ständnissen angereichert werden soll. Allerdings ist hier schon die Annahme eines "Anreicherns" im Ansatz verfehlt. Ich meine vielmehr, daß der Analysis-Unterricht auf solche GVV aufgebaut und bis zum Schluß von ihnen durchdrungen sein muß. In allen Abschnitten des Curriculums ist Sinnhaftigkeit und Anschaulichkeit (natürlich ohne Verfälschung, was immer eingehalten werden kann) einem instrumentellen Absichten verpflichteten, kalkül-orientierten oder symbol-manipulierenden Vorgehen vorzuziehen.

Darauf haben nicht nur Grundkurs-Schüler ein Recht ([Ki], [B&K], [T,K&W], [B&T] u.v.a.). Auch die Leistungskurse sind keine Domäne von Wächtern über abstrakte und formale Mathematik. Der Universitäts-Mathematiker ist nämlich dankbar für Studenten mit gut ausgebildeten GVV; und wenn paradoxerweise in Fächern, in denen Mathematik 'nur' angewandt wird, auf solche GVV oft weniger Wert gelegt wird, dann ist das eine Konsequenz daraus, daß sie bei 'den' Studenten nicht vorausgesetzt werden können. Und dies ist keine Rechtfertigung für die Abwesenheit im Schul-Unterricht.

Um den zeitkostenden Aufbau inhaltlicher GVV zu ermöglichen, müßte einiges vom traditionellen Stoff geopfert werden, mehr noch: der Analysis-Unterricht in fast allen Grundkursen und in vielen Leistungskursen müßte stark verändert werden: Es müßte Schluß gemacht werden mit der stillen Übereinkunft zwischen vielen Lehrern und ihren Schülern, daß kein Verständnis der Begriffe erwartet wird, sondern lediglich äußerliches Bewältigen eines Kalküls.

Literatur

Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. Erscheint in: Helmut Postel, Arnold Kirsch & Werner Blum (Hrsg.): Mathematik Lehren und Lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel

Blum, Werner & Arnold Kirsch (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 25, Heft 3, 6-24

Blum, Werner & Günter Törner (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

Breuker, Ulrich (1991): "Was heißt denn hier anschaulich? Ich kann den Grund für den erstaunlichen Zusammenhang zwischen Fläche und Ableitung in dem

Beweis doch überhaupt nicht sehen!" Erscheint in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 44

Danckwerts, Rainer & Dankwart Vogel (1986): Was ist das Integral? In: Der Mathematikunterricht 32, Heft 2, 59-72

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2. Stuttgart: Klett

Griesel, Heinz (1970): Analysis II. Heft O 5. Hannover: Schroedel & Paderborn: Schöningh

Jahnke, Thomas (1990): Die Hauptsatzspange. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1990. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Kirsch, Arnold (1976): Eine "intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. In: Didaktik der Mathematik 4, 97-105

Knoche, Norbert & Heinrich Wippermann (1986): Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis. Mannheim: Bibliographisches Institut

Tietze, Uwe, Manfred Klika & Hans Wolpers (1982): Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg

dere Rolle beim Zusammenspiel von 'F'- und S-Aspekt einräumt, spricht das obige Argument immer noch für eine Einführung des Integral-Begriffs erst nach dem Satz. Dabei handelt es sich nicht bloß um eine Verzögerung bei der Verwendung des Worts 'Integral', sondern um die Ausbildung eines wirklich anderen Begriffs.

3.11 Zum Hauptsatz und seinen Äquivalenten

Bei einer sinnhaft-anschaulichen Einführung in die Integralrechnung stellt der Hauptsatz (bzw. seine Äquivalente) keinen besonderen Erkenntnisgewinn dar (ähnlich [Ki:98f]), und er kann 'den' Schülern nicht als der fundamentale Satz vermittelt werden, als der er in der didaktischen Literatur diskutiert wird; denn er lautet (wobei wie immer die Existenz der kumulierten Funktion vorausgesetzt ist):

Zu einer Funktion f ist die kumulierte Funktion F dieselbe,

- **ob man die Kumulierung als Neukonstruktion auffaßt mit Anfangsstelle r von F (mit r als Nullstelle von f) oder**
- **ob man die Kumulierung als Rekonstruktion auffaßt mit r als Nullstelle von f (mit Anfangsstelle r von F).**

Mehr sagt der Hauptsatz nicht, auch wenn er mit den üblichen Bezeichnungen ausgesprochen wird. Seine Rolle könnte die einer *prägnanten Fassung* und Unterstreichung des erarbeiteten Sachverhalts sein. Dieser sollte eine schlichte Form gegeben werden, ähnlich der hier vorgelegten, wie gesagt, auch wenn sie mit anderen Bezeichnungen erfolgt. Getrennt davon könnten dann weitere Aussagen, Folgerungen, Anwendungen formuliert werden, etwa: "... und das bedeutet $(A_r(f))' = f$ und $A_r(F') = F$." oder: "Zur Ermittlung des Flächeninhalts zwischen r und s nimmt man irgendeine Stammfunktion F und berechnet $F(s)-F(r)$." usw.

Entsprechend verlieren Beweise i.e.S. ihre Bedeutung. Wenn, wie in der Studie von Breuker (1991), "der Grund für den erstaunlichen Zusammenhang zwischen Fläche und Ableitung" bzw. "... Tangente" einsichtig gemacht wird, so ist der ontologische Status dieser Aktivität traditionell wohl der eines Beweises. Demgegenüber handelt es sich bei meinem Ansatz dabei eher um ein Durcharbeiten, bei dem gefragt wird: "Wie sind die Objekte, Aussagen und Schlüsse des Hauptsatzes

(der Wesensgleichheit zwischen 'F'- und S-Aspekt) bei dieser oder jener Verkörperung zu interpretieren?"

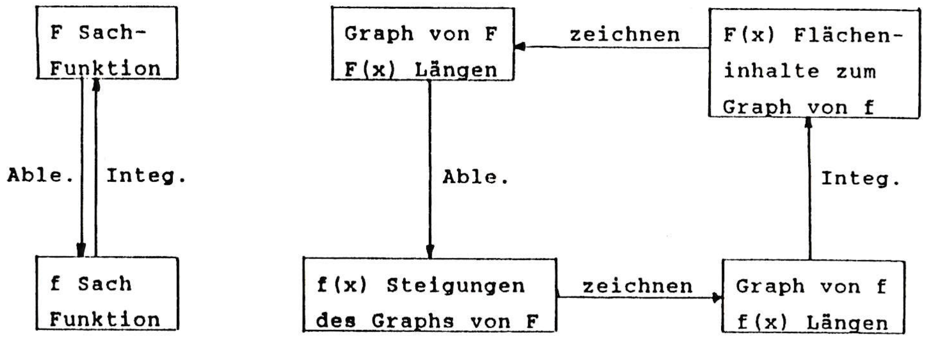
4. Einige grundsätzliche Bemerkungen zur didaktischen Theorie und Praxis

Ob einer der in der Literatur geläufigen "Zugänge" oder mein Vorschlag "statistisch signifikant" bessere Erfolge zeitigt, wird sich nicht feststellen lassen. Schon wegen des erforderlichen Aufwands ist eine gründliche empirische Untersuchung mit einer dermaßen speziellen Fragestellung kaum zu rechtfertigen. Selbst wenn man eindeutig festlegen könnte, was "bessere Erfolge" sind, würde man den angestrebten Vergleich nicht erhalten. Da üben so viele dominante Variablen (Lehrer-, Schülerperson, Unterrichtsmethode u.v.a.m.) ihren Einfluß aus, die kaum kontrolliert werden können, daß sich die subtilen Unterschiede der Zugänge letztlich nicht in einem greifbaren Unterrichtsergebnis niederschlagen können (insbesondere, wenn sie wirklich alle ordentlich durchgeführt werden). Dies ist übrigens das Schicksal der meisten statistischen Untersuchungen zu konkurrierenden vergleichbaren didaktischen Ansätzen.

Nach wie vor ist die *didaktisch orientierte Sachanalyse*, verbunden mit informellen Unterrichts-Erfahrungen, ein unersetzliches Instrument zur Auswahl von Unterrichts-Inhalten (in sehr weitem Sinn). Als deren empirische Absicherung kommt m.E. vor allem die Methode der Fallstudie in Frage.

Darüber hinaus ergäben sich wichtige Fragestellungen für den Analysis-Unterricht weit im Vorfeld der hier vorgelegten Analyse, nämlich: Würde eine Betonung inhaltlicher Vorstellungen das Lernen wirklich erleichtern (wenn man einmal einen Lernziel-Katalog in Anlehnung an [B&T:196ff] unterstellt)? So ganz zweifelsfrei läßt sich dies nicht bejahen: Denn was mir als mathematisch souveränem Didaktiker oder Lehrer mit einigem eigenen Aufwand einen echten Erkenntnisgewinn bringt, muß bei Schülern unter üblichen Voraussetzungen noch lange nicht anschlagen.

Der Praktiker wird darüber hinaus Zeitmangel dagegen einwenden, daß der Analysis-Unterricht mit inhaltlichen Vorstellungen und Vermation in Graphen (= Zeichnen): Hat man Steigungen, so werden diese durch Hinzeichnen zu Längen (Ordinaten). Diese werden durch Integrieren in Flächeninhalte überführt, und diese durch Zeichnen wieder in Längen (als Funktion des Ortes wie alle diese Größen). Die Ableitung dieser Funktion ist gerade wieder die Steigungsfunktion, von der man ausgegangen ist.



An den vier Kästchen der Schleife kann man auch schön den Unterschied zwischen dem Neu- und dem Rekonstruktions-Aspekt aufzeigen. Läßt man einmal das Zeichnen ganz außer Betracht, dann stellen die beiden linken Kästchen den Rekonstruktions- (S-) Aspekt und die beiden rechten den Neukonstruktions- ('F'-) Aspekt dar (vorausgesetzt: zu ein- und demselben Sachverhalt). Die Spezialisierung auf die Geometrie kann man noch beseitigen, indem man 'Steigungen' durch 'lokale Änderungsraten', 'Längen' durch 'primäre Größen' und 'Flächeninhalte' durch 'kumulierte Größen' (o.ä.) ersetzt.

Traditionell werden die meisten Regeln und sog. *zentralen Sätze* der Schul-Analysis (s. [B&T:146ff]) als Teil der Differentialrechnung behandelt. D.h. sie werden von vorneherein als Aussagen über Größen und deren lokale Änderungsraten interpretiert und mit Ordinaten(längen) und Tangenten(steigungen) mit z.T. mäßigem Erfolg veranschaulicht.

Nimmt man nun die zweite Interpretationsmöglichkeit hinzu, d.h. versteht die Aussagen als solche über Größen und deren kumulierte Größen und veranschaulicht sie mit Ordinaten(längen) und Flächen(inhalten), dann gewinnt man überraschende, zumindest ungewohnte Einsichten (s. Jahnke 1990). Diese ergeben sich sowohl aus der neuen Sichtweise allein, als auch aus der Zusammenschau beider.

Wohlgemerkt: Der beschriebene Perspektivenwechsel eröffnet sich zwar erst mit der Integralrechnung, aber er stellt nicht etwa einen Übertritt von der Differentialrechnung zu dieser dar, sondern die Ergänzung der Größen/Änderungsraten-Interpretation durch die Größen/Kumulationsgrößen-Interpretation. Die Erweiterung, die mit der Integralrechnung stattfindet, liegt woanders, und zwar darin, daß gewisse Aussagen nun als ihr zugehörig erkannt werden bzw. überhaupt erst in den Blick kommen, nämlich im Zusammenhang mit der Umkehrung des Differentiations-Operators.

3.10 Resümee

In den meisten der analysierten Merkmale stimmen 'F'- und S-Aspekt weitgehend überein. Eine deutliche Unterscheidung hat sich lediglich in 3.9 beim Merkmal 'Neu-/Rekonstruktion' ergeben. Als in engem Zusammenhang damit stehend erweist sich nun die Bemerkung in 3.1, daß Existenz und Eindeutigkeit von Flächeninhalten ('F'-Aspekt) zwingender erscheinen als von Pfaden durch das Richtungsfeld (S-Aspekt). Natürlich hat auch das faktische Curriculum mit der vorherigen ausgiebigen Behandlung der Differentialrechnung unterschiedliche Auswirkungen auf die Ausbildung der GVV bei den Schülern, je nach dem welchen Aspekt man zugrundelegt. Diese Einflußgröße, und erst recht die sonstigen identifizierten Unterschiede beruhen aber überwiegend auf exogenen Konventionen.

Dies stellt die beiden "Zugänge" ernsthaft in Frage, da bei ihnen der Integral-Begriff mit einem der beiden Aspekte und damit mit Ausprägungen der diskutierten Merkmale identifiziert wird, die ihm nicht zukommen und die bei Einbringung des anderen Aspekts eventuell nicht gründlich genug revidiert werden.

Daß 'F'- und S-Aspekt zunächst sehr verschieden wirken, steht außer Zweifel. Ihre weitgehende Wesensgleichheit ist mit anschaulichen Aktivitäten mit Graphen, Herauspräparieren der Idee der Kumulation und Verkörperungen der Begriffe in vielen Sachbereichen zu erarbeiten. Der so entstehende Begriff ist dann das Integral.

Auch wenn man die Wesensgleichheit weniger ausgeprägt einschätzt und daher dem Hauptsatz (bzw. seinen Äquivalenten) eine bedeuten-bezogen auf Funktionsgraphen, liefert dem Lernenden die unentbehrliche Anschauung, einfache Sinnhaftigkeit und in deren Gefolge leistungsfähige GVV. Zugleich besteht aber die Erfordernis, die Schüler nicht auf solche Interpretationen zu fixieren, sondern die Begriffe auch in anderen Sachbereichen zu verkörpern. Diese Verallgemeinerung ist zwar auch durch die Anwendungsorientierung des Mathematik-Unterrichts motiviert und steht in deren Diensten, vordringlich ist aber ihre Funktion, *die mathematische Begriffsbildung zu fördern* (vgl. Freudenthal 1973, [Ki:98] u.a.).

Die umfangreiche *Liste von solchen Verkörperungen* in [B&T:92], von der ich in Kap. 1 bei Formulierung meiner Thesen einen Auszug gebracht habe, halte ich für ein zentrales Kapitel der Analysis-Didaktik. Ein Ziel des Unterrichts sollte sein, die Schüler zu befähigen, in die verschiedensten Gegenstandsbereichen, sofern sie ihnen sachlich zugänglich sind, die Begriffe der Schul-Analysis einzubetten.

Bei diesen Aktivitäten löst sich die *Unterscheidung* zwischen 'F'- und S-Aspekt *in Nichts* auf; denn bei der Verkörperung der Kumulation muß man deren Spezialisierung auf den Flächeninhalt überwinden und auf ihre bereichs-unabhängige Bedeutung zurückgehen: Angabe der Gesamtänderung der (kumulierten) Größe bis zu einem bestimmten Ort, Zeitpunkt, einer Menge usw. - Und dies ist genau auch die Bedeutung 'der' Stammfunktion.

Daß diese Überwindung so schwer fällt bzw. nicht geleistet wird, ist mit Schuld der *Namensgebung*, die geeignet ist, den Aspekt durch Verengung zu *verfälschen*. Beim S-Aspekt hat man neben der geometrischen 'Steigung' schöne neutrale Namen wie 'Ableitung', 'Stammfunktion', 'lokale Änderungsrate', die verschiedene Verkörperungen geradezu herausfordern. Beim 'F'-Aspekt müßte man eine umständliche Wendung wie 'im weiteren Sinn' hinzufügen und trotzdem gewärtig sein, daß er immer noch zu eng verstanden wird.

Man bräuchte für den 'F'-Aspekt einen allgemeineren Namen wie 'Integral-Aspekt', 'Kumulierungs-Aspekt', 'Gesamteffekts-Aspekt' o.ä., aber: der Tenor der ganzen Arbeit ist ja, daß diese Namen mit demselben Recht dem S-Aspekt zugehören.

3.9 konstruieren vs. rekonstruieren

Ein Unterschied zwischen beiden Aspekten könnte in der Interpretation der Werte der Ausgangsfunktion liegen: Versteht man sie als Größen (i.w.S.) eines primär gegebenen Größenbereichs, oder versteht man sie als lokale Änderungsraten eines funktionalen Zusammenhangs mit Werten in einem anderen Größenbereich? Im ersten Verständnis würde Kumulieren zum 'F'-Aspekt gehören und die *Neukonstruktion* eines funktionalen Zusammenhangs bedeuten. Im zweiten würde es zum S-Aspekt gehören und die *Rekonstruktion* (s. [B&K:16]; auch von [D&V] hervorgehoben) eines solchen Zusammenhangs bedeuten.

Interessanterweise ist es gerade der so vertraute geometrische Bereich, bei dem es einem leicht unterlaufen kann, daß man diese beiden Interpretationen nicht sorgfältig genug auseinanderhält und dann auf Irritationen stößt wie: Wieso ist der Übergang zum *Flächeninhalt* die *Umkehr-Operation* zur Ableitung, mit der man doch zur *Steigung* übergeht? Das Irritierende daran ist, daß Ableiten bzw. Integrieren die (Größen-) Dimension nur um 1 vermindert bzw. erhöht, Flächeninhalt und Steigung sich aber um die Dimension 2 (Längeneinheiten) unterscheiden.

Bei jedem Gegenstandsbereich bedeutet das *Zeichnen* eines Funktionsgraphs eine *Transformation* der gegebenen Größen (i.w.S.) in Längen. Nimmt man das für eine Funktion und ihre Integralfunktion(en) zusammen vor, dann werden eben beide Typen von Größen in Längen transformiert, und deren Ersatz-Charakter ist i.a. klar.

Im Bereich der Geometrie jedoch kommt es vor, daß dieser Charakter verwischt wird, weil ja keine Transformation erforderlich ist, wenn die Werte der Ausgangs- oder die 'der' Integralfunktion selbst schon Längen sind. Die Folge ist, daß dann bei der Transformation anderer *geometrischer* Größen deren ursprünglicher Charakter (als Steigungen oder Flächeninhalte) außer Acht gerät.

An folgendem Diagramm kann man sich (und den Schülern) die Problematik verdeutlichen und auflösen. Links ist der Zusammenhang zwischen Funktion und Integralfunktion in einem beliebigen Sachbereich, ohne Transformation in Graphen, dargestellt; rechts, in der Schleife, der Zusammenhang im Bereich der Geometrie, mit Transforsuchen und im Falle des Erfolgs (den man wiederum mit dem Computer forcieren kann) diese dann doch wieder (compter-intern) numerisch zu bearbeiten.

Auch im Gefolge grundsätzlicher Rechtfertigungs-Überlegungen haben Fertigkeiten im Kalkül zugunsten der Ausbildung von geeigneten GVV an Bedeutung verloren. Wie weit sich dieser Paradigmen-Wechsel im faktischen Unterricht niedergeschlagen hat, sei dahingestellt, zumal bei Standardfunktionen die Beherrschung dieses Kalküls nach wie vor nötig ist.

Die Integralrechnung profitiert hierbei von der vorausgegangenen Differentialrechnung. Dies ist m.E. der Hauptgrund, wieso die Suche nach einem geschlossenen Term für 'die' Integralfunktion als an den S-Aspekt geknüpft gesehen wird. Beim 'F'-Aspekt ist diese Aktivität aber genauso relevant oder nicht. So wenig man in diesem Aspekt eine eigene Umkehr-Operation definiert (s. 3.5), so wenig braucht man einen eigenen Kalkül für geschlossene Integralfunktionen (obwohl man ihn aufgrund von 3.3 separat entwickeln könnte), dank der Fast-Identifizierung mit dem S-Aspekt.

Zugleich haben auch bei diesem wiederum die Werte der Integralfunktionen von vorneherein eine inhaltliche Bedeutung: Sie geben den jeweiligen Gesamteffekt der Werte der Ausgangsfunktion an, die als lokale Änderungsraten aufgefaßt sind.

3.7 bestimmtes vs. unbestimmtes Integral

Auch der unglückliche Begriff des "unbestimmten Integrals" gehört zu beiden Aspekten gleichermaßen. Beim S-Aspekt entsteht die Mehrdeutigkeit, indem man den Wert eines Konstanten-Summanden offen läßt, beim 'F'-Aspekt, indem man offen läßt, an welcher Stelle angefangen wird. Daß diese beiden Arten von Mehrdeutigkeit (fast) äquivalent sind, ist auf dem Weg zur Fast-Identifizierung der beiden Aspekte eine wichtige Einsicht. Zu dieser gehört die Erkenntnis, daß es Stammfunktionen ohne Nullstellen gibt, aber jede Flächeninhaltsfunktion an ihrer Anfangsstelle den Wert 0 hat (zur Begründung s. 3.9).

Die Rede vom unbestimmten Integral gehört m.E. nicht in die Schule (ähnlich Griesel 1970). Der Integral-Operator sollte eindeutig definiert

werden, d.h. die unvermeidliche Abhängigkeit von einem Parameter ist zu berücksichtigen, und das einfache, aber Irrtümer suggerierende Symbol '$\int$' müßte aufgegeben werden. Es entfiele der Begriff des bestimmten Integrals; und es bräuchten nur noch die Integralfunktionen und das Integral als Zahl (im Zuge funktionalen Denkens: als Differenz der Werte einer Integralfunktion an zwei bestimmten Stellen) unterschieden werden. Schreibweisen (mit der Variablen x und der Stelle s):

$$F(x) = \int_r^x f \quad (= \int_r^x f(t)dt = \int_r^x f(x)dx \text{ o.ä.}),$$
$$F = \int_r f \quad (= \int_r f(t)dt \text{ usw.}),$$
$$F(s) = \int_r^s f \quad (= \int_r^s f(t)dt \text{ usw.}).$$

Wohlgemerkt, diese Schreibweisen schließen den S-Aspekt ein. Dort bezeichnet r eine Nullstelle der in Frage stehenden Stammfunktion. Allerdings entsteht hier eine systematische Lücke durch die Stammfunktionen ohne Nullstellen, die wohl nur mit einer umständlichen Symbolik geschlossen werden kann.

Wer nach der Schule in Studium und Beruf mit der konventionellen Bezeichnungs-Vielfalt in der Integralrechnung konfrontiert wird, kann sich dann, früh genug, damit auseinandersetzen. Die Schule bereitet ihn mit einer sparsamen, aber klaren Begrifflichkeit besser darauf vor als mit einer enzyklopädischen Darbietung von vielen Bezeichnungsweisen. In diesem Zusammenhang ist auch die Verwendung einer Bezeichnung wie "Stammfunktionsintegral" bei der Einführung abzulehnen. Sie ist bei beiden "Zugängen" (und bei meinem Vorschlag sowieso) nicht nur überflüssig, da das Integral auf eine und nur eine Art eingeführt wird, sondern sogar schädlich, indem sie Unterschiede betont, die mit dem Hauptsatz bzw. seinen Äquivalenten abgebaut werden sollen und höchstens wieder bei Vertiefungen mit allgemeineren Funktionen für 'Spezialisten' eine Rolle spielen.

3.8 geometrische Interpretation vs. Verkörperungen in vielen Sachbereichen

Die Interpretation der Begriffe der Schul-Analysis als geometrische Größen, nämlich hauptsächlich Steigung, Länge und Flächeninhalt das Produkt aus dem Quotient von vorher und Δx, danach die Summe). Der Grenzübergang liefert dann verallgemeinerte Differenzenquotienten, nämlich Differentialquotienten, denen verallgemeinerte Produktsummen entsprechen (s. [B&T:159ff]).

3.4 global vs. lokal

Es fragt sich, wo der globale Charakter der Produktsummen herkommt, wo doch der der Differenzenquotienten lokal ist. Tatsächlich ist auch das Bilden von Produktsummen zunächst eine lokale Angelegenheit: Zum Wert F(x) wird $f(x) \cdot \Delta x$ addiert, um ungefähr $F(x+\Delta x)$ zu erhalten. Erst die Kumulierung der Produkte von der Anfangsstelle aus bis x ruft den globalen Charakter hervor. Entsprechend könnte man auch das Bilden der Differenzen von der Anfangsstelle r aus bis x global verstehen, wenn man von Stützstelle zu Stützstelle weitergeht: An jeder (Stütz-) Stelle x ergeben die kumulierten Differenzen gerade den Wert F(x)-F(r). Mit dem Dividieren durch Δx werden die Differenzenquotienten dann jedoch zu einem lokalen Begriff (vgl. [Ki]).

(Diese Überlegungen kann man bei folgendem einfacheren Beispiel verdeutlichen: dem Zusammenhang zwischen Folgen und Reihen. Von einer Folge (a_n) kommt man zu ihrer Reihe (s_n) durch Partialsummenbildung: $s_n = a_o + a_1 + \ldots + a_n$; und jede Folge (a_n) kann man als Reihe ihrer Differenzenfolge (d_n) mit $d_n = a_n - a_{n-1}$ (n>0) und $d_o = a_o$ auffassen. Die Summenbildung stellt man sich also global vor, jeweils beginnend bei a_o; die Differenzenbildung dagegen sieht man lokal; es werden dabei immer nur zwei Nachbarn herangezogen. Natürlich könnte man auch die Summierung als lokale Operation, nämlich rekursiv: $s_n = s_{n-1} + a_n$ (n>0) und $s_o = a_o$; und die Differenzenbildung als globale Operation verstehen: $d_n = a_n - d_{n-1} - d_{n-2} - \ldots - d_o$; aber diese Verständnisse sind sekundär, und bei ihnen werden die Folgen selbstbezüglich definiert.)

Flächeninhalts- und Stammfunktionen haben gleichermaßen *globalen* Charakter, weil für jede Stelle x der Funktionswert den Gesamteffekt der Kumulierung ab der Anfangsstelle angibt. Der *lokale* Charakter kommt den Werten der Ausgangsfunktion zu.

3.5 Definition von Umkehr-Operatoren

Eine Unsymmetrie zwischen 'F'- und S-Aspekt besteht darin, daß nur bei letzterem eine Umkehr-Operation geläufig ist. Selbstredend könnte man auch zum Flächeninhalts-Integral den Umkehr-Operator betrachten (s.o.: A_r^{-1}). Wenn man aber nicht gerade Absichten wie in Kap. 2 verfolgt, besteht eigentlich kein Anlaß, diesen eigens zu definieren. Aus systematischen Gründen sollte er durchaus erwähnt werden. Sobald Satz A in irgendeiner Variante eingesehen ist, etwa mittels des Kumulierens als gemeinsamem Wesenszug, hat man dann auch für die Flächeninhaltsfunktionen den Differentiations-Operator zur Verfügung, der beim üblichen Curriculum ja begrifflich bereits voll ausgebaut ist.

3.6 praktisch vs. theoretisch, Einzelwerte vs. Funktion

Dem 'F'-Aspekt wird gerne ein gewisser Anwendungsbezug zugesprochen, während der S-Aspekt eher in Verbindung mit theoretischem Interesse gesehen wird; bei ersterem geht es um praktische Berechnungsprobleme, bei letzterem mehr um mathematisch-systematische Fragen.

In der Tat wird der Flächeninhalt häufig nicht sofort (und in manchen Lehrgängen nie) funktional betrachtet; aber die in 3.1 beschriebene Metapher und zahlreiche Vorschläge in der Literatur (z.B. [Ki]) weisen einen elementaren Weg zur *Funktions*-Auffassung. Daß diese erstrebenswert ist, steht außer Frage: Sie liefert hier ein weiteres Beispiel für die universelle mathematische Idee der Funktion; sie trägt erheblich zur Anwendbarkeit der Integralrechnung bei, indem sie viele Berechnungsprobleme überhaupt einer, zumindest einer ökonomischen Lösung zuführt; und sie erschließt die Fertigkeiten der Schüler im Differential- (Stammfunktions-) Kalkül für Flächen-Probleme (i.w.S.; s. 3.8).

Es ist inzwischen nicht mehr ganz so wichtig, zu vorgelegten Funktionen 'die' Integralfunktion in *geschlossener* Form angeben zu können. In vielen anwendungs-relevanten Fällen existiert diese bekanntlich gar nicht. Aber es gibt leistungsfähige numerische Verfahren zur Auswertung bestimmter Integrale; und in Anbetracht der bequemen Verfügbarkeit von Computern heutzutage erweist es sich (häufig) als ökonomischer, diese Verfahren einzusetzen, als geschlossene Lösungen zu rechnung der ‘F’-Aspekt, zumindest gemäß der herrschenden didaktischen Meinung, intensiver behandelt wird: Er ist, im Rahmen des Analysis-Unterrichts, das Neue; und es gilt, ein Gegengewicht zu schaffen gegen die Neigung zu formalerem Vorgehen, wie es ja doch i.a. mit dem S-Aspekt verbunden wird.

Eine natürliche Reihenfolge bietet sich m.E. nicht an: Tatsächlich gehört der S-Aspekt zunächst einmal in die Differentialrechnung; z.B. die sog. partielle Integration ist Teil dieses Operator-Kalküls. Es mag sein, daß Schulbücher diese Einordnung nicht so vornehmen und damit auf eine abgerundete Durcharbeitung des Differentiations-Begriffs verzichten.

Zwar liegt der Begriff des Flächeninhalts genetisch noch viel früher; aber bei seiner Verwendung in der Integralrechnung erfährt er eine erhebliche Ausweitung, während der S-Aspekt frisch und unverändert aus der Differentialrechnung übernommen und ihm deswegen der zeitliche Primat nicht von vorneherein streitig gemacht werden kann.

3.3 Kumulieren, verallgemeinerte Produktsummen, Gesamteffekt

Ob man sich mit der naiven Überzeugung von der Existenz einer Flächeninhaltsfunktion zufrieden gibt oder diese Überzeugung in Richtung ‘Riemannsches Integral’ tiefer legen und erst noch ohne Stammfunktionen rechnen können will: Den *Flächeninhalt* unter dem Graph *ermitteln ist Kumulieren*. Bei endlicher Betrachtung liefern die Werte der gegebenen (stetigen) Funktion f multipliziert mit einer kleinen Schrittweite (natürlich nur ungefähr) die absoluten Änderungen ‘der’ (d.h. unabhängig von der Anfangsstelle r) Flächeninhaltsfunktion F beim Durchlaufen dieser Schrittweite:

$F(x_2)-F(x_1) \approx f(x) \cdot (x_2-x_1)$ für $x_1<x<x_2$. Die Werte von f selbst liefern die relativen Änderungen (sprich: mittlere Änderungsraten) von F, nämlich: $(F(x_2)-F(x_1))/(x_2-x_1) \approx f(x)$. Die *Flächeninhaltsfunktion* zur Anfangsstelle r (also $F=A_r(f)$) gibt schließlich für jedes x den *Gesamteffekt der Kumulierung* von r bis x an.

Bei infinitesimaler Betrachtung ergibt sich die Aussage: **Die Werte der stetigen Funktion f sind die lokalen Änderungsraten sämtlicher (d.h. mit beliebiger Anfangsstelle r) zugehörigen Flächeninhalts-**

funktionen F. (Wobei diese definitionsgemäß für jede Stelle x den Gesamteffekt bei der Kumulierung der Werte von f von der Anfangsstelle r bis dahin angibt.)

Dieser Zusammenhang steckt von vorneherein (also ohne Heranziehung des S-Aspekts) im ‘F’-Aspekt und sollte mit diesem von Anfang an inhaltlich ausgefüllt und expliziert werden (vgl. [Ki] und [B&K]).

Auch die Stammfunktionen entstehen durch Kumulieren: Bei endlicher Betrachtung tut man so, als seien die Werte der Funktion f, also die lokalen Änderungsraten der gesuchten Stammfunktionen, innerhalb einer kleinen Schrittweite ungefähr konstant. Dabei entsteht bei jeder Stammfunktion an jeder Stelle x beim Durchlaufen der Schrittweite eine Änderung um ungefähr f(x) multipliziert mit dieser Schrittweite, also: $F(x_2) - F(x_1) \approx f(x) \cdot (x_2-x_1)$ für $x_1 < x<x_2$; und eine mittlere Änderungsrate von ungefähr f(x) selbst: $(F(x_2) - F(x_1)) / (x_2-x_1) \approx f(x)$. Man hat dann wie bei den Flächeninhaltsfunktionen: Jede *Stammfunktion* gibt für jedes x den *Gesamteffekt der Kumulierung* von der Anfangsstelle r bis x an.

Faktisch bin ich hier auf eine naive Weise mit Differentialen umgegangen und habe dies immer durch das Beiwort ‘ungefähr’ angedeutet. Die Physiker haben mit dieser Vorgehensweise viel Erfolg; auch die Numeriker arbeiten mit diesem ‘ungefähr’, allerdings mit genauen Abschätzungen, und zwar oft mit analytischen Mitteln. Im Unterricht sollen solche Überlegungen aber nicht die analytische Begriffsbildung ersetzen, sondern sie nur durch den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen unterstützen.

Jedenfalls ergibt sich bei infinitesimaler Betrachtung beim S-Aspekt (analog zum ‘F’-Aspekt) dann die Aussage: **Kumuliert man die Werte der stetigen Funktion f ab einer Stelle r, dann ergibt sich für jede Stelle x der Wert derjenigen Stammfunktion F, für die r Nullstelle ist.** (Wobei definitionsgemäß deren lokale Änderungsraten die Werte von f sind.)

Der inhaltliche Zusammenhang zwischen Ableiten einerseits und Übergang zu Flächeninhalts- bzw. Stammfunktionen andererseits wird noch sinnfälliger durch die Bemerkung, daß das Bilden von *Differenzenquotienten* (zuerst die Differenz, danach Quotient aus ihr und Δx) genau umgekehrt wird durch das Bilden von *Produktsummen* (zuerst

3.1 anschaulich-elementar vs. formal-analytisch

Mit seiner richtungsweisenden Arbeit (1976) [Ki] hat Kirsch die Didaktik der Integralrechnung nachhaltig beeinflußt, insbesondere auch den vorliegenden Aufsatz. Ein grundlegender Gedanke in [Ki] ist der "unreflektierte" Einsatz des Flächeninhalts-Begriffs bei beschränkten Punktmengen im $\mathbb{R}^2$ mit stückweise stetigem Rand zum Aufbau des Integral-Begriffs.

Auf diesen Ideen basiert z.B. folgende Metapher, mit der die funktionale Auffassung vom Flächeninhalt forciert wird und Probleme mit dem Auftreten negativer Werte entschärft werden:

Die erste Achse ist eine befestigte Straße. Oberhalb von ihr befindet sich ein gleichmäßig nasser Sumpf, der durch die Straße und den Graph der zu integrierenden Funktion begrenzt ist. Auf der Straße fährt ein Entwässerungs-Fahrzeug ab einer bestimmten Stelle nach rechts. Es hat über dem Sumpf senkrecht zur Fahrtrichtung einen hinreichend langen Arm ausgefahren, mit dem es über einen (im Prinzip uninteressanten Mechanismus) den Sumpf *entwässert*. Es führt einen Behälter mit sich, in dem das Wasser gesammelt wird. An jeder Stelle des Wegs ist die Höhe des Wasserspiegels im Behälter ein (Längen-) Maß für die bis dahin überstrichene Fläche.

Kommt man nun an Stellen, wo die Funktion negativ ist, dann muß die Metapher erweitert werden: Unterhalb der ersten Achse liegt Wüste, ebenfalls durch die Straße und den Funktionsgraph begrenzt; und diese wird mit Hilfe eines zweiten Arms senkrecht zur Fahrtrichtung, jetzt über der Wüste, *bewässert*. Nach wie vor ist die Höhe des Wasserstands im Behälter an jeder Stelle ein Maß für die überstrichene Fläche. (Zur Weiterführung s. Bender 1991.)

Wenn man im Kontrast zu einem solchen anschaulichen Einsatz des 'F'-Aspekts des S-Aspekt als ausgesprochen formal einschätzt, so übersieht man, daß *Stammfunktionen ebenfalls* ganz *anschaulich* gewonnen werden können: Man interpretiere die Ordinaten einer gegebenen Funktion als Steigungen, zeichne das Richtungsfeld und folge von einem bestimmten Punkt aus dem Pfad durch das Feld (vgl. Blum & Kirsch 1979 [B&K]).

Existenz und Eindeutigkeit der so konstruierten Stammfunktion erscheinen allerdings weniger zwingend als bei der Flächeninhaltsfunktion (s. [B&K:17]), obwohl man beidesmal beim graphischen Vorgehen an jeder Stelle dasselbe Problem hat, nämlich in welcher Richtung man weitergehen muß: denn außer bei konstanten Funktionen ändert sich ja die einzuschlagende Richtung sofort mit dem Verlassen der Stelle. Der Grund für diese geringere Plausibilität liegt darin, daß Steigungen (lokale Änderungsraten) und damit ihr Gesamteffekt weniger konkret sind als Strecken, die durch kontinuierliche Veränderung eine Fläche erzeugen.

Hier gibt es aber ebenfalls erfolgversprechende *Metaphern*: Zwei Fahrzeuge, die im Koordinatensystem an derselben Stelle in derselben Richtung losfahren und deren Lenkradeinschläge sich für keine Stelle des Definitionsbereichs voneinander unterscheiden, durchfahren genau denselben Graph. Dahinter steht letztlich der Satz über konstante Funktionen (ist die Ableitung in einem Intervall konstant 0, dann ist die Funktion dort konstant), an dessen Plausibiltät wiederum niemand zweifelt.

Solche anschaulichen Überlegungen zu Stammfunktionen müßten sich auf eine entsprechende Basis in der Differentialrechnung stützen können. Wenn bei Beginn der Integralrechnung der Stammfunktions-Kalkül üblicherweise doch unanschaulich wirkt, so liegt dies nicht in dessen Wesen begründet, sondern in einem didaktischen Versäumnis während der Differentialrechnung.

Umgekehrt kann der 'F'-Aspekt bekanntlich beliebig weit formalisiert und präzisiert werden, z.B. mit dem Riemannschen Integral-Begriff. Er ist in seinem Wesen nicht weniger formal als der S-Aspekt. Wenn es häufig zu dieser Formalisierung nicht kommt, so sind dafür u.a. curriculare Gründe maßgebend: da die Integralrechnung nach der Differentialrechnung behandelt wird, fehlt die Zeit; und: man ist ja in dieser schon einmal ausgiebig formal-analytisch vorgegangen, und auf eine Wiederholung kann, im Sinne exemplarischen Lernens, leichter verzichtet werden.

3.2 Zwingende Reihenfolge? Zwingendes Schwergewicht bei der Behandlung?

Es ist klar, warum (neben historischen Gründen) *innerhalb* der Integral-

2.2 Wechsel des innermathematischen ontologischen Status als Erkenntnisproblem

In den drei Varianten von Version A ist Teil (i) jedesmal eine simple Konsequenz aus Teil (ii) und umgekehrt; in den Versionen B und C ist der Satz jedesmal eine simple Konsequenz aus der Definition. Mit [B&T] sei aber unterstrichen, daß die Explizierung solcher einfacher Folgerungen ihren Platz im Unterricht hat: nicht als "großartige" Erkenntnis, sondern als operatives Durcharbeiten (ein didaktisches Prinzip, das in der Oberstufe nicht weniger angebracht ist als in der Primarstufe, wo es jedoch geläufiger ist).

Während Version C schon wegen ihrer mathematischen Abwegigkeit sowieso nie zur Diskussion stand, hat sich auch Version B nicht etablieren können, da mit ihr die meisten Schüler epistemologisch überfordert sind.

Der bei ihr vorzunehmende *Wechsel des ontologischen Status* von Begriffen ist sehr wohl eine *wichtige Strategie* des Mathematik-Treibens, die m.E. zu dem Bild von Mathematik gehört, das wir Schülern vermitteln sollten. Sie ist Teil einer *allgemeineren* Denk-, Verstehens- und Kommunikations-Strategie, nämlich des *Perspektiven-Wechsels*; und zu deren Ausbildung beizutragen, ist eine genuine Aufgabe der Schule. Die Beispiele für diese Strategie sind aber sehr sorgfältig auszuwählen und ebenso sorgfältig zu behandeln. Denn je nach den Umständen (die von vielerlei Variablen und keineswegs nur vom Kurs- oder Schultyp bestimmt werden) können tiefe kognitive Konflikte (was noch kein Mangel sein muß) mit oder ohne hitzige Debatten, aber auch absolute Ignoranz und äußerlicher unverstandener Mitvollzug die Reaktion sein.

In den Zeiten der Neuen Mathematik mit der Strengewelle in der Analysis hat man diese Probleme wohl unterschätzt, und die genannte Strategie war geradezu ein Charakteristikum für den Mathematik-Unterricht mit Version B vom Aufbau des Integral-Begriffs als typischem Beispiel.

Die erkenntnistheoretische Schwierigkeit von Version B liegt darin, daß ein mathematisches Objekt neu eingeführt wird, das bereits vorhanden ist (epistemologischer Widerspruch!) und von dem man Eigenschaften neu nachweist unter ausdrücklichem Verbot der Verwendung der

bereits bekannten Eigenschaften, obwohl diese genau dieselben sind (kognitiver Widerspruch!). Diesem Konflikt kann man auch nicht dadurch aus dem Weg gehen, daß man das Wort 'Flächeninhalt' vermeidet; denn der springende Punkt ist ja gerade, daß es sich um eine Neudefinition desselben handelt.

Selbstredend findet auch bei Version A in allen drei Varianten ein Wechsel des ontologischen Status statt, wenn die beiden Aspekte unabhängig voneinander eingebracht und dann als gleichwertig erkannt werden. Diese Spielart der Strategie ist Schülern leichter zugänglich, weil dabei lediglich zwei Objekte aufgrund gemeinsamer Eigenschaften als wesensgleich zu erkennen sind.

Da Version B in Didaktik und Unterricht inzwischen keine Rolle mehr spielt, wird auch sie von den weiteren Betrachtungen ausgeschlossen.

3. Unterschiede zwischen 'F'- und S-Aspekt auf didaktischer Ebene

Wenn man dezidiert zwei Ausprägungen des Integral-Begriffs unterscheidet, je nach dem ob dieser über den 'F'- oder den S-Aspekt eingeführt wird, dann setzt man voraus, daß diese beiden Aspekte selbst deutlich unterschieden sind. Der Hauptsatz bzw. seine Äquivalente besagen, daß die Unterschiede nicht auf der mathematischen Ebene liegen. Für die Ausbildung des Integral-Begriffs beim Lernenden ist aber nicht nur diese Ebene bedeutsam, vielmehr spielen allerlei Merkmale aus dem meta-mathematischen Bereich i.w.S. (das Treiben, Anwenden, Lernen von Mathematik und Erkenntnisgewinnung allgemein betreffend) eine Rolle.

Im folgenden wird für mehrere solcher Merkmale untersucht, ob unterschiedliche Ausprägungen, die den beiden Aspekten üblicherweise zugesprochen werden (und sei es aufgrund oberflächlicher Vorstellungen und Verständnisse), nach relevanten Kriterien zwingend sind und unterschiedliche Integral-Begriffe nach sich ziehen. Die Merkmale hängen inhaltlich alle mehr oder weniger eng zusammen, ihr Gewicht variiert stark, und eine natürliche Reihenfolge der Betrachtung existiert nicht.

Das Fazit wird sein, daß die beiden Aspekte viel umfassender übereinstimmen als gemeinhin angenommen.

(ii) Stammfunktionen (mit Nullstellen) sind Integralfunktionen.

$$\int_r F' = F \quad \text{für } F \in C^1_r .$$

Version Ac: Wenn "das Integral als Stammfunktion erklärt" wird:

Satz Ac(i) Flächeninhaltsfunktionen sind Integralfunktionen.

$$\int_r A_r^{-1}(F) = F \quad \text{für } F \in F_r$$

$$\text{bzw. } (A_r(f))' = f \quad \text{für } f \in C.$$

(ii) Integralfunktionen (mit Nullstellen) sind Flächeninhaltsfunktionen.

$$A_r^{-1}(\int_r f) = f \quad \text{für } f \in C$$

$$\text{bzw. } A_r(F') = F \quad \text{für } F \in F_r .$$

Weil hier bei Satz Ac der Integral-Operator explizit vorkommen soll, d.h. die Inversen der in Satz Aa(i) und (ii) und Ab verwendeten Operatoren, treten bei (i) und (ii) jeweils andere Definitionsbereiche auf. Das heißt aber nicht, daß Ab und Aa sich begrifflich näher stünden als Ac und Aa, sondern lediglich, daß die für Aa zuerst eingeführten Operatoren auf Ab passen. Version Ab und die Operatoren D_r und A_r sind uns vertrauter als Ac und die Inversen. Wie Satz Aa(iii) aber deutlich macht, läßt sich bei Verwendung auch der Umkehr-Operatoren die Trennung der Operator-Gleichungen in (i) und (ii) nirgends stringent durchhalten.

Den bis jetzt vorgestellten Versionen ist gemeinsam, daß der 'F'- und der S-Aspekt unabhängig voneinander eingeführt und anschließend *als gleichwertig erkannt* werden. Zu den Zeiten der Neuen Mathematik wurden auch Integral-Begriffe diskutiert, bei denen einer der beiden Aspekte mit Hilfe des anderen definiert wird, d.h. wo die Aspekte *durch Setzung gleichwertig werden*. Wegen der Dominanz dieser definitorischen Abhängigkeit spielt es dann - anders als bei Version A - aus epistemologischer Sicht keine Rolle mehr, wann und wie die Rede vom Integral eingeführt wird, und 'integral'-freie Varianten brauchen nicht diskutiert zu werden.

Version B: Das "Integral wird als Stammfunktion erklärt" und der Flächeninhalt über das Integral *definiert* und damit Existenz (und Eindeutigkeit) des Flächeninhalts durch Zurückspielen auf die Differentialrechnung erzwungen (z.B. Griesel 1970):

Def. B **Die Flächeninhaltsfunktion zu $f \in C$ ab r ist die Integralfunktion (= Stammfunktion) zu f mit Nullstelle r.**

$$A_r(f) := \int_r f .$$

Satz B $(A_r(f))' = f$.

Version C: Aus systematischen Gründen sei schließlich noch die Variante angeführt, daß das "Integral als Flächeninhalt erklärt" und anschließend Differenzieren als Umkehrung des Integrierens *definiert* wird. Sie wäre das (offenbar praxisfremde) Analogon zu Version B bei dem durchaus diskutierenswerten Vorschlag, die Integral- vor der Differentialrechnung zu behandeln (s. [B&T:156f]). (Dieser Vorschlag wurde tatsächlich mit Version Ab gekoppelt, bei der dann allerdings von der Einführung des Integrals bis zur Behandlung von Satz Ab einige Zeit vergeht.)

Def. C **Die Ableitung von $F \in F$ ist diejenige Funktion $f \in C$, die F als Integralfunktion (= Flächeninhaltsfunktion) hat.**

$$(\int_r f)' := f .$$

Satz C $\int_r f$ ist Stammfunktion von f.

(Man beachte, daß Version B der Variante Ac und Version C der Variante Ab entspricht.) Versionen Ac und C kommen einem besonders fremd vor, und man muß sich bemühen, den ontologischen Status der beteiligten Begriffe und der Aussagen (letzteres auch bei Version B) dauernd zu beachten. Bei B wäre noch zu zeigen, daß der so definierte Flächeninhalt, bei C, daß die so definierte Ableitung "vernünftig" ist, nämlich letzten Endes, daß sie das sind, was in der Mathematik unter diesen Bezeichnungen geläufig ist bzw. im Unterricht vielleicht früher schon einmal behandelt wurde. An Beweisen spart man also strenggenommen nichts, wenn man Satz A in eine Definition (B oder C) ummünzt.

Satz A (i) Flächeninhaltsfunktionen sind Stammfunktionen (mit Nullstellen).

(ii) Stammfunktionen (mit Nullstellen) sind Flächeninhaltsfunktionen.

In vielen didaktischen Abhandlungen und Schulbüchern ist die Klarheit dieses Satzes getrübt, indem er von (für ihn) nebensächlichen Zusammenhängen oder auch von (für eine mathematisch saubere Formulierung unvermeidlichen) Details überwuchert ist. Außerdem ist, im Sinne meiner o.a. These, einzuräumen, daß mit zunehmend genauer Analyse die begrifflichen Unterschiede zwischen Flächeninhalts- und Stammfunktionen sich sowieso in Nichts auflösen und der Satz sozusagen trivial wird.

Ehe ich diese Analyse in Kap. 3 in Angriff nehme, möchte ich zunächst in einer stärker formalisierten Darstellung idealtypisch die Unterschiede zwischen den beiden o.a. "Zugängen" (Versionen Ab und Ac) und meinem Vorschlag (Aa), sowie deren Gemeinsamkeiten gegenüber entfernteren Auffassungen (B und C) auf den Punkt bringen. Auch wenn diese Ausführungen vielleicht die Leistungsfähigkeit des mathematischen Formalismus demonstrieren, so sind sie selbstredend nicht für eine direkte Umsetzung in den Unterricht gedacht. Indem sie aber den jeweiligen (inner-mathematischen) ontologischen Status der beteiligten Begriffe bzw. Aussagen klar herauspräparieren, sind sie m.E. eine unabdingbare epistemologische Grundlage für die didaktische Diskussion.

Die Stetigkeit einer Funktion f ist weder Voraussetzung für die Existenz einer Flächeninhalts-, noch für die einer Stammfunktion. Auch als Definitionsbereich kämen andere Teilmengen von $\mathbb{R}$ als lediglich endliche Intervalle in Frage. Im folgenden geht es aber nicht nur *nicht* um *größtmögliche Allgemeinheit*; sie würde sogar stören. Deshalb wird jetzt nur die Klasse $C := C[a;b]$ der auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$ definierten stetigen reellwertigen Funktionen betrachtet.

Sei weiterhin C^1 die Klasse der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf [a;b] und F die Klasse der Funktionen auf [a;b], die Flächeninhaltsfunktion zu einem $f \in C$ sind. Daß $C^1 \subsetneq C$ und $F \subsetneq C$ gilt, ist wohlbekannt, aber jetzt nicht wichtig. Sei weiter $C^1_N \subsetneq C^1$ die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf [a;b], die dort eine Nullstelle haben, für $r \in [a;b]$ sei $C^1_r \subsetneq C^1_N$ die Teilmenge derjenigen, die in r eine Nullstelle haben, und schließlich $F_r \subsetneq F$ die Teilmenge der Flächeninhaltsfunktionen ab r, d.h. die den Flächeninhalt zwischen r und dem Argument (etwa x) messen, für die also trivialerweise r Nullstelle ist. Dann ist

Satz A (i) $F \subsetneq C^1$ bzw. $F \subsetneq C^1_N$ bzw. $F_r \subsetneq C^1_r$,

(ii) $C^1_N \subsetneq F$ bzw. $C^1_r \subsetneq F_r$.

Es gelten aber nicht nur diese (statisch formulierten) Mengen-Inklusionen, sondern für einige natürliche Operatoren entsprechende Gleichungen, die mehr funktionales Denken ansprechen: Sei $D: C^1 \rightarrow C$ der (surjektive) Differentiations-Operator (auch $':C^1 \rightarrow C$ geschrieben), D_N seine (surjektive) Einschränkung auf C^1_N, D_r seine (bijektive) Einschränkung auf C^1_r, sowie $A_r: C \rightarrow F_r$ der (bijektive) Operator, der jedem $f \in C$ seine Flächeninhaltsfunktion ab r zuordnet (wobei die Linkstotalität von A_r und, so weit behauptet, die Injektivität und Surjektivität aller dieser Operatoren nicht trivial ist). Zusammen mit der Identifizierung von C^1_N und F bzw. von C^1_r und F_r hat man dann zunächst **Version Aa:**

Satz Aa (i) $D \circ A_r = id_C$ bzw. $D_r \circ A_r = id_C$,

(ii) $A_r \circ D_r = id_{C^1_r}$.

Die Umkehr-Operation von D, bekannt als Stammfunktions-Bildung, wird häufig zunächst mit ganz C^1 als Wertebereich mehrdeutig verstanden. Für die beiden bijektiven Operatoren D_r und A_r sind aber die Umkehr-Operatoren wohldefiniert und auch bijektiv, und Satz Aa lautet mit ihnen:

Satz Aa (iii) $D_r = A_r^{-1}$ bzw. $A_r = D_r^{-1}$.

Bei den erwähnten "Zugängen" wird nun vor der Erarbeitung von Satz A entweder (favorisiert) A_r oder D_r^{-1} als Integral (-Operator) bezeichnet und $\int_r$ geschrieben. Die Sätze lauten nun:

Version Ab: Wenn "das Integral als Flächeninhalt erklärt" wird:

Satz Ab (i) **Integralfunktionen sind Stammfunktionen.**

$(\int_r f)' = f$ für $f \in C$.

ten Rollen der beiden Aspekte.

Bei [B&T:158ff] werden, teilweise mit anderer didaktischer Begrifflichkeit, diese beiden "Konzepte" ("Grundverständnisse") ebenfalls wohl unterschieden. Für [D&V] stellen sie verschiedene "Sichten" vom Integral dar, und sie lehnen sich insgesamt (nicht ausdrücklich bei dieser Frage) an [B&T] an. [K&W:245ff] wiederum sprechen explizit von verschiedenen "Zugängen".

Auch wenn die Autoren sich nicht detailliert über konkrete Auswirkungen auf den Unterricht auslassen, so gehen sie offenbar doch davon aus, daß mit den beiden "Zugängen" bei 'den' Schülern unterschiedliche Grundvorstellungen und -verständnisse (GVV im Sinne von Bender 1991) vom Integral ausgebildet werden. Geprägt werden diese von demjenigen Aspekt, über den das Integral eingeführt wird, während sie von dem anderen lediglich ergänzt werden. Dabei läßt sich eine (m.E. akzeptable) Bevorzugung des 'F'-Aspekts feststellen.

In Absetzung von dieser herrschenden Meinung, zugleich aber auch gewisse Tendenzen (zu mehr Sinnhaftigkeit und Anschaulichkeit) unterstreichend, möchte ich folgende **Thesen** formulieren:

Erkenntnistheoretisch: Für die Schul-Analysis stimmen 'F'- und S-Aspekt begrifflich stärker überein, als in der Didaktik und im Unterricht weithin angenommen; denn die Essenz beider Aspekte ist das *Kumulieren*, d.h. das Bilden von *verallgemeinerten Produktsummen* (vgl. [B&T:159ff]).

Der Unterschied zwischen ihnen reduziert sich i.w. darauf, ob es um die *Neu- oder Rekonstruktion 'der' Integralfunktion* geht (womit der Kern der folgenden beiden Alternativen gemeint ist: zu f ist F gesucht, so daß F 'die' Flächeninhaltsfunktion von f ist; oder: zu f ist F gesucht, so daß f die Steigungsfunktion von F ist). Diese Unterscheidung ist kaum noch mathematisch, wohl aber erkenntnistheoretisch relevant.

Für Didaktiker, Lehrer und Schüler liefert häufig der *Grad der Formalisierung* das dominierende Trennungsmerkmal: der Flächeninhalt ist eher auf einer anschaulichen und 'die' Stammfunktion eher auf einer formalen Ebene angesiedelt.

Didaktisch: Will man im Mathematik-Unterricht sinnhafte Begriffe ausbilden, so ist Integrieren essentiell als Kumulieren zu behandeln. In

der (m.E. früh wichtigen) funktionalen Fassung entstehen dabei aus Steigungs-, Längen-, Momentangeschwindigkeits-, Leistungs-, Grenzkosten-Funktionen usw. die zugehörigen Längen-, Flächeninhalts-, Weg-, Energie-, Kosten-Funktionen usw. (s. [B&T:92]), und die begriffliche Trennung von 'F'- und S-Aspekt sollte als nicht existent eingesehen werden (= Hauptsatz).

Unabhängig davon, für wie wesentlich man die trennenden Merkmale hält, sollten die beiden Aspekte zeitlich und inhaltlich eng aufeinander bezogen sein, so daß sie gemeinsam das Fundament für den Integral-Begriff legen und es nicht auf die Reihenfolge der Behandlung ankommt. Zu diesem Zweck schiebt man die Rede vom Integral und die Verwendung des Integral-Zeichens auf, bis die Gleichberechtigung der beiden Aspekte erkannt ist.

Nicht alle der folgenden Überlegungen sind neu. Häufig läßt sich nicht feststellen, wer einen bestimmten Gedanken mit hinreichender Prägnanz erstmals ausgesprochen hat. Daher stütze ich mich neben einigen Arbeiten aus den letzten beiden Jahrzehnten vor allem auf aktuelle didaktische Standardwerke. Für die Analyse kann ich auf die Erörterung vieler grundsätzlicher und spezieller Themen der Analysis-Didaktik verzichten; zur Begründung der Thesen ist es aber erforderlich, auch einige wohlbekannte Gesichtspunkte dennoch auszuführen.

2. Unterschiede zwischen 'F'- und S-Aspekt in der Schule auf mathematischer Ebene?

2.1 Der Hauptsatz und seine Äquivalente in verschiedenen Versionen

Ein wesentliches Problem beim Aufbau des Integral-Begriffs ist das Aufwerfen zweier Fragestellungen, die scheinbar wenig miteinander zu tun haben, und die Einsicht in ihre (weitgehende) Gleichwertigkeit, nämlich: "Ist eine stetige Funktion $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ermittle den Inhalt der (orientierten) Fläche zwischen der ersten Achse und dem Graph von f im $\mathbb{R}^2$"; bzw.: "..., so gib eine Funktion an, deren Ableitung f ist". Bei einer funktionalen Auffassung des Flächeninhalts wird diese Gleichwertigkeit prägnant in folgendem Satz gefaßt (wobei die Ergänzung 'mit Nullstellen' in (i) zwar korrekt, aber nicht wesentlich ist und nur aus Gründen der Symmetrie mit aufgenommen ist).

102 - 127 mathematica didactica 13 (1990)

ZWEI "ZUGÄNGE" ZUM INTEGRAL-BEGRIFF?

von

Peter Bender

Universität - Gesamthochschule Paderborn

(Den Kollegen Werner Blum und Arnold Kirsch danke ich für kritische Anmerkungen zu einer ersten Fassung und eine produktive Diskussion.)

Zusammenfassung

In der Analysis-Didaktik sind zwei Zugänge zum Integral-Begriff geläufig: Über den Flächeninhalts-Aspekt definieren und dann mit dem Stammfunktions-Aspekt konfrontieren, oder umgekehrt. Bei sinnhafter, inhaltsreicher, anschaulicher Behandlung stimmen aber die beiden Aspekte weitgehend überein. Es wird dafür plädiert, zuerst diese Übereinstimmung zu erarbeiten und darauf aufbauend das Integral einzuführen.

Abstract

In school calculus there are mainly two views of the integral: as area and as anti-derivative; and there are known two ways of introducing the concept: define it by the area, and then confront it with the anti-derivative, or the other way round. If those two views are taught in a meaningful, significant manner appealing the students' intuitions, they coincide largely. As a consequence, this coincidence should be worked at beforehand, and only then the notion of integral should be installed.

* Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Peter Bender, U-GH Paderborn, Fb17 - Mathematik-Informatik, Warburger Str. 100, 4790 Paderborn

1. Problemaufriß, Thesen

Es besteht heutzutage weitgehende Übereinstimmung unter Mathematikdidaktikern und -lehrern, daß der Integral-Begriff in der Schul-Analysis auf einen Flächeninhalts- und einen Stammfunktions-Aspekt (F- und S-Aspekt) und auf das Zusammenwirken der beiden gegründet wird.

Neben diesen beiden dominierenden Auffassungen vom Integral, nämlich als Flächeninhalt und als Stammfunktion, kommen in der Literatur weitere vor: vor allem die Auffassung als Mittelwert (s. Danckwerts & Vogel 1986 [D&V], Blum & Törner 1983 [B&T], Knoche & Wippermann 1986 [K&W]). Dieser Aspekt spielt allerdings in der Schulpraxis eine nachgeordnete Rolle, da seine Übertragung auf die Statistik (mit der - u.a. - er gern gerechtfertigt wird) nicht gerade trivial ist, und er als Quotient aus Flächeninhalt und Intervallänge direkt auf die Flächeninhalts-Auffassung zurückgeführt werden kann. Die von [K&W] darüber hinaus behandelten "Zugänge" sind eher technische Varianten und brauchen hier nicht explizit berücksichtigt zu werden.

Im folgenden geht es nur noch um den F- und um den S-Aspekt. Die Unterscheidung und Bezeichnung dieser beiden Aspekte beruht auf einem allgemein geteilten Verständnis und Sprachgebrauch, wie sie sich in der didaktischen Literatur manifestieren. F-Aspekt: Für eine (stetige) Funktion f mit Definitions- und Wertebereich in $\mathbb{R}$ kann man für gewisse Teilmengen des Definitionsbereichs das Integral als Inhalt der (orientierten) Fläche zwischen erster Achse und Graph der Funktion im $\mathbb{R}^2$ erklären. S-Aspekt: 'Das' Integral ist 'die' Funktion, deren Ableitung f ist. Dieser Unterscheidung und dem Sprachgebrauch schließe ich mich zunächst an, um mein Anliegen verständlich formulieren zu können, werde sie aber in der weiteren Analyse relativieren. Insbesondere der F-Aspekt wird durch seine Bezeichnung unzureichend charakterisiert, weswegen ich diese in Apostrophe setze: 'F'-Aspekt.

In der deutschsprachigen Literatur werden dezidiert *zwei "Zugänge"* zum Integral-Begriff unterschieden, je nach dem, welcher der beiden Aspekte den Primat hat, nämlich (in der Sprechweise von Tietze, Klika & Wolpers 1982 [T,K&W:141]) das Flächeninhalts-"Konzept", bei dem das Integral als Flächeninhalt eingeführt und später mit dem S-Aspekt konfrontiert wird, und das Stammfunktions-"Konzept" mit vertausch-