsperioden der Länge 1 Jahr aufgezinst werden. Auf diese Art und Weise bekommt man aber nur dann einen gemeinsamen Bezugszeitspunkt für alle Zahlungen, wenn diese, gerechnet ab Laufzeitbeginn, immer an Jahresenden erfolgen. - Aber diese Bedingung ist ja nun gerade nicht erfüllt.

(108) Grundsatz: <u>Für die Ermittlung des effektiven Zinssatzes ist jede Zahlung, die nicht an einem Laufzeit-Jahresende stattfindet zunächst bis zum nächsten solchen Jahresende (d.h. mit einer kürzeren Zinsperiode) und ab dann normal (d.h. mit Perioden der Länge 1 Jahr) aufzuzinsen.</u>

Findet etwa bei einer Gesamt-Laufzeit n eine Zahlung Y im Jahr m, und zwar 9 Monate, also t=0,75 (Jahre), vor Jahresende statt, dann hat Y (mit dem Zinssatz x) den Endwert $Y*(1+t*x)*(1+x)^{n-m}$. Die Reihenfolge der Zinsfaktoren wäre zwar beliebig, aber analog zur Sparkassen-Konvention (23) werden bekanntlich die Zinsen für eine Zahlung (schon) am ersten erreichten Jahresende kapitalisiert; und so stellt man sich auch am günstigsten die Aufzinsung bei der Ermittlung des effektiven Zinssatzes vor.

(109) Ein Beispiel: "**Eine Hypothek über 180 000 DM (Darlehen, das durch Immobilien abgesichert ist) wird mit 6,5 % jährlich verzinst (und nicht laufend getilgt, sondern nach 10 Jahren vollständig abgelöst). Der jährliche Zinsbetrag von 11 700 DM ist in vier gleichen Raten zu je 2925 DM immer zum Quartalsende zu zahlen.**"

Der Endwert der Rückzahlungen beim Zinssatz x beträgt:

(110)
$$
\begin{aligned}
&2925*\left((1+\tfrac{3}{4}*x) + (1+\tfrac{2}{4}*x) + (1+\tfrac{1}{4}*x) + 1 \right)*(1+x)^9 + \\
&2925*\left((1+\tfrac{3}{4}*x) + \ldots \right)*(1+x)^8 + \\
&\qquad \ldots \\
&2925*\left((1+\tfrac{3}{4}*x) + (1+\tfrac{2}{4}*x) + (1+\tfrac{1}{4}*x) + 1 \right)*(1+x) + \\
&2925*\left((1+\tfrac{3}{4}*x) + (1+\tfrac{2}{4}*x) + (1+\tfrac{1}{4}*x) + 1 \right) + 180\,000 .
\end{aligned}
$$

(111) Die Vereinfachungs-Strategie liegt auf der Hand _(**einfache Aufzinsung innerhalb eines Jahres**): Alle Zahlungen innerhalb eines Jahres sind bis zum Jahresende (mit entsprechend kürzeren Zinsperioden) mit dem (in der Regel unbekannten) effektiven Zinssatz x aufzuzinsen. Der Saldo dieser Werte kann aufgefaßt werden als eine einmalige Zahlung am Jahresende, die den tatsächlichen Zahlungen während des Jahres äquivalent ist und diese ersetzt. Die Folge aller dieser Salden über die Laufzeit liefert gerade den Zahlungsstrom_ (70) _und danach den effektiven Zinssatz gemäß_ (84). _Es werden also nach wie vor nur Zahlungsströme verwendet mit jährlichen Zahlungen. Informationen über die tatsächliche Verteilung der Zahlungen innerhalb jedes Jahres fallen dem Vergiß-Prinzip_ (71) _anheim._

Im Beispiel (109) erhält man jährlich $2925*(4+\frac{1}{4}*(3+2+1+0)*x) = 2925*(4+\frac{1}{4}*\frac{3*4}{2}*x) = 11700*(1+\frac{3}{8}*x)$ (Summation der endlichen arithmetischen Reihe $1+2+...+m=\frac{m*(m+1)}{2}$), d.h. die vier Zahlungen an den Quartalsenden könnten ersetzt werden durch eine einzige in vierfacher Höhe am Schwerpunkt der vier Zeitpunkte, nämlich $\frac{3}{8}$ vor dem Jahresende, oder durch eine einzige am Jahresende, entsprechend aufgezinst. Der Zahlungsstrom lautet also

(112) $(-180000;\ 9\text{-mal } 11700*(1+\frac{3}{8}*x);\ 180000+11700*(1+\frac{3}{8}*x))$.

Das Auftreten der Variablen x hier ist unschön und unpraktisch. Zwar ergibt sich bei der weiteren Rechnung aus $-180000*(1+x)^{10} + 11700*(1+\frac{3}{8}*x)*\frac{(1+x)^{10}-1}{x} + 180000 = 0$, über $11700*(1+\frac{3}{8}*x) = 180000*x$ schließlich x = 6,66 %, und nun kann x im Zahlungsstrom doch eliminiert werden. Allerdings ist das Prinzip der ***pragmatischen Ordnung verletzt***, auch wenn es ***mathematisch*** möglich ist, Zahlungsstrom und effektiven Zinssatz simultan zu ermitteln.

Dieser Mangel läßt sich aber mit einer weiteren Interpretation eines Ausdrucks wie $11700*(1+\frac{3}{8}*x)$ beseitigen; eine Interpretation, die eigentlich naheliegt und zu ***sehr*** einfachen Ergebnissen führt, aber in der Literatur bis jetzt übersehen worden zu sein scheint: Eine Zahlung Y, die um die Zeitspanne t Jahre ($0 \le t \le 1$)

vor dem Jahresende stattfindet (also innerhalb des Jahres zum Zeitpunkt 1-t (!)), hat zum Jahresende den Wert

$$Y*(1+t*x) = t*Y*(1+x) + (1-t)*Y .$$

(113) _**Aufspalt-Verfahren**: Die Gleichung zeigt, daß dieser Wert sich auch ergibt, wenn man_ Y _in die beiden Teile_ t*Y _und_ (1-t)*Y _aufspaltet und so tut, als ob_ t*Y _am Jahresanfang und_ (1-t)*Y _am Jahresende gezahlt würde, so daß_ t*Y _einmal mehr mit dem Zinsfaktor_ 1+x _aufzuzinsen ist._ Je früher im Jahr Y erfolgt, d.h. je größer t ist, desto größer ist der Anteil für den Jahresanfang, insbesondere bei t=1 kommt Y komplett an den Jahresanfang, bei t=0 komplett an das Jahresende, usw. Es sieht zwar zunächst nach Komplizierung aus, wenn jede Zahlung Y in ***zwei*** Zahlungen zerlegt wird. Durch die Saldierung an jedem Jahresende entstehen aber schließlich sehr einfache Ausdrücke, nämlich etwa bei (109):

(114)
$$\begin{array}{lll}
2925*\frac{3}{4}*(1+x)^{10} & + 2925*\frac{1}{4}*(1+x)^{9} + & \\
2925*\frac{1}{2}*(1+x)^{10} & + 2925*\frac{1}{2}*(1+x)^{9} + & \\
2925*\frac{1}{4}*(1+x)^{10} & + 2925*\frac{3}{4}*(1+x)^{9} + & \\
 & + 2925*\ \ (1+x)^{9} + & \\
 & \ \ 2925*\frac{3}{4}*(1+x)^{9} & + 2925*\frac{1}{4}*(1+x)^{8} + \\
 & \ \ 2925*\frac{1}{2}*(1+x)^{9} & + 2925*\frac{1}{2}*(1+x)^{8} + \ldots \\
 & \ \ \vdots & \\
2925*\frac{1}{4}*(1+x) & + 2925*\frac{3}{4} & \\
 & + 2925 & + 180\,000 .
\end{array}$$

Man erhält in jedem Jahr die Aufspaltung in $2925*4*\frac{3}{8}$ für den Jahresanfang und $2925*4*\frac{5}{8}$ für das Jahresende. Diese hätte sich selbstverständlich auch ergeben, wenn man 11700 = 2925*4 auf einen Schlag $t=\frac{3}{8}$ vor Jahresende gezahlt hätte. Dies führt auf den Zahlungsstrom

(115)
$$\begin{array}{llr}
(-180000+4387{,}50; & 9\text{-mal } 4387{,}50+7312{,}50; & 7312{,}50+180000) = \\
(-180000+4387{,}50; & 9\text{-mal } 11700; & 11700+180000-4387{,}50) = \\
(\quad -175612{,}50; & 9\text{-mal } 11700; & 187312{,}50)
\end{array}$$

mit dem effektiven Zinssatz 6,66 %. Gegenüber dem Zahlungsstrom (-180000; 9-mal 11700; 11700+180000), der entsteht, wenn von vorneherein die Zahlungen immer am Jahresende stattfinden, hat sich nur eine Kleinigkeit geändert: Der Betrag von $\frac{3}{8}*11700$ ist (fiktiv) vom Darlehensnehmer statt am Laufzeitende schon am Laufzeitanfang geleistet worden, wodurch der Auszahlungsbetrag entsprechend gemindert ist. Mit dieser einzigen Änderung hat man sämtliche in jedem Jahr stattfindenden Zahlungsverfrühungen aufgefangen!

Es läßt sich allgemein zeigen, daß wenn die Verteilung der Rückzahlungen auf 1 Jahr (beliebig, aber) in jedem Jahr gleich ist (bis auf eine etwaige Restschuld am Laufzeitende), dann im Zahlungsstrom alle Einträge außer Z_0 und eventuell Z_n gleich sind, und zwar gleich der Summe der nicht aufgezinsten Zahlungen eines Jahres; in (109) etwa 4*2925 = 11700 (DM).

Statt des allgemeinen Falls betrachtet man gleich den überwiegend auftretenden Normalfall, nämlich daß die Rückzahlungen immer monatlich in gleicher Höhe Y (bei einer etwaigen Restschuld S) erfolgen. Für die Zahlungen *eines* Jahres ergibt sich dann:

(116)
$$\begin{aligned}
&Y*\tfrac{11}{12}*(1+x) + Y*\tfrac{1}{12} + \\
&Y*\tfrac{10}{12}*(1+x) + Y*\tfrac{2}{12} + \\
&\quad\vdots \\
&Y*\tfrac{1}{12}*(1+x) + Y*\tfrac{11}{12} + \\
&\qquad + Y \quad = \\
&Y*\tfrac{1}{12}*(11+10+\ldots+1+0)*(1+x) + Y*\tfrac{1}{12}*(1+2+\ldots+12) = \\
&Y*\tfrac{1}{12}*\tfrac{12*11}{2}*(1+x) + Y*\tfrac{1}{12}*\tfrac{13*12}{2} = 5,5*Y*(1+x) + 6,5*Y \ ;
\end{aligned}$$

und als Zahlungsstrom (nach dem Aufspalt-Verfahren (113)):

(117) (Z_0+5,5*Y; (n-1)-mal 12*Y; 6,5*Y+S)

mit dem effektiven Zinssatz aus der Gleichung
$$(Z_0+5,5*Y)*(1+x)^n + 12*Y*\frac{(1+x)^n-1}{x} + S - 5,5*Y = 0 \ .$$

Es ist klar, wie bei anderen Varianten vorzugehen ist: Ist das Jahr in p Zahlungsperioden eingeteilt, so ergibt sich bei der Rate Y folgende Aufspaltung auf Jahresanfang und -ende: $\frac{p-1}{2}*Y$ und $\frac{p+1}{2}*Y$ bei nachschüssiger, $\frac{p}{2}*Y$ und $\frac{p}{2}*Y$ bei mittiger, sowie $\frac{p+1}{2}*Y$ und $\frac{p-1}{2}*Y$ bei vorschüssiger Zahlung (immer aus Ausdrücken wie $Y*\frac{1}{p}*(1+\ldots+p) = Y*\frac{1}{p}*\frac{(p+1)*p}{2}$) usw. Nun lassen sich sämtliche Beispiele rechnen, die in der Praxis auftreten, falls ***die Gesamtlaufzeit <u>ganzjährig</u> ist.***

(118)

Ist, wie in (42), die Auszahlung auf mehrere Zeitpunkte verteilt, ergeben sich keine zusätzliche Probleme. Aus- und Rückzahlungen dürfen sogar in wechselnder Folge stattfinden. <u>Nur die Jahressalden, die Einträge für den Zahlungsstrom, müssen</u> (81) <u>bzw.</u> (82) <u>erfüllen, d.h. unter den Salden muß es sowohl negative als auch positve geben, und alle negativen müssen vor allen positiven liegen.</u>

(119)

Texte zu Abb. 10 auf der nächsten Seite:

10a: "**Für 8.000 Mark zahlen Sie nur 146,08 Mark. 72 Monate lang** ..."

10b: "**100 000,- DM Maßkredit. Monatsrate 575,- DM. 6 % Zins, 99 % Auszahlung, 5 Jahre fest (eff. 6,45 %)** ..."

10c(i): "**Uno 75 i.e. Kat. 3türig, 1465 ccm, DM 15 850,-; effektiver Jahreszins 1,9 %; Anzahlung 25 % = DM 3962,-; 1. Rate DM 313,-; 35 Raten à DM 341,-** ..."

10c(ii): "**Panda 750 L Plus, 764 ccm, DM 10 590,-; effektiver Jahreszins 4,9 %; Anzahlung 15 % = DM 1590,-; 1. Rate DM 264,-; 35 Raten à DM 269,-** ..."

10d(i): "**Sie legen zum Beispiel 150 DM monatlich an, in 21 Jahren insgesamt <u>36.900 DM</u>. Die letzten 6 Monate sind einzahlungsfrei. Mit Zinsen, zur Zeit 4,75 % pro Jahr, und einem festen Bonus von 30 % auf Ihre Einzahlungen am Ende der Vertragsdauer bekommen Sie nach heutigem Stand bis zu <u>74.289 DM</u> - mehr als das Doppelte.**"

Abb. 10

10d(ii): "**Oder Sie zahlen einmalig <u>37.000 DM</u> ein. Dann erhalten Sie nach 21 Jahren mit Zinsen und Bonus <u>109.147 DM</u> - fast das Dreifache.**"

10e: "**<u>Sie legen 20 Jahre lang monatlich 250 Mark an. Und bekommen 20 Jahre lang monatlich 800 Mark zurück.</u>**"

Die Zahlungsströme und effektiven Zinssätze lauten:

10a	(-8000+5,5*146,08; 5-mal 12*146,08; 6,5*146,08) = (-7196,56; 5-mal 1752,96; 949,52), <u>x = 9,92 %</u>
10b	(-0,99*100000+5,5*575; 4-mal 12*575; 6,5*575+100000) = (-95837,50; 4-mal 6900; 103737,50), <u>x = 7,38 %</u>
10c(i)	(-15850+3962- $\frac{11}{12}$*28+5,5*341; - $\frac{1}{12}$*28+12*341; 12*341; 6,5*341) = (-10038,17; 4089,67; 4092; 2216,50), <u>x = 1,96 %</u>
10c(ii)	(-10590+1590- $\frac{11}{12}$*5+5,5*269; - $\frac{1}{12}$*5+12*269; 12*269; 6,5*269) = (-7525,08; 3227,58; 3228; 1748,50), <u>x = 4,90 %</u>
10d(i)	(-6,5*150; 19-mal -12*150; -5,5*150- $\frac{57}{12}$*150; - $\frac{15}{12}$*150+74289) = (-975; 19-mal -1800; -1537,50; 74101,50), <u>x = 6,10 %</u>
10d(ii)	(-37000; 20-mal 0; 109147), <u>x = 5,29 %</u>
10e	(-5,5*250; 19-mal -12*250; -6,5*250+5,5*800; 19-mal 12*800; 6,5*800) = (-1375; 19-mal -3000; 2775; 19-mal 9600; 5200), <u>x = 5,99 %</u>

Bei dem Kreditangebot in Abb. 10a wird zwar auf eine Abschlußgebühr von 2 % hingewiesen. Da aber zugleich die ***tatsächlichen*** Aus- und Rückzahlungsbeträge genannt sind, ist die Gebühr für die Berechnung des effektiven Zinssatzes irrelevant. Sie wirkt sich lediglich folgendermaßen aus: Üblicherweise, so auch hier, muß der Darlehensnehmer seine ***Zahlungen am Ende von Kalendermonaten*** leisten. Wenn die ***Auszahlung*** des Darlehens irgendwann ***nicht zum Ende eines Monats*** erfolgt (was i.a. der Fall ist), dann sind für die Zeit bis zum ersten Monatsende Zinsen zu zahlen, und diese werden nicht vom ausgezahlten, sondern von dem um die Gebühren vermehrten Betrag, also hier von 8160 DM, berechnet (vgl. Abschn. 1.8).

Bei den Bedingungen in Abb. 10b ergibt sich der wesentlich höhere Zinssatz von 7,38 % (gegenüber dem genannten von 6,45 %) durch die Unterstellung, daß vom Kreditbetrag nichts getilgt wird, die Restschuld nach 5 Jahren also 100 000 DM beträgt. Dies entspricht dem Brauch bei Bausparkassen, solche Kredite auf einen Schlag mit einem fälligen Bauspardarlehen abzulösen. - Gutwillig könnte man der Anzeige eine andere Fragestellung entnehmen: Wie hoch ist die Restschuld S nach 5 Jahren bei einem effektiven Zinssatz von 6,45 %? Mit dem Zahlungsstrom (-99000+5,5*575; 4-mal 12*575; 6,5*575+S) ergibt sich S = $95837{,}5*1{,}0645^5 - 6900*(\frac{1{,}0645^5-1}{0{,}0645} - 1) - 3737{,}50$ = 94913 (DM). Da der Zinssatz in jedem Fall nicht für die ganze Laufzeit, sondern nur für die ersten fünf Jahre fixiert ist, müßte laut PAngV vom ***anfänglichen effektiven Zinssatz*** gesprochen werden.

So günstige Konditionen wie in Abb. 10c erhält man z.Z. nur von Autohändlern und nur für weniger populäre Marken und Typen. Inzwischen gibt es von Citroën sogar ein Angebot ganz ohne Anzahlung. Die ***Höhe der Anzahlung*** beeinflußt **wesentlich** die Güte der Finanzierung (Extremfall: 99,99 % Anzahlung und 0,01 % Darlehen mit 0 % Verzinsung), und der ***effektive Zinssatz*** des Darlehens allein hat praktisch ***wenig Aussagekraft***. Wie man dennoch zu einer brauchbaren Bewertung solcher Konditionen kommt, ist in Abschn. 2.8 dargestellt.

Bei dem Angebot in Abb. 10d ist monatlich ***vorschüssige*** Zahlung unterstellt. Stimmen überhaupt die Rückzahlungsbeträge 74 289 DM und 109 147 DM? - Der Endwert der Zahlungen bei (i) ist $975*1{,}0475^{21} + 1800*\frac{1{,}0475^{19}-1}{0{,}0475}*1{,}0475^2 + 1537{,}5*1{,}0475 + 187{,}5$ = 63219,94 (DM); dazu kommen 30 % (nicht vom Endwert, sondern von den Nettozahlungen 246*150 = 36900 (DM)), also 11 070 DM. Auch der Wert bei (ii) ist korrekt. Beachtenswert ist, daß der Alternative mit der Verdreifachung eine deutlich geringere Rendite zugrundeliegt als der mit der Verdopplung.

Ein Versicherungsschutz, wie in der Anzeige angegeben, würde zusätzliche Kosten verursachen. Anders herum: Hat man zu einem Darlehen eine Lebensversicherung abgeschlossen (oft mehr oder weniger durch den Darlehensgeber genötigt), dann kann man die Prämien als Kosten des Darlehens in den Zahlungsstrom einbeziehen, und der effektive Zinssatz erhöht sich dadurch. Gegen diesen Einbezug spricht, daß man durch den Versicherungsschutz eine zusätzliche Leistung erwirbt und daher keine reinen Darlehenskosten vorliegen (so eine Entscheidung des Bundesfinanzhofs).

Für die Rechnung in Abb. 10e ist monatlich ***nachschüssige*** Zahlung unterstellt. Die Laufzeit beginnt also 1 Monat nach Vertrags'beginn' und ist um 1 Monat kürzer als 40 Jahre. Rechnet man die Zahlungen aber auf Jahresraten um, dann hat man wieder 41 Raten vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 40, also volle 40 Jahre. - Der effektive Zinssatz ließe sich hier auch sehr einfach berechnen: Jeder Auszahlung von 250 DM (bzw. 12*250 DM) entspricht genau eine Rückzahlung von 800 DM (bzw. 12*800 DM) genau 20 Jahre später, also ist $x = \sqrt[20]{\frac{800}{250}} - 1 = 5{,}99$ %.

Bei monatlicher Zahlweise wird die Wiederanlage-Prämisse (62) noch fragwürdiger.

Im folgenden werden die Überlegungen dieses Abschnitts für den allgemeinen Fall auf eine Formel gebracht: Ein Geldgeschäft mit einer Laufzeit von n Jahren ($n \in N$), einer Auszahlung $Z_{01}<0$ am Anfang und in jedem Jahr (mit der Nummer m; $0<m\leq n$) insgesamt j_m ($1\leq j_m \leq 360$) Rückzahlungen $Z_{mj}\geq 0$ ($j=1,2,\ldots,j_m$; $Z_{nj_n}>0$), die um die Zeitspanne t_{mj} ($0\leq t_{mj}<1$; $t_{nj_n}=0$) vor dem Jahresende liegen, hat einen Zahlungsstrom (Z_0; Z_1; ...; Z_n) mit

$$(120)\quad Z_m = Z_{m1}*(1-t_{m1}) + \ldots + Z_{mj_m}*(1-t_{mj_m}) + Z_{m+1,1}*t_{m+1,1} + \ldots + Z_{m+1,j_{m+1}}*t_{m+1,j_{m+1}} \quad (m=0,1,\ldots,n;\ \text{wobei } j_0=1 \text{ und } t_{01}=0).$$

Die Bedingungen '$Z_{nj_n}>0$' und '$t_{nj_n}=0$' besagen, daß die Laufzeit wirklich genau volle n Jahre beträgt. Man könnte die Forderung '$t_{nj_n}=0$' noch fallen lassen und hätte dann eine Laufzeit $\leq$n, aber >n-1. Praktisch würde dies auf das ***Aufrundungs-Verfahren*** (123) hinauslaufen (s. Abschn. 2.7), das jedoch nicht der Sparkassen-Konvention (23) entspricht und deswegen nicht der Formel der PAngV unterlegt wurde.

Die Verallgemeinerung von (120) mit mehreren Auszahlungen liegt auf der Hand. Es ist aber (119) zu beachten, nämlich: Es muß negative *und* positive Einträge im Zahlungsstrom geben. - Diese Forderung kann allerdings sogar schon bei einem scheinbar 'normalen' Darlehen verletzt sein, und eine solche Verletzung hat unangenehme Konsequenzen, wie man an folgendem Beispiel sieht: **"Ein Darle-**
(121) **hen über 3000 DM wird in 4 Quartalsraten zu je 2200 DM zurückgezahlt (verzinst und getilgt)."**

Diese Darlehens-Bedingungen kommen einem wohl wucherisch vor, und man erwartet einen hohen effektiven Zinssatz, aber die Rechnung ergibt $-3000*(1+x) + 4*2200*(1+\frac{3}{8}*x) = 0$, d.h. $5800 + 300*x = 0$, also $x = -\frac{58}{3}$; d.h. die Gleichung hat keine Lösung, da Werte ≤ -1 nicht zur Grundmenge gehören. - Will man diesem Geldgeschäft dennoch einen effektiven Zinssatz zuweisen, so wäre es absurd, diesen negativen Wert heranzuziehen. Wegen der (relativ) hohen Rückzahlungsraten kommt nur ein großer Wert in Frage, nämlich ∞. In der Tat, betrachtet man die Quartalsrate R als variabel, so ergibt sich x in Abhängigkeit von R folgendermaßen: $x = \frac{3000 - 4*R}{-3000 + 1{,}5*R}$

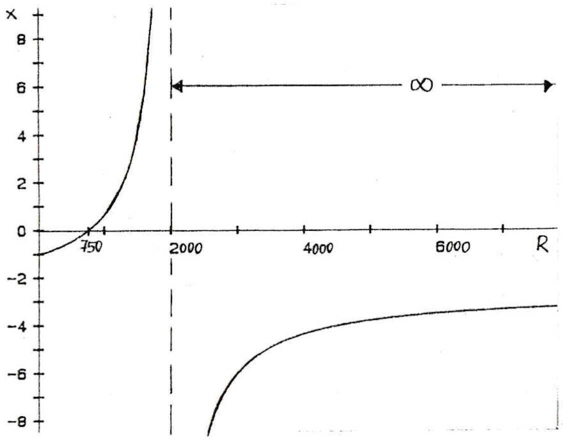


Abb. 11

Die effektiven Zinssätze x für R≥3000 müssen wegen der Isotonie (106) größer sein als die für R<3000, sie müssen also ∞ gesetzt

werden (für etwaige weitere Betrachtungen muß man sich mit dem Gedanken anfreunden, daß mit ∞ etwas anders zu rechnen ist als mit reellen Zahlen; z.B. kommen Aussagen wie '$\infty=\infty+1$' oder '$\infty>\infty$' als korrekt in Betracht).

Mit dem Aufspalt-Verfahren (113) erhält man den Zahlungsstrom $(-3000+1{,}5*2200;\ 2{,}5*2200) = (300;\ 5500)$, und diesem sieht man direkt die Besonderheit an, nämlich: (119) ist verletzt; der Darlehensnehmer zahlt so früh so hohe Beträge zurück, daß er praktisch nie ein Darlehen zur Verfügung hat, da Zahlungen rechnerisch nicht nur nach hinten, sondern auch nach vorne verlegt werden. Mit dem Aufspalt-Verfahren (in einer Form wie (117)) stößt man automatisch auf dieses Phänomen und auf die Bedingung, unter der es vermieden wird:

(122) ***Endlichkeits-Bedingung***: Erfolgen Rückzahlungen auf ein Darlehen innerhalb des ersten Laufzeitjahres, dann ergibt sich nur dann ein endlicher effektiver Zinssatz, wenn das Darlehen größer als die Summe der nach dem Aufspalt-Verfahren (113) ermittelten Anteile dieser Rückzahlungen für den Jahresanfang ist, bei (117) z.B., wenn mit $K=-Z_0$ und $R=Y$ gilt: $K > 5{,}5*R$.

2.7 Nicht-ganzjährige Laufzeiten

Es ist nicht nur Praxis, daß Zahlungen zu anderen Terminen als nach vollen Laufzeit-Jahren stattfinden; viele Kreditgeschäfte sind sogar so angelegt, daß dies insbesondere auch für die letzte Zahlung gilt, daß also die Gesamt-Laufzeit nicht ganzjährig ist.

Zur Errechnung des effektiven Zinssatzes könnte man einfach die Laufzeit auf volle Jahre aufrunden (natürlich ohne Zahlungen in dieser fiktiven Restlaufzeit hinzuzufügen) und alle tatsächlichen Zahlungen auf dieses (künstliche) Laufzeitende **aufzinsen**. Dieses
(123) ***Aufrundungs-Verfahren*** wäre rechnerisch bequem und außerdem konsistent; bei ihm tritt nämlich die in (138) beschriebene Verletzung der Isotonie (106) nicht auf. Allein, es widerspricht der Sparkassen-Konvention (23).

Diese wird in der Formel der PAngV folgendermaßen berücksichtigt: Die Laufzeit wird von ihrem Anfang an in ganzjährige Zinsperioden eingeteilt, und ein etwaiger nicht-ganzer Rest bildet eine weite-
(124) re letzte, kürzere, Zinsperiode (***Prinzip vom nicht-ganzen Rest***). Dieses Prinzip führt zu einer gewissen Komplizierung der Formeln und Rechnungen, die man aber mit Hilfe des Aufspalt-Verfahrens (113) verhältnismäßig leicht in den Griff kriegt.

Abb. 12: "**Betrag: 15 000,— DM; Laufzeit: 47 Monate; ...; 1. Rate: 358,— DM; 46 Raten: 380,— DM; Effekt. Jahreszins: 9,59 %.**"

Der Zahlungsstrom ist $(-15000+5,5*380-\frac{11}{12}*22;\ -\frac{1}{12}*22+12*380;\ 12*380;\ 6,5*380+380*(\frac{10}{11}+\frac{9}{11}+...+\frac{1}{11});\ 380*(\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+...+\frac{11}{11}))_{3+11/12} = (-12930,17;\ 4558,17;\ 4560;\ 4370;\ 2280)_{3+11/12}$. (Mit dem Index - in dieser oder einer anderen Form - wird deutlich gemacht, daß die letzte Periode kürzer als 1 Jahr ist.) Die Aufspaltung der Raten der letzten Zinsperiode auf deren Anfang und Ende ergibt sich direkt aus (118): Sie ist in 11 gleichlange Zahlungsperioden eingeteilt, und gezahlt wird nachschüssig. Also kommen $\frac{11-1}{2}=5$ Raten an den Anfang und $\frac{11+1}{2}=6$ Raten ans Ende. Es entsteht die Polynom-Gleichung $(((-12930,17*y + 4558,17)*y + 4560)*y + 4370)*y' + 2280 = 0$ (mit $y=1+x$ und $y'=1+\frac{11}{12}*x$), aus der sich der effektive Zinssatz 9,35 % ergibt.

(125) Die ***Formel der PAngV*** mit Auszahlung $K>0$, monatlichen Raten $Y>0$, Restschuld S $(S>-Y)$, Laufzeit n Jahre und m Monate $(n\geq 1;\ 0\leq m<12)$ baut sich folgendermaßen auf: Der Zahlungsstrom ist

(126) $(-K+5,5*Y;\ (n-1)\text{-mal } 12*Y;\ (6,5+\frac{m-1}{2})*Y;\ \frac{m+1}{2}*Y+S)_{n+m/12}$

mit der Bestimmungsgleichung

(127) $((-K+5,5*Y)*y^n + 12*Y*\frac{y^{n-1}-1}{y-1}*y + (6,5+\frac{m-1}{2})*Y)*y' + \frac{m+1}{2}*Y + S = 0$ (wobei $y=1+x$ und $y'=1+\frac{m}{12}*x$ ist)

für den effektiven Zinssatz. (Es lohnt nicht, dies noch in die sehr unübersichtliche Form zu bringen, wie sie die PAngV verwendet.) Die Endlichkeits-Bedingung (122) lautet

(128) $K > 5,5*Y$.

Ist sie verletzt, so hat (127) keine reelle Lösung >-1, und der effektive Zinssatz x ist ∞ zu setzen. Die Nettosumme (103) beträgt

(129) $Q_n = -K + (12*n+m)*Y + S$.

Der effektive Zinssatz x hat dasselbe Vorzeichen (+,0,-) wie Q_n, wobei (127) nur für $x\neq 0$ sinnvoll ist.

Für Laufzeiten, die ***kürzer als 1 Jahr*** sind (n=0), hat man ent-
(130) sprechend dem Zahlungsstrom $(-K+\frac{m-1}{2}*Y;\ \frac{m+1}{2}*Y+S)$, die Gleichung $(-K+\frac{m-1}{2}*Y)*y' + \frac{m+1}{2}*Y + S = 0$, die Endlichkeits-Bedingung $K > \frac{m-1}{2}*Y$, die Nettosumme Q_n und die Vorzeichenregel wie (129).

Gerade anhand so kurzer Laufzeiten leuchtet ein, daß das Aufrundungs-Verfahren (123) nicht praxisgerecht wäre: Es wirkt doch merkwürdig, wenn für einen Zeitraum, ***vor dem*** das Geldgeschäft schon beendet ist und der im Vergleich zu dessen Laufzeit recht lang ist, Zinsen berechnet werden (z.B. ein Zinszeitpunkt nach 12 Monaten bei einer Laufzeit von nur 4 Monaten o.ä.).

Bei nicht-ganzjährigen Laufzeiten können merkwürde Effekte auftreten (und zwar unabhängig davon, ob das Aufrundungs-Verfahren (123) oder das Prinzip vom nicht-ganzen Rest (124) zugrundegelegt wird): "**Ein Zwischendarlehen bis zur Zuteilung eines Bausparver-**
(131) **trags über 70 000 DM wird konstant mit 6,25 % verzinst. Die Zinsen werden in jedem Jahr in 12 Monatsraten nachschüssig über das**

Jahr verteilt gezahlt, das Darlehen zum Schluß mit dem Bauspardarlehen abgelöst." Berechne den effektiven Zinssatz bei einer Laufzeit von n Jahren und m Monaten sowohl nach der Formel (126) der PAngV (mit dem Prinzip vom nicht-ganzen Rest), als auch mit dem Aufrundungs-Verfahren.

Aus der Rechnung zu (88) weiß man, daß bei ganzjährigen Laufzeiten (m=0) und gleichmäßigen Zinsbedingungen am Jahresende der effektive Zinssatz gleich dem nominalen, also unabhängig von n, ist. Aufgabe (109) weist darauf hin, daß (nach wie vor ist m=0) bei vorgezogenen Zinszahlungen zwar der effektive Zinssatz größer als der nominale, aber immer noch unabhängig von der Laufzeit ist; jedenfalls wenn die Zahlungsstruktur in jedem Jahr dieselbe ist und die Restschuld mit dem Auszahlungsbetrag übereinstimmt.

In der Tat: Finden die Zinszahlungen z.B. monatlich statt, so hat man - ***beim Prinzip vom nicht-ganzen Rest*** - den Zahlungsstrom $(-K+5{,}5*\frac{i}{12}*K;\ (n-1)\text{-mal } i*K;\ K+6{,}5*\frac{i}{12}*K)$. Die Endlichkeits-Bedingung (122) $i < \frac{24}{11}$ sei erfüllt, und außerdem sei $i>0$, also die Nettosumme $Q_n = n*i*K$ positiv. Dann ergibt sich der effektive Zinssatz aus $(-K+5{,}5*\frac{i}{12}*K)*y^n + i*K*\frac{y^n-1}{y-1} + K - 5{,}5*\frac{i}{12}*K = 0$ und $(-1+\frac{5{,}5*i}{12})*(y^n-1) + i*\frac{y^n-1}{y-1} = 0$ schließlich zu

(132) $x = y-1 = \dfrac{i}{1-\frac{11*i}{24}}$ (= 6,4343 % für i = 6,25 %).

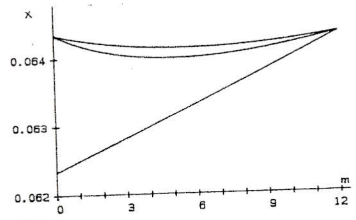
Sei nun $m \neq 0$. Dann lautet der Zahlungsstrom nach der PAngV

$K*(-1+\frac{m-1}{24}*i;1+\frac{m+1}{24}*i)_{m/12}$ (für n=0, m>0; (130))

(133) bzw. $K*(-1+\frac{11}{24}*i;\ (n-1)\text{-mal } i;\ \frac{12+m}{24}*i;\ 1+\frac{m+1}{24}*i)_{n+m/12}$ (für n>0; (126)).

Für n=0 ist dann $x_1 := x_{PAngV} := \dfrac{i}{1-\frac{(m-1)*i}{24}}$, für n>0 rentiert sich die Explizierung von x_1 nicht; man geht iterativ vor und erhält folgende Tabelle (für n Jahre, m Monate; x_1 in %):

m\n	0	1	2
0		6,4343	6,4343
1	6,2500	6,4198	6,4270
2	6,2663	6,4100	6,4216
3	6,2827	6,4038	6,4178
4	6,2992	6,4005	6,4155
5	6,3158	6,3996	6,4145
6	6,3325	6,4007	6,4147
7	6,3492	6,4034	6,4159
8	6,3660	6,4075	6,4180
9	6,3830	6,4128	6,4210
10	6,4000	6,4191	6,4248
11	6,4171	6,4263	6,4292
12	6,4343	6,4343	6,4343



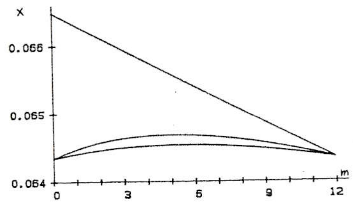


Abb. 13a: nicht-ganzer Rest (124)   13b: Aufrundung (123)

Beim ***Prinzip vom nicht-ganzen Rest*** hat man also: Für n=0 ist x_1 in Abhängigkeit von m streng monoton wachsend. Läßt man für n>0 die Variable m von 0 bis 12 laufen, dann sinkt x_1 zunächst auf ein Minimum und steigt dann wieder bis zu dem Wert, den es am Anfang hatte. Diese scheinbare Paradoxie kommt folgendermaßen zustande:

Würde bei n=0 die Rückzahlung komplett immer erst zum Zeitpunkt $\frac{m}{12}$ erfolgen, wäre konstant $x_1 = i = 6{,}25$ %. Durch die monatliche Zahlweise wird aber mit wachsendem m ein immer größerer Anteil in immer stärkeren Maße vorgezogen, so daß $x_1=i$ nur für m=1 gilt und x_1 dann monoton wächst.

Für n>0 ist der effektive Zinssatz eine Art Mittelwert zwischen den effektiven Zinssätzen jeder einzelnen Periode. Alle ganzjährigen Perioden haben ein und denselben effektiven Zinssatz, lediglich die kürzere Periode am Ende der Laufzeit hat einen etwas niedrigeren. Dieser fällt für die Gesamtrechnung umso stärker ins Gewicht, je länger diese letzte Periode ist. D.h.: Je länger die letzte Periode ist, desto niedriger wird der gesamte effektive

Zinssatz - einerseits. Andererseits wird der effektive Zinssatz in der letzten Periode (und damit in der ganzen Laufzeit) höher, wenn sie länger dauert (vgl. den Fall n=0). Diese beiden gegenläufigen Wirkungen führen zu dem oben dargestellten Funktionsverlauf mit einem Minimum ungefähr in der Mitte. Mit größerem n wird dieses Minimum naturgemäß immer weniger ausgeprägt und rückt auch noch nach rechts.

Beim ***Aufrundungs-Verfahren*** (123) entsteht über $(-K+(5{,}5-\frac{(12-m)*(11-m)}{2*12})*\frac{i}{12}*K+(1-\frac{m}{12})*K;\ \frac{m*(m+1)}{2*12}*\frac{i}{12}*K+\frac{m}{12}*K)$ (für n=0, m>0) und $(-K+5{,}5*\frac{i}{12}*K;$ (n-1)-mal $i*K;\ i*K-\frac{(12-m)*(11-m)}{2*12}*\frac{i}{12}*K+(1-\frac{m}{12})*K;\ \frac{m*(m+1)}{2*12}*\frac{i}{12}*K+\frac{m}{12}*K)$ (für n>0) der Zahlungsstrom

$$\frac{m}{12}*K*(-1+\frac{23-m}{24}*i;\ 1+\frac{m+1}{24}*i) \quad \text{(für n=0, m>0)}$$

(134) bzw. $K*(-1+\frac{11}{24}*i;$ (n-1)-mal $i;\ \frac{13}{24}*i+\frac{m*(23-m)}{24}*\frac{i}{12}+1-\frac{m}{12};\ \frac{m}{12}+\frac{m*(m+1)}{24}*\frac{i}{12})$ (für n>0),

und man erhält nun für n=0 explizit $x_2 := x_{Aufru} := \frac{i}{1-\frac{(23-m)*i}{24}}$, während man für n>0 zur Berechnung der folgenden Tabelle wieder iterativ vorgeht:

m\n	0	1	2
0		6,4343	6,4343
1	6,6298	6,4481	6,4413
2	6,6116	6,4578	6,4465
3	6,5934	6,4640	6,4502
4	6,5753	6,4674	6,4525
5	6,5574	6,4685	6,4536
6	6,5395	6,4676	6,4536
7	6,5217	6,4650	6,4525
8	6,5041	6,4610	6,4504
9	6,4865	6,4558	6,4475
10	6,4690	6,4495	6,4438
11	6,4516	6,4423	6,4394
12	6,4343	6,4343	6,4343

Beim ***Aufrundungs-Verfahren*** gilt nun (vgl. Abb. 13b): Die Funktion ist im Bereich n=0 streng monoton fallend und hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ im Intervall]n; n+1[ein lokales Maximum. Die Erklärung für den Bereich n=0 lautet: Für kleine m findet die Rückzahlung im Vergleich zur Gesamtlaufzeit sehr früh statt, was zu einem hohen Zinssatz führt. Auch wenn die Nettosumme (103) mit steigendem m wächst, so dominiert dann das Späterlegen der Haupt-Rückzahlung und läßt den effektiven Zinssatz sinken. Im Bereich n>0 ist die Erklärung analog zu der beim Prinzip vom nicht-ganzen Rest (124).

Grundsätzlich ist $x_{Aufru} > x_{PAngV}$, jedenfalls wenn die Nettosumme (103) positiv ist: Bei ***verletzter*** Endlichkeits-Bedingung (122) ist sowieso $x_{Aufru} = \infty$. Sei (122) nun ***erfüllt*** und (im einfachsten Fall) K (>0) die Auszahlung und Y (>K) die Rückzahlung zum Zeitpunkt t (0<t<1). (122) bedeutet dann: $K > (1-t)*Y$. Sei weiter x_1 der Zinssatz, mit dem der Endwert von K zum Zeitpunkt t gerade Y ist, also $K*(1+t*x_1) = Y$. Wenn nun beide Beträge bis zum Jahresende weiter mit x_1 aufgezinst werden, so kommt wegen der ***einfachen*** Verzinsung (die Zinsen werden zum Zeitpunkt t ***nicht*** kapitalisiert!) zur Auszahlung noch $K*(1-t)*x_1$ und zur Rückzahlung noch der (wegen Y>K) größere Wert $Y*(1-t)*x_1$ hinzu. Wird also bis zum Jahresende aufgezinst, so benötigt man einen höheren Zinssatz x_2, bei dem dann der Endwert von K zur Zeit t größer als Y ist, so daß die Endwerte zur Zeit 1 wirklich gleich sind. In Formeln: x_1 ist definiert durch $-K*(1+t*x_1) + Y = 0$ und x_2 durch $(-K+(1-t)*Y)*(1+x_2) + t*Y = 0$. Dann ist

(135) $x_1 = \frac{K-Y}{-t*K} = \frac{Y-K}{K-(1-t)*K}$ und $x_2 = \frac{K-Y}{-K+(1-t)*Y} = \frac{Y-K}{K-(1-t)*Y}$,

und wegen $Y > K > (1-t)*Y$ gilt in der Tat

(136) $x_{Aufru} = x_2 > x_1 = x_{PAngV}$.

Hat man nun zu einer Auszahlung K' zum Zeitpunkt 0 ***mehrere*** Rückzahlungen innerhalb der Zeitspanne [0; t] (mit 0<t<1), so sind diese entsprechend (113) aufzuspalten und auf die Zeitpunkte 0 und t zu verteilen, so daß fiktiv eine modifizierte Auszahlung K zum Zeitpunkt 0 und eine einzige Rückzahlung Y zum Zeitpunkt t entsteht. Mit diesen Werten geht man in die Gleichungen (135), und wenn man wieder $Y > K > (1-t)*Y$ hat, folgt auch wieder (136).

Beispiel: Nach der Auszahlung K' zum Zeitpunkt 0 mögen m gleichhohe Rückzahlungen Y' monatlich nachschüssig folgen (0<m<12). Positivität der Nettosumme und Erfülltsein der Endlichkeits-Bedingung bedeuten hier $m*Y' > K' > \frac{(23-m)*m}{24}*Y'$; denn mit $K = K' - \frac{m-1}{2}*Y'$, $Y = \frac{m+1}{2}*Y'$ und $t = \frac{m}{12}$ ist $Y - K = m*Y' - K' > 0$ sowie $K - (1-\frac{m}{12})*Y = K' - \frac{m-1}{2}*Y' - \frac{m+1}{2}*Y' + \frac{m*(m+1)}{2}*Y' = K' - \frac{(23-m)*m}{24}*Y' > 0$. Unter diesen Bedingungen folgt dann wieder direkt (136).

<u>Ganz grundsätzlich ergibt das Prinzip vom nicht-ganzen Rest</u> (124)
(137) <u>bei ein und demselben Zahlungsstrom einen niedrigeren Wert für</u>
<u>den effektiven Zinssatz als das Aufrundungs-Verfahren</u> (123). Dies nützt dem Darlehens***geber*** (!); denn bei ein und demselben effektiven Zinssatz (also derselben Optik für den Darlehensnehmer) erhält er bei (124) höhere Rückzahlungen als bei (123).

Bei aller Natürlichkeit hat aber <u>das Prinzip vom nicht-ganzen Rest</u> (124), das ja in die Formel der PAngV eingebaut wurde, den mathematisch-prinzipiellen (wenn auch sich praktisch nicht aus-
(138) wirkenden) <u>Mangel der Inkonsistenz, indem es die Isotonie (106)</u>
<u>verletzt</u>, wie folgendes Beispiel zeigt: "**Ein Darlehen über 100 DM**
(139) **kann in 2 Varianten zurückgezahlt werden: (i) nach 1 Quartal**
102 DM, (ii) nach 1 Quartal 101 DM und nach 1 Jahr 1 DM."

Offensichtlich ist Variante (i) für den Darlehensgeber besser und sollte einen höheren effektiven Zinssatz erhalten. Tatsächlich hat man aber bei (i) den Zahlungsstrom $(-100; 102)_{1/4}$ und einen effektiven Zinssatz 8 %, während der Zahlungsstrom bei (ii) $(-100+\frac{3}{4}*101; \frac{1}{4}*101+1)=(-24,25; 26,25)$ und der effektive Zinssatz 8,25 % lautet. Die kleine Zahlung nach 1 Jahr erzwingt, daß zwar die Sparkassen-Konvention (23) eingehalten wird, trotzdem aber wie beim Aufrundungs-Verfahren (123) zu rechnen ist. Die dadurch hervorgerufene Erhöhung des effektiven Zinssatzes dominiert die geringfügige Erniedrigung infolge der späteren Rückzahlung.

Aus systematischen Gründen verbietet sich also eigentlich die Anlehnung an die Sparkassen-Konvention (23). Für die Zwecke der Bank-***Praxis*** ist die Formel der PAngV (125) doch brauchbar: Bei längeren Laufzeiten (über 1 Jahr) macht sich ein nicht-ganzjähriger Rest immer weniger bemerkbar, und für betriebs- (bzw. privat-) wirtschaftliche Entscheidungen ist der effektive Zinssatz ein Kriterium unter vielen, dessen zweite Stelle hinter dem Komma (bei Angabe in %) kaum den Ausschlag gibt.

<u>2.8 Noch einige Beispiele</u>

II. Rückzahlungsbescheid nach § 10 Darlehensverordnung (DarlehensV)
Die Pflicht zur Rückzahlung des Darlehens beginnt kraft Gesetzes fünf Jahre nach Ende der Förderungshöchstdauer des **zuerst** mit Darlehen geförderten Ausbildungsabschnitts (§ 18 Abs. 3 Satz 2 BAföG).
Ausgehend vom Ende der Förderungshöchstdauer 02.1983 wird der Rückzahlungsbeginn auf den 31.03.1988 festgesetzt.

Daher ergibt folgender Tilgungsplan

Darlehenskontonummer	Tilgungsablauf		Betrag in DM/Raten
	Darlehen zinslos (Darlehen bis 31.12.75) erste vierteljährliche Rate spätestens zahlbar bis Restrate spätestens zahlbar bis		
55211903526	Darlehen zinslos (Darlehen ab 01.01.76) erste vierteljährliche Rate spätestens zahlbar bis Restrate spätestens zahlbar bis	 31.05.1988 30.11.1991	5.230,00 DM 360,00 DM 190,00 DM

Rechtsbehelfsbelehrung
Gegen diese Bescheide kann innerhalb eines Monats nach Bekanntgabe Widerspruch erhoben werden. Der Widerspru ist beim Bundesverwaltungsamt, Postfach 68 01 69, 5000 Köln 60, schriftlich oder zur Niederschrift einzulegen.
Sollten Sie gegen diese Bescheide Widerspruch einlegen, so erstreckt sich die aufschiebende Wirkung des Wid spruchs nicht auf die von Ihnen dem Grunde und der Höhe nach anerkannten Darlehensbeträge. Sie sind insow verpflichtet, den o. a. Tilgungsplan bei Vermeidung von Verzugsfolgen einzuhalten.

Sollten Sie Ihr Darlehen bis zum Rückzahlungsbeginn in einer Summe zurückzahlen wollen, so wird Ihnen gemäß § 6 Abs. 1 DarlehensV ein Nachlaß von 993,70 **DM gewährt (s. Bl. 3).**

Abb. 14: "... **Rückzahlungsbeginn 31.03.1988 ... Darlehen zinslos 5.230,00 DM ... erste vierteljährliche Rate spätestens zahlbar bis 31.05.1988: 360,00 DM; Restrate spätestens zahlbar bis 30.11. 1991: 190,00 DM ... Sollten Sie Ihr Darlehen bis zum Rückzahlungsbeginn in einer Summe zurückzahlen wollen, so wird Ihnen gemäß § 6 Abs. 1 DarlehensV ein Nachlaß von 993,70 DM gewährt.**"

(140) "**Soll man das BAföG-Darlehen in einer Summe oder auf Raten zu-**
rückzahlen?" (Vgl. auch Kluge 1986 und Stiller 1987.)

Zahlt man sofort zurück, muß man nur 5230 - 993,70 = 4236,30 (DM) zahlen. Unterläßt man dies, dann nimmt man praktisch vom BAföG-Amt zum 31.03.1988 ein Darlehen über 4236,30 DM auf und tilgt es gemäß dem Tilgungsplan. Der Zahlungsstrom lautet $(-4236,3+(\frac{10}{12}+\frac{7}{12}+\frac{4}{12}+\frac{1}{12})*360;\ 4*360;\ 4*360;\ (\frac{2}{12}+\frac{5}{12}+\frac{8}{12}+\frac{11}{12})*360+(\frac{6}{8}+\frac{3}{8})*360;\ (\frac{2}{8}+\frac{5}{8})*360+190)_{3+8/12} = (-3576,30;\ 1440;\ 1440;\ 1185;\ 505)_{3+8/12}$ und der effektive Zinssatz 12,52 %. Selbstverständlich verzichtet man auf dieses teure Darlehen, d.h. man zahlt sofort alles zurück, auch wenn man dafür ein Bankdarlehen aufnehmen muß (mit einem effektiven Zinssatz von z.Z. etwa 10 %).

Ein strukturell identischer Fall, jedoch mit einer Laufzeit von unter 1 Jahr (also einfacher Verzinsung): "**Bei der Autoversicherung (u.a.) kann man seine Jahresprämie auch in 4 Quartalsraten**
(141) **(vorschüssig) mit 5 % Aufschlag oder in 2 Halbjahresraten (vorschüssig) mit 3 % Aufschlag zahlen, d.h. man läßt sich von der Versicherung ein Darlehen über die Jahresprämie K geben und zahlt dieses in 4 Raten $\frac{K}{4}$*1,05 oder in 2 Raten $\frac{K}{2}$*1,03 zurück.**" Die Zahlungsströme lauten: $(-K+\frac{K}{4}*(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3})*1{,}05;\ \frac{K}{4}*(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1)*1{,}05)_{3/4} = K*(-0{,}475;\ 0{,}525)_{3/4}$; bzw. $(-K+\frac{K}{2}*1{,}03;\ \frac{K}{2}*1{,}03)_{1/2} = K*(-0{,}485;\ 0{,}515)_{1/2}$ mit effektiven Zinssätzen 14,04 % bzw. 12,37 %.

(142) "**Wie kann man Finanzierungsangebote vergleichen, bei denen über das gewährte Darlehen hinaus Eigenkapital erforderlich ist, z.B. beim Autokauf** (s. Abb. 10c)?" Auch wenn man infolge der Festlegung auf Automarke und -typ gar keine Alternativen zu dem Angebot (jedenfalls des Typs 'Anzahlung + Darlehen') hat, benötigt man doch zumindest eine Einschätzung des Effekts der Anzahlung. Dieser Betrag muß ja in der Vergangenheit angespart worden sein (man hat also schon sehr früh quasi Rückzahlungen für die Auszahlung in Höhe des Kaufpreises geleistet), und man kann nun gewisse Geldanlagen nicht realisieren, oder der Betrag muß jetzt finanziert werden. Es sei hier die (begrifflich einfachere) zweite Alternative behandelt und dabei ein (moderater) effektiver Zinssatz für die Finanzierung unterstellt: Ein Darlehen K soll mit monatlichen Ratenzahlungen nach 3 Jahren bei einem effektiven Zinssatz von 9,6 % getilgt werden. Wie hoch sind die Raten Y? Zahlungsstrom: (-K+5,5*Y; 12*Y; 12*Y; 6,5*Y); Gleichung: $(-K+5{,}5*Y)*y^3 + 12*Y*\frac{y^3-1}{y-1} - 5{,}5*Y = 0$; und daraus $Y = \frac{K*y^3}{(5{,}5+\frac{12}{y-1})*(y^3-1)} = 0{,}0318715*K$.

Bei Abb. 10c(i) ist die Anzahlung 3962 DM, also Y = 126,275. Um den effektiven Zinssatz von 9,6 % genau zu treffen, werden die 2. bis 36. Rate auf 127 DM und die erste um den Betrag D niedriger festgelegt: Der Zahlungsstrom $(-3962+5{,}5*127+\frac{11}{12}*D;\ \frac{1}{12}*D+12*127;\ 12*127;\ 6{,}5*127)$ führt zu $D = ((3962-5{,}5*127)*y^3-12*127*y^2-12*127*y-6{,}5*127)*12\ /\ (11*y^3+y^2) \approx -23$, so daß die erste Rate 104 DM beträgt. Das gesamte Geldgeschäft bei Abb. 10c(i) hat dann

den Zahlungsstrom $(-15850-\frac{11}{12}*51+5{,}5*468;\ -\frac{1}{12}*51+12*468;\ 12*468;\ 6{,}5*468)$ und den (immer noch recht günstigen) effektiven Zinssatz 3,87 %. (Als Anhaltspunkt hätte man auch einfacher das gewichtete arithmetische Mittel 3,87 % aus 9,6 % (zu 1/4) und 1,96 % (zu 3/4) nehmen können.)

Bei Abb. 10c(ii) ergibt sich auf ähnliche Weise ein Zahlungsstrom (-8843,75; 3838,75; 3840; 2080) und ein effektiver Zinssatz von 5,61 %.

(143) "**Wie günstig ist Bausparen?**" Bausparen ist eine Finanzierungsform, die zu keinem der Typen (37)-(42) paßt: Hier muß der Darlehensnehmer schon jahrelang Rückzahlungen vorab leisten, ehe er das Darlehen überhaupt erhält (in der sog. Ansparphase). Selbstverständlich läßt sich für dieses gesamte Geschäft der Zahlungsstrom in der üblichen Weise (70) aufstellen, die Gleichung (84) für den effektiven Zinssatz ist aber mit der Grundmenge $(-1,\infty)$ i.a. nicht mehr eindeutig lösbar, vielmehr gibt es 2 bzw. 0 Lösungen.

Eine vernünftige Wahl für den effektiven Zinssatz ist die kleinere der beiden Lösungen bzw., wenn keine existiert, der Wert ∞. (Für die folgenden Ausführungen vgl. Bender 1987a, 1987b, 1988 und in Arbeit). In der Praxis kommt man unter den üblichen Bedingungen bei Ansparzeiten von ca. 7 Jahren zu Werten in der Größenordnung von 10 % bis 15 %, ab knapp 8 Jahren von ∞: Das Darlehen wird so spät ausgezahlt, daß es bei keiner noch so hohen Verzinsung die Vorab-Rückzahlungen ausgleichen kann. Dies überrascht, wo doch die nominalen Zinssätze so niedrig sind! Man kann sich diesen Sachverhalt aber folgendermaßen plausibel machen:

Man stelle sich folgendes Darlehen vor, das sich von einem Bauspar-Geschäft nur um eine einzige, allerdings wesentliche Einzelheit unterscheidet: ***Der Strom der Rückzahlungen des Darlehensnehmers*** ist identisch mit dem Strom der Zahlungen eines Bausparers mit einer Gesamtlaufzeit von ca. 20 Jahren (bestehend aus der sog. Ansparphase mit den sog. Sparbeiträgen ***und*** der sog. Darlehensphase mit den sog. Tilgungsbeiträgen). ***Die Auszahlung des***

Darlehensgebers erfolgt in Höhe der Bausparsumme; lediglich der Auszahlungs***zeitpunkt*** (und das ist der Unterschied zum Bausparen) wird, wie bei einem gewöhnlichen Darlehen, ***ganz an den Anfang*** der Laufzeit gelegt: Für den Darlehensnehmer wirklich vorzügliche Bedingungen mit einem effektiven Zinssatz unter 2 %.

Weiter stelle man sich eine Schar von Darlehen vor, die alle denselben Rückzahlungsstrom wie das eben beschriebene haben. Auch die Auszahlung hat immer dieselbe Höhe; nur ***der Zeitpunkt der Auszahlung*** rückt bei dieser Schar immer weiter ***nach hinten***. Offensichtlich werden die Darlehen für den Darlehensnehmer dadurch immer schlechter. Der effektive Zinssatz (wenn man ihn nach wie vor nach (83) definiert) wird immer größer, und zwar wächst er zunächst recht langsam, dann aber immer schneller, und wird bald ∞. Bei den Zahlungsstrukturen unter den üblichen Bauspar-Bedingungen (ohne vorzeitige Sonderzahlungen) geschieht dies, wenn die Auszahlung erst nach knapp acht Jahren oder später stattfindet - wie dies bei den alteingesessenen Bausparkassen im vergangenen Jahrzehnt gang und gäbe war.

Allerdings ist der auf diese Weise definierte effektive Zinssatz ***nicht amtlich***; vielmehr ist nach der PAngV der effektive Zinssatz nur für die Darlehensphase anzugeben, also für die Zeit ab Auszahlung des Darlehens. Da beträgt er i.a. knapp 6 % (in manchen Varianten etwas mehr), und zwar unabhängig vom Marktzinssatz, so daß er in Hochzinszeiten sehr günstig ist. Aber - wie bei der Autofinanzierung - muß doch das verlangte Eigenkapital bzw. die Ansparzeit auch irgendwie berücksichtigt werden!

Völlig irreführend wäre hier die Heranziehung des sog. ***Zinsabstands*** zwischen dem sog. Habenzinssatz für die sog. Ansparphase von z.B. nominal 3 % und dem sog. Sollzinssatz für die sog. Darlehensphase von 5 % (effektiv vielleicht 2,7 % gegenüber 5,7 %). Denn dieser ist auch dann noch derselbe, wenn etwa im Extremfall die Bausparsumme fast komplett als Vorab-Eigenleistung angespart ist und das eigentliche Darlehen dann nur noch wenige DM beträgt. Tendenziell ging es den Bausparern Anfang der 80-er Jahre so: Die Ansparzeiten, die bis dahin immer etwa 7 Jahre betragen hatten,

verlängerten sich infolge der wirtschaftlichen Lage und unangemessener Reaktionen der Bausparkassen auf einmal erheblich und führten zu einer wesentlichen Verschlechterung der Finanzierung bei nach wie vor gültigem Zinsabstand von 2,7 % zu 5,7 % o.ä.

Eine Möglichkeiten, einen Bausparvertrag ***insgesamt*** zu bewertet, bietet sich folgendermaßen: Häufig benötigt der Bausparer das Baugeld direkt bei Vertragsabschluß, und da er das Bauspardarlehen erst viele Jahre später erhält, wird ihm sofort ein Kredit in Höhe der Bausparsumme gewährt (Vor- bzw. Zwischenfinanzierung), für den er zunächst immer nur die Zinsen zu zahlen hat und der dann bei Zuteilung des Bauspardarlehens auf einen Schlag abgelöst wird. Der Bausparvertrag bildet nun mit der Zwischenfinanzierung ***zusammen*** ein herkömmliches Darlehen, dessen effektiver Zinssatz berechnet und mit dem der Zwischenfinanzierung ***allein*** verglichen werden kann.

Dies wird im folgenden exemplarisch vorgeführt. Man kann gewiß nicht ein solches Verfahren durch die PAngV verbindlich machen, und so bleibt es bei der den Verbraucher letztlich täuschenden Angabe des effektiven Zinssatzes für die Darlehensphase (es überrascht nicht, daß die Bausparkassen als einzige Banken sich mit der PAngV zufrieden gezeigt haben; s. 'Der langfristige Kredit' 1985). Die Zahlenwerte des Beispiels sind ***nicht*** authentisch, damit es nicht zu kompliziert wird; sie sind aber realistisch:

(144) **"Bausparsumme 120 000 DM, Abschlußgebühr 1 %, monatliche Sparrate 0,4 %, Verzinsung des Sparguthabens mit 3 % ab dem Tag der Gutschrift, jährliche Kontoführungsgebühr 10 DM. Nach einer noch nicht von vorneherein feststehenden Zeit endet die Ansparphase, und die Bausparsumme wird ausgezahlt. Der das Guthaben übersteigende Betrag ist das eigentliche Darlehen. Von diesem werden 2 % Gebühr erhoben. Es ist in monatlichen Raten zu 1 % vom Anfangsbestand zu tilgen. Der nominale Jahreszinssatz beträgt 5 %; die Zinsen werden vierteljährlich vom Quartalsanfangsbestand berechnet und am Quartalsende belastet. Kontoführungsgebühr nach wie vor 10 DM."**

Zur Aufstellung des Zahlungsstroms fehlt noch ein wichtiges Datum: die Wartezeit bis zur Zuteilung des Darlehens, also die Länge der Ansparphase. Diese ist bei Vertragsabschluß prinzipiell auch für die Bausparkasse unbekannt, da sie von deren in der mittelfristigen Zukunft verfügbaren Mitteln abhängt. Selbstverständlich haben die Bausparkassen sehr genaue Vorstellungen von ihren Wartezeiten, aber sie dürfen sie dem Bausparer nicht verbindlich mitteilen. Der Bausparer selbst kann sie beeinflussen durch die Höhe seiner Sparrate. Unter den o.a. Bedingungen sei einfach ein-
(145) mal "**eine Ansparphase von 9 Jahren**" angenommen.

Nach dem ***Vergiß-Prinzip*** (71) kommt es nur auf ***tatsächliche Zahlungen*** an. Allerdings spielen die Belastung von Gebühren und die Verbuchung von Zinsen u.ä. sehr wohl auch eine Rolle: Sie beeinflussen die ***Höhe*** des Sparguthabens ('Restschuld') nach 9 Jahren, damit die Höhe des Bauspardarlehens und die Höhe der Raten in der Darlehensphase. Außerdem wirken sie sich auf die ***Länge*** der Anspar- (die hier jedoch mit 9 Jahren fest angenommen wird) und der Darlehensphase aus. Laut PAngV sind die Kontoführungsgebühren zu vernachlässigen, weil sie in absoluten Zahlen angegeben werden und sich daher auf verschiedene Vertragssummen verschieden (aber letztlich doch kaum) auswirken. - Für meine persönlichen Berechnungen werde ich als Bausparer sie sehr wohl einbeziehen.

Zunächst ist das Guthaben am Ende der Ansparphase zu ermitteln: $(-1200+5{,}5*480)*1{,}03^9 + 12*480*\frac{1{,}03^9-1}{0{,}03} - 5{,}5*480 - 10*\frac{1{,}03^{10}-1}{0{,}03} + 10 = 57651$ (DM). Daraus ergibt sich ein rechnerisches Darlehen von (120000-57651)*1,02 = 63596 (DM). Die Raten der Darlehensphase sind 636 DM, und nun ist die Laufzeit festzustellen. Die Zinskapitalisierung wird vierteljährlich vorgenommen, und man kann so tun, als ob an jedem Quartalsende 3*636 = 1908 (DM) gezahlt würden, und die Kontoführungsgebühr zunächst vernachlässigen. Man hat also einen Zahlungsstrom (mit ***Quartalen*** als Perioden) von (-63596; (m-1)-mal 1908; 1908+S) mit einer Verzinsung mit 1,25 % pro Periode. Also: Für welches m ist die Restschuld $S = 63596*1{,}0125^m - 1908*\frac{1{,}0125^m-1}{0{,}0125}$ letztmals positiv (bei wachsendem m)? Nach m=43 Quartalen ist S = 728,37 DM (bei m=44 ist S<0). Hinzuzufügen ist noch $10*\frac{1{,}0125^{4*11}-1}{1{,}0125^4-1}*1{,}0125^3 = 148{,}19$ (DM) als End-

wert der Kontoführungsgebühren, und die Rechnung im 44. Quartal lautet: Der Anfangsbestand von -876,56 DM ist in 2 Monaten getilgt. In dieser Zeit wird er mit $\frac{1}{6}*5\%$ verzinst; sein Endwert ist -883,86 DM. Da die Einzahlungen in dieser Zeit nicht verzinst werden, betragen sie nach 1 Monat 636 DM und am Schluß 248 DM.

Für die Darlehensphase beträgt der Zahlungsstrom also $(-62349+5{,}5*636;\ 9\text{-mal}\ 12*636;\ 6{,}5*636+5*636;\ 5*636+248)_{10+11/12} = (-58851;\ 9\text{-mal}\ 7632;\ 7314;\ 3428)_{10+11/12}$ und der effektive Zinssatz 5,64 %.

Für die Ansparphase hat man (-5,5*480; 8-mal -12*480; -6,5*480+57651) = (-2640; 8-mal -5760; 54531) mit einem effektiven Zinssatz von 2,37 %.

Für den gesamten Bausparvertrag lautet der Zahlungsstrom schließlich $(2640;\ 8\text{-mal}\ 5760;\ -113382;\ 9\text{-mal}\ 7632;\ 7314;\ 3428)_{19+11/12}$. Die Nettosumme beläuft sich zwar nur auf 14 768 DM, aber die frühen Rückzahlungen treiben den effektiven Zinssatz in die Höhe: Setzt man Gleichung (84) an, so gibt es keine reelle Lösung, der Zinssatz wäre also sogar ∞ zu setzen.

Nun möge der Bausparer "**bei Vertragsabschluß ein Sofort-Darlehen**
(146) **mit 100 % Auszahlung und 7,2 % nominalem Zinssatz aufnehmen. Die Zinsen sind in monatlichen Raten zu je $\frac{7{,}2\%}{12}$ = 0,6 % zu zahlen. Das Sofort-Darlehen wird bei Zuteilung des Bauspar-Darlehens getilgt.**" Der effektive Zinssatz für das Sofort-Darlehen allein ist nach (132) $\frac{0{,}072}{1-\frac{11}{24}*0{,}072} = 0{,}0745$, und der Zahlungsstrom ist (-120000+5,5*720; 8-mal 12*720; 6,5*720+120000) = (-116040; 8-mal 8640; 124680).

Die Ansparphase zusammen mit dem Sofort-Darlehen ergibt (-113400; 8-mal 14400; 70149) und einen effektiven Zinssatz von 8,75 %. Obwohl für die Sparbeiträge Zinsen gutgeschrieben werden und sich ein Guthaben ansammelt, steigt durch das Hinzufügen dieser Ansparleistungen zum Sofort-Darlehen der effektive Zinssatz von 7,45 % auf 8,75 %, und zwar deswegen, weil die monatlichen Belastungen dabei erheblich höher werden, aber vom Darlehensbetrag nur ein geringer Teil getilgt wird. Die Restschuld nach 9 Jahren beträgt hier noch 62 349 DM. (Würden bei einem effektiven Zinssatz von 7,45 % die Monatsraten von 1200 DM voll auf das Darlehen von 120 000 DM angerechnet werden, dann beliefe sich die Restschuld lediglich auf 47 363 DM).

Nun erwirbt man sich ja mit dieser ungünstigen Anrechnung der Leistungen in der Ansparphase einen Anspruch auf ein relativ günstiges Darlehen, und man muß die Darlehensphase in die Gesamtrechnung einbeziehen: Der Zahlungsstrom (-113400; 8-mal 14400; 11298; 9-mal 7632; 7314; 3428)$_{19+11/12}$ liefert schließlich den effektiven Zinssatz 8,19 %.

Das Sofort-Darlehen mit 7,45 % wird also durch Einbezug eines normalen Bausparvertrags auf 8,19 % (für den Bausparer) verschlechtert. Diese Art der Finanzierung hat außerdem den Nachteil, daß ihre Laufzeit mit knapp 20 Jahren sehr kurz ist, d.h. eine hohe monatliche Belastung mit sich bringt, und das auch noch verstärkt in den ersten Jahren, wo für den normalen Bauherrn das Geld sowieso knapp ist.

Natürlich ist es vernünftig, einen einigermaßen ***angesparten*** Bausparvertrag in der o.a. beschriebenen Form zur Finanzierung eines Baus einzusetzen, weil bei kürzeren Wartezeiten der effektive Zinssatz günstiger aussieht. Fraglich ist, ob es sich überhaupt rentiert, einen Bausparvertrag anzusparen, und noch fraglicher, ob man (leicht veränderte Sichtweise:) zugleich mit der Aufnahme eines Kredits einen Bausparvertrag in gleicher Höhe abschließen soll, mit der der Kredit dann abgelöst wird, oder nicht gleich ein langfristigeres Hypothekendarlehen aufnimmt mit einem effektiven Zinssatz unter 8 %, der etwa für 15 Jahre garantiert ist.

Das wichtigste Argument für das Bausparen, nämlich die Zinssatz-Sicherheit, gilt auch nur mit Abstrichen, da die Güte eines Bausparvertrags ja über die Länge der Wartezeit reguliert wird und diese keineswegs 'sicher' ist. Umgekehrt mache man sich klar: Ist man bereit, für ein 'gewöhnliches' Darlehen über 120 000 DM monatliche Tilgungs- und Zinsraten in Höhe von 1200 DM aufzubrin-

gen, so ist es bei einem effektiven Zinssatz von 8 % nach weniger als $13\frac{1}{2}$ Jahren getilgt!

Abb. 15: "... **Das ist das Programm 15+4, wenn Sie zum Beispiel mit 100 Mark im Monat beginnen und ihre Einzahlungen jährlich um nur 5,5 % erhöhen. Sie zahlen ein: Nur 15 Jahre. Sie bekommen Geld bis nach dem 19. Jahr! Das sind Ihre Teilauszahlungen: nach 7 Jahren = 4.500 DM; nach 9 Jahren = 4.500 DM; nach 11 Jahren = 4.500 DM; nach 13 Jahren = 4.500 DM; nach 15 Jahren = 4.500 DM; nach 17 Jahren = 4.500 DM; Ihre Schlußzahlung nach 19 Jahren = DM 9.924; Summe aller Auszahlungen = DM 36.924; Festzins: 6 %.**"

Bei vorschüssigen Monatsraten von 100,00; 105,50; 111,30; 117,42; 123,88; 130,69; 137,88; 145,46; 153,46; 161,90; 170,80; 180,19; 190,10; 200,56; 211,59 und nachschüssigen Rückzahlungen lautet der Zahlungsstrom (-650,000; -1235,750; -1303,700; -1375,380; -1451,030; -1530,825; -1615,015; 2796,170; -1797,520; 2603,620; -2000,650; 2389,365; -2226,695; 2150,810; -2478,415; 3336,255; 0,000; 4500,000; 0,000; 9924,000), und zwischen dem 7. und 15. Jahr wechseln sich Ein- und Auszahlungen regelmäßig ab, so daß die Überlegungen in Abschn. 2.5 nicht anwendbar sind und weder Existenz noch Eindeutigkeit des effektiven Zinssatzes ohne weiteres gewährleistet sind.

Man kommt hier weiter, indem man den ***kumulierten Zahlungsstrom*** (102) betrachtet: (-650,000; -1885,750; -3189,450; -4564,830; -6015,860; -7546,685; -9161,700; -6365,530; -8163,050; -5559,430; -7560,080; -5170,715; -7397,410; -5246,600; -7725,015; -4388,760; -4388,760; 111,240; 111,240; 10035,240). Man hat dann folgendes Kriterium: <u>Gibt es negative und positive ***Summen*** und liegen</u>
(147) <u>alle negativen ***vor*** allen positiven, dann gibt es einen wohlbestimmten positiven effektiven Zinssatz</u> (83). Mit Hilfe weiterer Transformationen kann dieses Kriterium noch verschärft werden (s. Bender 1988 und in Arbeit). Für den vorliegenden Zahlungsstrom beträgt der effektive Zinssatz 6,00 %.

2.9 Zusammenfassung

Jedem Geldgeschäft wird folgendermaßen ein ***Zahlungsstrom*** zugeordnet: Nach jedem vollen Jahr der Laufzeit und gegebenenfalls zusätzlich am Laufzeitende liegt nach dem ***Prinzip vom nicht-ganzen Rest*** (124) ein Zinskapitalisierungs-Zeitpunkt. Nach dem ***Vergiß-Prinzip*** (71) werden nur tatsächliche Zahlungen berücksichtigt. Liegt eine solche Zahlung nicht an einem Zinszeitpunkt, so wird sie gemäß (113) in zwei Teile ***aufgespaltet***, und diese werden auf die beiden Nachbar-Zinszeitpunkte gelegt. Die Folge der Zahlungssalden an den Zinszeitpunkten ist der Zahlungsstrom.

Negative Salden heißen ***Aus-***, positive heißen ***Rückzahlungen***. Es werden eigentlich nur Zahlungsströme betrachtet, die mindestens eine Aus- und eine Rückzahlung haben und in denen sämtliche Aus- ***vor*** sämtlichen Rückzahlungen liegen (Darlehen).

Gleichung (84) zwischen den Endwerten der Einträge des Zahlungsstroms liefert dann eindeutig den ***effektiven Zinssatz*** als reelle Lösung >-1, dessen Vorzeichen dasselbe wie das der Nettosumme (103) des Zahlungsstroms ist. Dies ist genau der effektive Zinssatz der PAngV.

Auf dem Raum aller Darlehen mit ***ganzjähriger*** Laufzeit ist der effektive Zinssatz ***isoton*** (106) ('höhere' Darlehen haben einen höheren effektiven Zinssatz) und ***stetig*** (105). Dies macht ihn neben anderen zu ***einem*** brauchbaren finanzwirtschaftlichen Bewertungs-Instrument für solche Geldgeschäfte.

Auf dem Raum ***aller*** Darlehen ist die ***Isotonie verletzt*** (s. (138)). Dieser Makel mindert die ***praktische*** Brauchbarkeit des effektiven Zinssatzes jedoch nicht. Theoretisch (der sog. Sparkassen-Konvention (23) widersprechend) könnte dieser Makel aufgefangen werden durch das Prinzip, nicht-ganzjährige Laufzeiten auf ganzjährige ***aufzurunden*** (123).

Bei sehr hohen tatsächlichen Rückzahlungen ***vor*** dem Zinszeitpunkt 1 kann es passieren, daß der Jahressaldo zum Zeitpunkt 0 positiv ist und damit Gleichung (84) keine Lösung >-1 hat (die ***Endlichkeits-Bedingung*** (122) ist verletzt, und es liegt eigentlich kein Darlehen im obigen Sinn vor). Hier wird der effektive Zinssatz aus Gründen der Isotonie ∞ gesetzt.

Literatur

Bardy, Peter (1984), Katharina **Baulig**, D. **Lübbert**, Gerhard **Preiß** und E. **Wenzelburger-Solache Orozco**: Sachrechnen für Lehrer an Berufsschulen. BS3: Zinsrechnen. Tübingen: DIFF

Becker, Gerhard (1982): Zu der Verordnung über die Berechnung der Effektiv-Verzinsung mit Wirkung vom 1.1.1981. In: mathematica didactica 5, 43-49

Bender, Peter (1987a): Effektiver Zinssatz, Preisangabenverordnung, Anspardarlehen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 87-90

Bender, Peter (1987b): Wie wirtschaftlich ist Bausparen? In: mathematiklehren 22, 36-40

Bender, Peter (1988): Die Begrifflichkeit des Bezugsfachs in der angewandten Mathematik und ihrer Didaktik - diskutiert am Beispiel des internen Zinssatzes von Investitionen. In: Journal für Mathematikdidaktik 9, 205-224

Bender, Peter (1989): The Internal Rate of Return of an Investment. In: Werner Blum, John Berry, Rolf Biehler, Ian Huntley, Gabriele Kaiser-Meßmer, Lothar Profke (Hrsg.): Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood, 195-200

Bender, Peter (in Arbeit): Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und zur Interpretation bei Mehrdeutigkeit. Manuskript

Dübbern, Klaus (1985): Verbraucherschutz auf Kosten der Anbieter. In: Die Bank 1985, 352-354

Hestermeyer, Wilhelm (1985): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten. In: Praxis der Mathematik 27, 129-145, 237-249

Hestermeyer, Wilhelm (1987): Wer mit Schulden leben will, muß rechnen können. In: mathematiklehren 20, 44-47

Hestermeyer, Wilhelm (1988): Effektiver Zinssatz und anwendungsorientierter Unterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik 9, 225-230

Jahnke, Thomas (1987): Überraschungen bei der Berechnung des "Effektiven Zinssatzes". In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 191-204

Jahnke, Thomas (1988): Noch einmal: Der effektive Zinssatz. In: Journal für Mathematikdidaktik 9, 239-246

Kirsch, Arnold (1982 & 1983): Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten. In: Praxis der Mathematik 24, 65-71, 164-172 & 25, 73-77

Kirsch, Arnold (1987): Bemerkungen zur "Berechnung" des effektiven Zinssatzes - eine Ergänzung zu der Arbeit von Thomas Jahnke. In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 321-330

Kluge, Götz (1986): Effektivzinsen ohne Nebel. In: c't 1986, Heft 12, 98-104

Kosiol, Erich (1950/1973): Finanzmathematik. Wiesbaden: Gabler 1950, 10. Aufl. 1973

Der **langfristige Kredit 36** (1985): Stellungnahmen und Anmerkungen zum "effektiven Jahreszins". 734-737

Nick, Klaus (1981): Ratentilgung und deren Kosten, ein Unterrichtsvorhaben. In: mathematica didactica 4, 59-63

Schröder, Max (1987): Effektiver Jahreszins - Sachrechnen in der SI. In: Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner 1987, 249-256

Stiller, Andreas (1987): Noch weniger Nebel. In: c't 1987, Heft 3, 192-195

Weidig, Ingo (1986): Zur Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes bei Ratenkrediten. In: Praxis der Mathematik 28, 419-422

Weidig, Ingo (1988): Effektivzins und Wirklichkeit. In: Journal für Mathematikdidaktik 9, 231-237

Wille, Friedrich (1985): Über den Einfluß der Geldentwertung auf Hypotheken. In: Mathematische Semesterberichte 32, 233-254

Ziegenbalg, Jochen (1988): Algorithmen als Hilfsmittel zur Elementarisierung mathematischer Lösungsverfahren und Begriffsbildungen. In: Klaus-Dieter Graf (Hrsg.): Computer in der Schule 2. Stuttgart: Teubner 1988, 149-174