DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT

Bender: Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten
1991

FERD. DÜMMLERS VERLAG · BONN

d) Bis auf ein Ausklammern von $10^{[(s+1)/2]}$ und Hilfsvariable, mit denen man Doppelberechnungen einsparen kann, überträgt man die Formeln in c) direkt in ein Programm; es wird hier nicht noch einmal aufgeschrieben. Allerdings ist für spz eine Funktionsprozedur zu schreiben; sie arbeitet intern die Ziffern einer gegebenen Zahl v stellenweise von rechts ab und baut dabei die Spiegelzahl von v entsprechend von links auf. Die Programme werden hier in einer PASCAL-ähnlichen Notation aufgeschrieben; auch die Gaußklammer und die Hochzahlschreibweise werden der Lesbarkeit wegen verwendet.

```
    procedure spz(v : integer) : integer;
    var s, v, gh, rest, reststz : integer;
    begin
        s : = [lg(n)] + 1;                      (Stellenzahl)
        gh : = [(s + 1)/2];                 (gut-halbe Stz.)
        rest : = v;            (wird im folg. stellenw. abgebaut)
        reststz : = gh;             (zählt diesen Stellenabbau)
        spz : = 0;
wdh         spz : = spz · 10 + rest − [rest/10] · 10;
            reststz : = reststz − 1;
            if reststz > 0 goto wdh;
            end spz;
```

e) Erläuterungen zu dem folgenden Programm: *gh* zählt die gut-halbe Stellenzahl wie oben, *i* durchläuft jeweils die natürlichen Zahlen von einer Zehnerpotenz bis zur nächsten. Das Programm wird mit einer if-Bedingung gestoppt, sobald die erzeugte Palindromzahl größer als die vorgegebene Zahl zu werden droht. Es besteht »hauptsächlich« aus der Prozedur entoderweder, welche entweder (hilfe = 1) die Palindrome mit $2 \cdot gh - 1$ Stellen oder (hilfe = 0) diejenigen mit $2 \cdot gh$ Stellen erzeugt. Die Funktionsprozedur spz aus d) wird hier weiter verwendet.

```
        program palindromaufstellung;
        var n, i, k, gh: integer;
        procedure spz . . . . . . wie in (4) . . . end spz;
        procedure entoderweder (hilfe: integer);
          begin
          i   : = 10^(gh − 1);
naechst   k   : = i · 10^(gh-hilfe) + spz([i/10^hilfe]);
              (Erstellung der Palindromzahl durch Spiegelung
              der vorderen Hälften nach hinten)
          if k > n goto stop;
          write (k);
          i   : = i + 1;
          if i < 10^gh goto naechst;   (i besitzt immer gh Stellen)
        end entoderweder;
        begin
          read(n)            (die »Grenz«zahl n ist einzulesen)
          gh  : = 1;
anfang    entoderweder(1);  (Pal.zahlen mit 2 · gh − 1 Stellen)
          entoderweder(0);  (Pal.zahlen mit 2 · gh Stellen)
          gh  : = gh + 1;
          goto anfang;
stop    end palindromaufstellung.
```

□

Zur Diskussion gestellt

Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten[1]

Verfasser: Prof. Dr. Peter Bender, U-GH Paderborn, Fb Mathematik, Warburger Straße 100, 4790 Paderborn

Auch wenn Folgen und Grenzwerte in den Analysis-Kursen heutzutage knapper behandelt werden, spielt die Begrifflichkeit nach wie vor eine zentrale Rolle im Zusammenhang mit infinitesimalem Denken. Bekanntlich liegen bei vielen Schülern erhebliche Fehlvorstellungen und -verständnisse (FVV) vor, die zum Teil auf ebensolche bei Lehrern zurückgehen und schon in der S I angelegt werden. Unter Berücksichtigung der Literatur über die empirische Forschung werden im Artikel diese FVV analysiert. Sie liegen vor im Zusammenhang mit u. a. formaler Schreibweise; Begriff des Hauptstücks; letztem Folgenglied; Durchlaufen einer Folge; Schreib- und Sprechweisen.

1 Vorbemerkungen

Im klassischen Analysis-Kurs werden zuerst Folgen und der Grenzwertbegriff behandelt und darauf aufbauend nacheinander Stetigkeit, Differentiation und Integration. Es sind eigentlich die letzten beiden der genannten Kapitel, die den Kern der Analysis ausmachen, jedenfalls wenn diese nicht nur als rein mathematisches Gebiet aufgefaßt wird, sondern etwas von dem Geist der Anwendungsbezogenheit ausstrahlen soll, dem sie ihre überragende Bedeutung verdankt. Bei dieser Reihenfolge besteht jedoch die Gefahr, daß sie zugunsten der ersten beiden Kapitel zu kurz kommen. Daher räumt man inzwischen in den S II-Curricula diesen weniger Umfang und Gewicht ein bzw. verlagert sie teilweise nach hinten. Verschiedene Ansätze und Argumente dazu sind in dem didaktischen Lehrbuch [5] ausführlich dargestellt.

Ergänzend sei noch folgender Umstand genannt, der es Schulbuchautoren und Lehrern erleichtert hat, die unter-

[1] Herrn Professor FRITZ NESTLE zum 60. Geburtstag gewidmet.

 ISSN 0025-5866

richtliche Bedeutung von Folgen und Stetigkeit niedriger anzusetzen: Es fehlt bei diesen Themen ein umfangreicher Kalkül, mit dessen Beherrschung allen Beteiligten Begriffsverständnis vorgetäuscht werden kann; und die involvierten mathematischen Situationen sind weniger komplex und lassen weniger direkte Anwendungen zu, so daß die am Unterricht Beteiligten unausweichlicher sich mit der infinitesimalen Begrifflichkeit selbst befassen müssen; kurz: bei den Gebieten ›Folgen‹ und ›Stetigkeit‹ tritt ein Unterrichts-Mißerfolg deutlicher zutage als bei ›Differentiation‹ und ›Integration‹.

Allerdings stellt der Abbau der ersten beiden Gebiete eine didaktische Milchmädchen-Rechnung dar, jedenfalls wenn man meint, daß sich ohne einen eigens und ordentlich behandelten Grenzwertbegriff (in irgendeiner Form) als Fundament später mehr als nur vage und letztlich falsche und ungeeignete Vorstellungen und Verständnisse von den zentralen Fragen, Methoden und Begriffen der Analysis wie lokale Änderungsrate u. v. a. m. ausbilden. Ein extremes Beispiel wird in der Logo-Philosophie geliefert, wenn die Schwäche, nur Streckenzüge und keine krummen Linien zu kennen (weswegen z. B. der Kreis als 360-Eck eingeführt wird), in eine absichtliche Vorprägung auf die Differentialgeometrie umgemünzt wird (vgl. [1]). Ob Grundschüler auf Differentialgeometrie vorbereitet werden sollen, sei dahingestellt. Daß Mathematiker und Physiker, wenn sie infinitesimal denken können, sich Differentiale als sehr kleine Größen vorstellen, ist für sie bestimmt nützlich. Aber wenn noch kein Grenzwertbegriff da ist, können solche Vorstellungen mit ihrer Robustheit die Ausbildung dieses Begriffs auf Dauer behindern (vgl. [2], [7]).

Ich möchte nun die Auseinandersetzung über das Analysis-Curriculum nicht weiter verfolgen, sondern auf einige didaktische Probleme beim Thema ›(Zahlen-)Folgen und Grenzwerte‹ eingehen. Tatsächlich wird dieses Thema üblicherweise in gewissem Umfang nach wie vor behandelt, auch in der S I wenigstens implizit an verschiedenen Stellen. Seit Computer in den Bereich der allgemeinbildenden Schulen gelangt sind, erlebt es in der didaktischen Diskussion sogar wieder einen gewissen Aufschwung: Das Auswerten von Zahlenfolgen, d. h. das Erzielen von im Prinzip beliebig genauen Ergebnissen durch hinreichend weites Durchlaufen *(endlicher)* Anfangsstücke ist ohne Computer i. a. sehr mühsam bzw. unmöglich, mit Computer aber trivial, da dieses iterative (inklusive rekursive) Arbeiten gerade seine Spezialität ist.

Die Hauptthese der vorliegenden Arbeit lautet aber, daß diese sog. *dynamische* Auffassung von Folgen, die Schülern schon immer, also unabhängig vom Arbeitsmittel ›Computer‹, nahegebracht werden sollte, mit verantwortlich ist für verbreitete *Fehlvorstellungen und -verständnisse* (FVV) vom Begriff des Grenzwerts. Mit dieser These ist nicht die Konsequenz verbunden, die dynamische Sichtweise gänzlich zu eliminieren, die ja als Einstieg und bei Anwendungen überaus erfolgreich ist. Aber es gibt eine (nicht zeitliche, sondern epistemologische) Phase bei der Ausbildung des Grenzwertbegriffs, wo eine eher statische Betrachtungsweise geboten ist, weil die vordergründig dynamische in die Irre führt.

Der Computer, die Inkarnation dynamischer Vorgehensweisen und damit eines gewissen Zeitgeists in der westlichen Welt, verschärft die Problematik mit seiner Suggestion, die Unendlichkeit mühelos in den Griff zu kriegen. *Wenn* man Schüler an infinitesimales Denken heranführen will, kann die Arbeit mit dem Computer dafür zunächst nur untergeordnete Bedeutung haben. *Ob* man Schüler (bzw. *welche* man) an infinitesimales Denken heranführen will, ist seit der Verbreitung des Computers nicht mehr und nicht weniger fraglich als vorher. Jedenfalls können die numerischen Verfahren, die sich auf die Schul-Analysis beziehen, nicht ohne infinitesimales Denken verstanden und auf Korrektheit geprüft werden. Eine ausführliche Diskussion von Möglichkeiten und Grenzen des Computer-Einsatzes im Analysis-Unterricht findet man in [4].

Es ist nicht ausgemacht, daß es gelingt, in den Lernprozessen der Schüler die dynamischen Vorstellungen in den entscheidenden Phasen der Begriffsbildung auszuschalten und sie dann wieder zuzulassen. Dies ist m. E. *die Hauptaufgabe* des Analysis-Unterrichts, mit deren Lösung dieser steht und fällt und die derzeit weltweit in der allgemeinbildenden Schule nicht gelöst zu sein scheint. Diese Aufgabe soll nun am Stoff ›Folgen und Grenzwerte‹, dem Prototyp für diese Problematik, dargestellt werden. Das dabei verwendete didaktische Konstrukt ›Grundvorstellungen und -verständnisse (GVV)‹ ist in [2] ausführlich erläutert, erklärt sich in erster Näherung aber auch von selbst.

2 Formalismus

Folgen sind ein klassisches Anwendungsfeld für das Prinzip der vollständigen Induktion und andere Beweisverfahren oder auch singuläre Beweise. In dieser Funktion stellen sie an Schüler und Studenten z. T. hohe intellektuelle Anforderungen. Die Schwierigkeiten liegen aber eher beim Verstehen des Beweisens, bestimmter Beweisprinzipien und einzelner Beweise und das hauptsächlich im arithmetisch-algebraischen und weniger im infinitesimalen Bereich. Außerdem spielt diese Funktion, wenigstens in Grundkursen, heute keine große Rolle mehr, so daß ich nicht weiter auf sie eingehe. Es soll vielmehr die Begrifflichkeit im Zentrum der Betrachtungen stehen.

Bei der symbolischen Schreibweise »*a heißt Grenzwert der Folge* (a_n), *falls* $\forall \varepsilon > 0 \exists p \forall n \geq p$: $|a_n - a| < \varepsilon$« erschwert offenbar das gehäufte Auftreten von Quantoren und deren Reihenfolge sowie das Auftreten von Ungleichungen mit Beträgen den Zugang ([8]).

Problematisch ist zunächst einmal die formale Schreibweise, weil man ihr nur mit Mühe einen Sinn entnehmen kann. Viel günstiger ist eine Definition wie: »*. . ., falls in jeder, noch so kleinen, Umgebung von a ein Hauptstück der Folge liegt*« (mit den diversen bekannten Varianten); nach dem wohlbekannten Prinzip des Quantoren-Versteckens. Natürlich sind die Quantoren noch da, die Definition ist dieselbe (eben!), und bei einem konkreten Konvergenz-Nachweis ist nicht anders als vorher vorzugehen. Aber der Formalismus und der Abschreckungseffekt sind weg, und einige Begriffe sind ausgelagert: Umgebung und Hauptstück.

3 Das Wesentliche einer Folge: die Hauptstücke

Für GVV vielleicht noch günstiger wäre eine Sprechweise wie: »*. . ., falls das Wesentliche der Folge in jeder, noch so kleinen, Umgebung von a liegt*« (wobei es auf den Singular und nicht auf das Substantiv ankommt) o. ä., obwohl diese mathematisch ähnlich ungenau ist wie »*die* Stammfunktion einer Funktion«. Für eine Folge (a_n) gibt es ja nicht nur ein Hauptstück, sondern für jedes natürliche p ist die Folge $(a_n)_{n \geq p}$ ein Hauptstück von ihr (und dies sind auch alle). Aber die Rede von *einem* Hauptstück (unter vielen) verleitet dazu, sich eine Folge in verschiedene Hauptstücke eingeteilt vorzustellen, die vielleicht abschnittsweise hintereinander liegen o. ä. Das *Wesentliche* dagegen ist die gemeinsame Eigenschaft aller Hauptstücke, nämlich daß ihnen an der ganzen Folge nur endlich viele Glieder fehlen. Es ist eigentlich nichts anderes als die Folge selbst, bei einer beliebigen Nummer anfangend, für das man also, in Abhängigkeit vom vorgegebenen ε, eine passende Nummer auswählen kann, so daß es in der ε-Umgebung von a liegt.

In der Mengen-Sprache läßt sich das Wesentliche einer Folge nicht direkt definieren; man muß dafür wohl doch die Begrifflichkeit der Hauptstücke verwenden; und es ist fraglich, ob die Vermengung dieses vagen Konstrukts mit mathematisch präzise definierten Objekten wie in der o. a. Formulierung in den Unterricht gehört. Aber zu GVV von Folgen und Kovergenz gehört dieses Konstrukt, ob man es nun mit dem Begriff des Hauptstücks operationalisiert oder nicht.

Für konvergente Folgen (besonders deutlich bei Reihen) ist charakteristisch, daß das *numerisch* Wesentliche am Anfang ›geschieht‹ und die Folgenglieder sich mit wachsenden Nummern immer weniger voneinander unterscheiden. Gegen dieses numerisch Wesentliche ist das *infinitesimal* Wesentliche (s. o.) einer Folge deutlich abzugrenzen: Ersteres ist an Anfangsstücke, letzteres (insbesondere auch die Eigenschaft der Konvergenz selbst) an Hauptstücke der Folge gebunden. (Der Ausdruck ›Hauptstück‹ o. ä. ist m. E. der Wendung ›Endstück‹ vorzuziehen, damit nicht wieder der Gedanke an ein Ende der Folge aufkommt.)

4 Betragsstriche topologisch verstehen!

Die Betragsstriche rühren ungeeignete GVV an, nämlich: zu den beiden gegebenen Zahlen a_n und a soll eine dritte, mit diesen gleichberechtigte, ermittelt werden: Deren Rolle als Abstand tritt in den Hintergrund, da der Betragsterm dem Bereich der Arithmetik (Rechnen in $\mathbb{R}$), und nicht der Topologie zugeordnet wird. Eine Schreibweise wie $d(a_n, a)$ würde wohl eher auf topologische GVV zielen. Gegen diese spricht aber die Überfrachtung mit Symbolen, da ja keine andere Ausfüllung als eben die absolute Differenz vorliegt. Würde man im $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$) arbeiten, hätte man es einfacher (!), sogar noch mit $\|a_n - a\|$, weil auch diese Symbolik üblicherweise zuerst topologisch und nicht als Rechenanweisung aufgefaßt wird.

5 Das ›letzte Glied‹ einer Folge?

Offenbar liegen die Schwierigkeiten tiefer als nur im Formalismus. In [6] ist herausgearbeitet, daß bereits für den scheinbar einfachen Folgen-Begriff ungeeignete Vorstellungen vorliegen, die man i. w. darunter subsumieren kann, daß eine *Folge* ein *letztes Glied* (mit der Nummer ∞) *hat* oder daß man mit ihr zumindest ein solches erreichen kann (was immer hier mit ›erreichen‹ gemeint sein soll). Mit verantwortlich für diese FVV ist eine kritiklose Übernahme mathematischer Rede- und Schreibweisen in den Unterricht und unzureichende Sorgfalt bei der Pflege der GVV.

Das fängt an in der S I, etwa bei der Approximation von π: Da wird eine Folge von Polygonen betrachtet, die immer mehr Ecken haben, bis sie *schließlich* zum Kreis werden. Selbst wenn der Lehrer solche fehlerhaften Sprechweisen vermeidet, entsteht bei den Schülern leicht der Eindruck, daß der Kreis das letzte Element dieser Folge sei; zum einen aus optischen Gründen; zum anderen, weil es ja erklärtermaßen um die *Ermittlung eines Grenzwertes durch einen Grenzprozeß* geht: Auch die verbale Beteuerung, daß man den Grenzwert nicht erreicht, verhindert nicht die Vorstellung, daß er am *Ende* der Folge steht, da ja das ganze Unterrichtsgeschehen genau dieses nahelegt; und wenn die Unerreichbarkeit akzeptiert wird, dann wird sie mit begrenzter Zeit und begrenzter Arithmetik von menschlichen und elektronischen Rechnern erklärt.

Die unterschwellige Überzeugung, daß ∞ eine Art letztes Element einer Folge sei, findet man nicht selten sogar bei S II-Lehramtsstudenten der Mathematik. Diese mag durch Erfahrungen mit Kompaktifizierungen in der Topologie verstärkt worden sein; sie geht m. E. aber auf ungenügende GVV aus der Schule zurück, wo mit dem ›Wert‹ ∞ recht großzügig umgegangen wird. Es ist schon faszinierend, wie leicht man dieses Monster ›Unendlichkeit‹, nämlich mittels einer liegenden Acht, in den Griff kriegt.

6 Der Grenzprozeß führt nicht zum Grenzwert!

Ein anderer Typ von Grenzprozeß in der S I ist die Dezimalbruch-Entwicklung rationaler Zahlen. Da wird ja üblicherweise hergeleitet, daß $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ ist, postuliert, daß die Gleichung gilt, *wenn man nur unendlich weit* geht, schließlich $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ geschrieben und dies motiviert als *eine Abkürzung für die unendlich vielen* Dreien. Hier wird mit einfachen Worten und Symbolen, *aber unverfälscht,* die Doppelnatur zum Ausdruck gebracht, die die Mathematikdidaktik in ihrem Streben nach ›dynamischen‹ Vorstellungen, dem Grenzwertbegriff unterstellt: ›lim . . .‹ ist eine Anweisung zur Durchführung eines Grenzprozesses und zugleich dessen Resultat ([5]).

Nun ist diese Doppelnatur eines algebraischen Terms, gleichzeitig eine Rechenanweisung und deren Ergebnis darzustellen, eine gängige und nützliche Auffassung, aber sie versagt, wenn die Anweisung mit dem Durchlaufen einer (unendlichen) Folge verbunden ist. *Ein Grenzprozeß führt nicht zum Grenzwert,* weil er kein Ende hat und selbst wenn er eines hätte, dieses nie erreichen würde.

Deswegen haben Schüler recht, wenn sie sich weigern, die Gleichheit $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ bzw. die noch paradoxere $0{,}\overline{9} = 1$ zu akzeptieren. Sie nehmen hier den prozeßhaften Teil der ihnen beigebrachten Doppelnatur wörtlich und bestreiten mit Recht, daß dieser Prozeß zum Grenzwert führt. In [7] findet sich die Beobachtung, daß Schüler sogar die Symmetrie der Gleichheitsrelation leugnen, indem sie zwar $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ anerkennen, weil beim Lesen von links nach rechts der Prozeß wiedergegeben ist, nicht aber $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$, weil der Prozeß nie beendet werden kann und damit keine Gelegenheit besteht, »$= \frac{1}{3}$« zu sagen.

Wirklich verstanden werden kann die Gleichung $0{,}\overline{9} = 1$ wohl nur auf höherem Niveau. Das Hinschreiben einer unendlich langen Dezimalzahl ist nicht so trivial, wie es die drei Punkte suggerieren, die man nach einigen Stellen hinter dem Komma setzt. Vielmehr hat man *eine Folge von abbrechenden Dezimalzahlen* mit immer mehr Stellen. Bei jedem Hinzufügen einer Stelle hat man eine neue Zahl. Nun muß man nicht jede dieser Zahlen in den Rang eines Folgenglieds erheben, sondern kann beim Aufbau der Folge auch in sehr großen Schritten vorgehen. Abbrechende Dezimalzahlen kann man so in einem einzigen Schritt erhalten, und deswegen spielt bei ihnen diese Folgen-Auffassung keine Rolle. Aber zur Darstellung nicht-abbrechender Dezimalzahlen braucht man bei noch so großen (aber immer endlichen!) Schrittlängen unendlich viele Glieder (d. h.: endlich viele Glieder reichen niemals). Bei periodischen Dezimalbrüchen hat man für den Grenzwert dieser Folge die Schreibweise mit dem Querstrich. Niemand bezweifelt, daß $\lim (0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots) = 1$ ist; und $0{,}\overline{9} = 1$ ist dann nur eine andere Schreibweise für diesen Sachverhalt.

Insgesamt fürchte ich, daß noch so sorgfältige Bemühungen, mit »konkrete[n] Handlungen und Handlungsfolgen (. . .) infinitesimale Prozesse [zu] induzieren« (s. [10]) widersprüchlich und damit weitgehend zum Scheitern verurteilt sind, und ich möchte mich eher denjenigen Bemerkungen des Autors anschließen, mit denen er selbst zur Vorsicht mahnt bzw. auf Probleme hinweist.

7 Ungünstige Schreib- und Sprechweisen

Schreibweisen wie ›$\lim\limits_{n \to \infty}$‹ mit dem Spezialfall ›$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$‹ unterstützen die Vorstellung vom letzten Element. Dabei ist diese Schreibweise überflüssig; ›lim‹ genügt (passend: ›lim $\sum\limits_{k=0}^{n}$‹). Selbst wenn man meint, den Laufindex n schreiben zu müssen, was man bei (a_n) in der Form $(a_n)_n$ oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ auch nur macht, wenn er nicht eindeutig ist, dann gibt eine Form wie ›$\lim\limits_{n}$‹ oder ›$\lim\limits_{n \in \mathbb{N}}$‹ weniger Anlaß zu Mißverständnissen, ist aber genauso klar.

Etwas anderes ist es mit der Schreibweise ›$\lim\limits_{x \to x_0}$‹ bei der Analyse von Funktionen: die Angabe eines Grenzwerts im Definitionsbereich (einschließlich seinem Rand) ist erforderlich. Zwar wird dadurch wieder die Vorstellung vom letzten Folgenglied genährt, aber diese Schreibweise hat, im Folgen-Konzept, sowieso eine wesentlich komplexere Bedeutung: Für alle Folgen (x_n) im Definitionsbereich mit Grenzwert x_0 sind die zugehörigen Folgen $(f(x_n))$ auf Konvergenz zu prüfen usw. – Wer so weit fortgeschritten ist, daß er diese Bedeutung erfaßt, sollte keine Probleme mehr mit der Annahme eines letzten Folgenglieds haben, so daß man ihm wohl die übliche Schreibweise (inklusive $x_0 = \infty$) zumuten kann.

Sogar aus sachlichen Gründen ist übrigens die Schreibweise ›$\lim\limits_{n \to \infty}$‹ mindestens fragwürdig, da die Folge (n) nicht konvergiert, so daß die korrekte Aussage ›$\lim\limits_{n \to \infty} (n)$ ex. nicht‹ widersprüchlich wirkt. Man kann sie retten, indem man ›$n \mapsto \infty$‹ auffaßt als Wachsen über alle Schranken. Genau diese Auffassung ist überhaupt, und nicht nur hier, die adäquate.

8 ›Durchlaufen‹ einer Folge

Das Durchlaufen einer Folge muß den Schülern in der S I zu einem Erlebnis gemacht werden (so altmodisch dieser Ausdruck klingen mag), und zwar zunächst in $\mathbb{N}$:

Wenn man die natürlichen Zahlen durchläuft, kommt man an eine Zahl, wo man ein ganzes Buch braucht, um sie im Zehnersystem aufzuschreiben. Für die nächste braucht man wieder ein ganzes Buch, für die nächste wieder usw. Man kommt sogar an Zahlen, für die man eine ganze Bibliothek, sämtliche Moleküle der Erde, sämtliche Moleküle des Universums braucht, und hat immer noch erst endlich viele, also nichts im Vergleich zur Menge derer, die noch fehlen, *dem Wesentlichen.* Wenn man bedenkt, daß das alles schon bei der Menge der Primzahlen so ist, die im Vergleich zu $\mathbb{N}$ verschwindend klein ist, wo es vorkommen kann, daß zwischen zwei Primzahlen Trillionen und Abertrillionen Nicht-Primzahlen liegen! Nun betrachtet man einmal eine Nullfolge, etwa $\left(\frac{1}{10^n}\right)$, wo dieselben Effekte auftreten. Usw. – Ohne eine solche GVV von Folgen, die auch später immer wieder verlebendigt werden muß, ist eine adäquate GVV von Grenzwerten m. E. kaum möglich.

9 ›Erleben‹ der Konvergenz mit dem Computer?

Auf dem Computer lassen sich diese GVV nur ungenügend ›realisieren‹, da dessen übliche Arithmetik nicht für das Schreiben großer natürlicher Zahlen vorgesehen ist. Insbesondere läßt sich mit ihm nicht Konvergenz ›erleben‹; denn er kann noch so viele Glieder einer Folge ausgeben – es sind immer nur endlich viele. Abgesehen von den Unzulänglichkeiten, die seine normale Arithmetik mit sich bringt, nämlich stagnierende Folgen unabhängig von dem Wert bzw. sogar unabhängig von der Existenz des Grenzwerts (vgl. [9] u. v. a.), birgt ein solcher Computer-Einsatz aber noch folgende Gefahr: Indem er das Bildungsgesetz einer Folge mittels eines meist simplen Programms scheinbar mühelos in eine prinzipiell beliebig lange Aufzählung umsetzt, suggeriert er, daß er ›irgendwie‹ den Grenzwert im Griff hätte. – Hat er aber nicht.

Nach der Ausbildung eines ordentlichen Grenzwert-Begriffs ist der Computer heutzutage unverzichtbar für Berechnungen aller Art in der Analysis und ihren Anwendungen, aber auch nützlich zum Erlebenlassen numerischer Effekte wie die oben genannten oder auch unterschiedlicher *Konvergenzgeschwindigkeiten,* z. B. bei den beiden Folgen $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ und $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$, nachdem man sich durch theoretische Argumentation von der Gleichheit ihrer Grenzwerte überzeugt hat.

10 Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

Ob man lediglich drei oder mit Hilfe des Computers drei Trillionen Glieder der Folge betrachtet; im Vergleich zu dem, was man jeweils hinter sich hat, hat man noch alles vor sich; und das, was man noch vor sich hat, wird (bei diesem Vergleich) nie weniger. Man kommt dem Grenzwert im topologischen Raum $\mathbb{R}$ zwar beliebig nahe, aber beim Durchlaufen der Folge (abgesehen von den künstlichen Fällen, wo der Grenzwert selbst Folgenglied ist) kommt man ihm keine Spur näher, weil er in der Folge gar nicht enthalten ist.

Daß hier *zwei Arten von Nähern* vorliegen, wird erst richtig durchsichtig, wenn man Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ auffaßt. Der Grenzwert ist ein Häufungswert der Wertemenge; aber er hat (abgesehen von den o. a. künstlichen Fällen) kein Urbild im Definitionsbereich $\mathbb{N}$, und es kann keine Rede davon sein, daß man sich ihm (via Urbild) durch irgendein Durchlaufen des Definitionsbereichs irgendwie nähert. Wenn jedoch eine Zahl ein Folgenglied ist, dann hat sie ein Urbild in $\mathbb{N}$, und wenn man sich ihr (via diesem) nähert, dann erreicht man sie auch in endlich vielen Schritten, und die Rede von einem Nähern ist erneut bedeutungslos. (Das weiter unten zu besprechende Paradoxon von ZENON beruht genau auf dem Konflikt zwischen dem Nähern in $\mathbb{N}$ und dem in $\mathbb{R}$.)

Die Auffassung von Folgen als Funktionen kann nicht am Anfang stehen. Aber sie sollte schon ein Unterrichtsziel sein, zumal sie auf einer elementareren Begrifflichkeit beruht als mancher Sachverhalt, der den Schülern im Analysis-Unterricht später noch begegnen wird (z. B. die Ableitungsregel für die Hintereinanderausführung von Funktionen).

Mit dieser Auffassung wird auch klar, daß die Grenzwert-Eigenschaft einer Zahl bezüglich einer Folge gar nicht von der Abfolge der natürlichen Zahlen abhängt, sondern nur von der Wertemenge dieser Folge. Jede Folge, die aus einer gegebenen konvergenten Folge durch Permutation der Glieder hervorgeht, hat denselben Grenzwert wie diese. – Diese überraschende Tatsache stellt die Bedeutung der *dynamischen,* prozeßhaften, iterativen, algorithmischen (und was der Schlagwörter mehr sind) *Sichtweise vom Grenzwert* doch tiefgehend *in Frage.*

Solche Sichtweisen, die auf irgendeine Weise zeitliche Abläufe in die Mathematik bringen, wohnen dieser nicht von vorneherein inne (für diese Überzeugung muß man nicht Bourbakist sein), sondern es sind Anthropomorphismen (vgl. [11]), die ihr aufgeprägt werden, weil mit deren Hilfe sich (auch beim Mathematiker!) häufig geeignete GVV ausbilden lassen. Ihre Eignung steht aber nicht automatisch fest, sondern muß von Mal zu Mal geprüft werden; und beim Grenzwertbegriff fällt diese Prüfung negativ aus. Ist dieser jedoch einmal ordentlich ausgebildet, kommen sie durchaus wieder in Betracht.

11 Der Grenzwert als Abbildung aus der Menge der konvergenten Folgen nach $\mathbb{R}$

Auch in direktem Zusammenhang mit dem Grenzwert kommt funktionales Denken ins Spiel, nämlich wenn man ›lim‹ als eine Funktion aus der Menge der konvergenten Folgen nach $\mathbb{R}$ auffaßt und fragt: Was passiert im Wertebereich, wenn man den Definitionsbereich in gewisser Weise durchwandert bzw. Elemente des Definitionsbereichs verknüpft u. ä.?

Bekannte Vorschläge wie die Namensgebung ›Beiwert‹ o. ä. zielen darauf ab, diesen *Zuordnungscharakter* zum Ausdruck zu bringen. Aber ich meine, dieser Charakter sollte formal *expliziert* werden. Da wird nicht Formalismus um seiner selbst willen getrieben, sondern die Universalität des Funktionsbegriffs erfahren sowie die Grenzwertsätze strukturiert und Gleichungen durchsichtig gemacht, in denen ›lim‹ auftritt.

Schreiben Schüler solche Gleichungen auf, so herrscht häufig ein arges Durcheinander (vgl. [3] u. a.): Ob ›lim‹ vor einen Term geschrieben wird, fällt der Beliebigkeit anheim. Schon die Rede vom Term ist eigentlich nicht korrekt und trägt zur Verwirrung bei. Es sind *Folgen*, von denen da der *Grenzwert* gebildet wird, und dies sollte grundsätzlich in der Schreibweise zum Ausdruck gebracht werden, nämlich durch die Klammern. Etwa $\lim\left(\frac{14n^2+6n}{7n^2+5}\right)$ bedeutet ›Grenzwert der Folge $\left(\frac{14n^2+6n}{7n^2+5}\right)$‹. Streng genommen müßte noch ein weiteres Klammernpaar geschrieben werden, nämlich die Funktionsklammern, also $\lim\left(\left(\frac{14n^2+6n}{7n^2+5}\right)\right)$. Diese läßt man aber weg, und die übrigbleibenden sind die Folgenklammern.

Durch den sog. *Grenzübergang* werden Beziehungen zwischen Folgen zu Beziehungen zwischen Zahlen, etwa $\lim\left(\frac{14n^2+6n}{7n^2+5}\right) = \lim\left(\frac{14+\frac{6}{n}}{7+\frac{5}{n^2}}\right) = \frac{14}{7} = 2$. Die Rede vom Grenzübergang unterstützt FVV, wenn man dabei an das Ergebnis des Durchlaufens der Folge denkt; sie ist nur treffend als Bezeichnung für den Übergang von der Menge der konvergenten Folgen (Definitionsbereich) in die Menge der Grenzwerte (Wertebereich).

So ökonomisch eine lim-*Gleichungskette* wirkt, in die sämtliche Rechnungen hineingesteckt sind (z. B. die Herleitung der Produktregel für die Ableitung), so verschleiert sie oft, aufgrund welcher Beziehungen die einzelnen Gleichheitszeichen gelten. Meistens wird der Grenzübergang nur bei einer einzigen Gleichung gebraucht, und alle anderen sind algebraisch-arithmetischer Natur, die zwar auch zwischen Folgen, aber zunächst zwischen den Folgengliedern bestehen. Um dies zu betonen, sollte man vor dem Hinschreiben der lim-Gleichungskette zuerst diese elementaren Beziehungen fixieren (ein allgemeines Prinzip der Infinitesimalrechnung), etwa: Weil für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{14n^2+6n}{7n^2+5} = \frac{14+\frac{6}{n}}{7+\frac{5}{n^2}}$, deswegen ist . . ., wobei man die Gleichung $\frac{14}{7} = 2$ wohl nicht mehr extra vorher aufschreiben braucht.

12 Paradoxa

ZENON: Natürlich holt ACHILLES die Schildkröte trotz zehnfacher Geschwindigkeit nie ein, wenn der Abstand die Strecke beträgt, für die er 1 Zeiteinheit braucht und wir den Wettlauf zu den Zeitpunkten 1; 1,1; 1,11; 1,111; . . . beobachten: Der Einholzeitpunkt $\frac{10}{9}$ ist zwar Grenzwert dieser Folge, aber wird in ihr nicht erreicht. ACHILLES kommt der Schildkröte noch nicht einmal beliebig nahe, wenn wir z. B. als Zeitpunkte $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \ldots$ wählen. Diese Wahl der Zeitpunkte kann man sich als Drehen eines Films vorstellen, wobei zu jedem der gewählten Zeitpunkte ein Bild belichtet wird. Dabei wird das Prinzip der *Zeitlupe* verwendet: Die Abstände zwischen den Aufnahmen werden kürzer gemacht, hier: *immer* kürzer, und der Film dann mit konstanter Geschwindigkeit abgespielt. Im Film werden beide Läufer immer langsamer, der Einholzeitpunkt wird durch die Zeitlupe immer weiter hinausgezögert und bei beiden Filmen nie erreicht, egal wie lang man sie laufen läßt. In der realen Zeit und im Film bei vielen anderen Folgen von Zeitpunkten (es muß nur $\frac{10}{9}$ überschritten werden) überholt ACHILLES selbstverständlich die Schildkröte.

Zwischen 0 und $\frac{10}{9}$ gibt es eben überabzählbar viele Zeitpunkte, unter denen man sich nur abzählbar viele heraussuchen und diese als Folge auffassen muß, um den Effekt zu erreichen, daß man, wenn man diese Folge von Zeitpunkten (als Beobachter) durchläuft, nie den Zeitpunkt $\frac{10}{9}$ erreicht und damit nie die Situation, wo ACHILLES die Schildkröte einholt oder ihr gar voraus ist. Diese Folge von Zeitpunkten muß weder monoton sein, noch konvergent sein, noch gegen $\frac{10}{9}$ konvergieren, sie muß nur im halboffenen Intervall $[0; \frac{10}{9}[$ liegen.

Nun ist das schöne Paradoxon von ZENON fast ganz entblättert. Man braucht keinen Wettlauf, sondern nur ein Objekt, das sich vermöge der Funktionsgleichung $s = -10 + 9 \cdot t$ (wo s der Ort, t die Zeit und 9 die konstante Geschwindigkeit ist) gleichförmig geradlinig bewegt, und fragt dann, ob für ein $t < \frac{10}{9}$ der Ort $s(t) = 0$ erreicht werden kann. (Im Paradoxon ist s die Orts*differenz* und 9 die Geschwindigkeits*differenz* zwischen den beiden Läufern.)

Noch eklatanter ist das Beispiel des hüpfenden Balls, bei dem jeder beobachten kann, daß er nach endlicher Zeit liegen bleibt. Wenn man einmal alle Störeffekte der Realität und quantenphysikalischen Argumente ausschließt und nur eine geometrische Abnahme der Höhe (etwa mit dem positiven Faktor $p < 1$) und eine geometrische Abnahme der Zeit (etwa mit positivem $q < 1$) zwischen je zwei Bodenberührungen annimmt, so haben sogar noch viele S II-Lehramtsstudenten der Mathematik im Hauptstudium die Vorstellung, daß ein Ball, den ein Neandertaler hüpfen ließ, noch heute und in alle Ewigkeit hüpfen müßte, obwohl sie den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$ der geometrischen Reihe sehr wohl kennen.

Sie unterscheiden nicht zwischen der realen Zeit (die hier als ideales mathematisches Objekt auftritt und mit $\mathbb{R}$ identifiziert ist) und einer Zeit auf der Meta-Ebene, die beim *gleichförmigen* Durchlaufen der Folge, also von $\mathbb{N}$, vergeht (vgl. [11]). Auch bei diesem Beispiel hilft die Vorstellung von einer Filmaufnahme in Zeitlupe und erst recht eine gewisse Formalisierung: Selbstredend können in endlicher Zeit unendlich viele Vorfälle (Bodenberührungen) hintereinander geschehen: Wird die Gesamtzeit durch die Bodenberührungen in lauter Intervalle zerlegt und hat das erste die Länge 1 s sowie jedes folgende die 0,8fache Länge seines Vorgängers, dann ist in 5 s alles vorbei.

13 Zusammenfassung

Die beschriebenen Paradoxa oder auch die Gleichheit $0,\overline{9} = 1$ sind m. E.

Prüfsteine für wirkliches Durchschauen des Folgen- und des Grenzwertbegriffs. Wer meint, solche Probleme S II-Schülern nicht zumuten zu können, der kann mit seinem ganzen Analysis-Unterricht zu Hause bleiben, weil er den (meisten) Schülern damit die Fähigkeit zum infinitesimalen Denken abspricht. Daß fortgeschrittene Mathematikstudenten an solchen Problemen scheitern, wendet sich gegen die klassische universitäre Mathematik-Ausbildung, die bei aller Tiefe und formalen Gründlichkeit versäumt, GVV zu erzeugen, die angehende Lehrer und Mathematiker brauchen könnten.

Ich habe hier keine Didaktik von Folgen und Grenzwerten vorgelegt und auch die Literatur nicht systematisch gesichtet, sondern lediglich einen kleinen Ausschnitt erkenntnistheoretischer Fragen zu diesem Thema betrachtet. Allerdings erscheint mir dieser Ausschnitt für die Ausbildung infinitesimalen Denkens fundamental. Vielleicht müssen nicht alle angesprochenen Gesichtspunkte im Unterricht expliziert werden. Zumindest aber der Lehrer sollte volle Klarheit über sie haben, damit FVV nicht schon deswegen entstehen, weil er sie selbst hat und, ob er will oder nicht, sie mit seinen Äußerungen auf die Schüler überträgt.

Literatur

[1] P. Bender: Kritik der Logo-Philosophie. - JMD **8** (1987) 3-103.

[2] P. Bender: Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. - In: H. Postel - A. Kirsch - W. Blum (Hg.): Mathematik Lernen und Lehren. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel 1991.

[3] A. Bikner - W. Herget: Fehler im Analysisunterricht. - mathematiklehren **5** (1984) 54-57.

[4] W. Blum: Möglichkeiten und Grenzen des Computereinsatzes im anwendungsorientierten Analysisunterricht. - In: W. Walsch (Hg.): Kleincomputer und Mathematikunterricht. Halle & Wittenberg: Martin-Luther-Universität (1989) 106-114.

[5] W. Blum - G. Törner: Didaktik der Analysis. - Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983.

[6] R. B. Davis - S. Vinner: The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. - In: Journal of Mathematical Behavior **5** (1986) 281-303.

[7] E. Fischbein: Tacit Models and Mathematical Reasoning. In: For the Learning of Mathematics **9** (1989), Heft 2, 9-14.

[8] G. Herden - N. Knoche - U. Pickartz: Eine Untersuchung zur Diskussion über Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff. - JMD **4** (1983) 263-305 und JMD **5** (1984) 211-237.

[9] W. Herget: Konvergenz-Experimente mit dem Computer. - mathematiklehren **39** (1990) 49-56.

[10] H. Hering: Begriffsentwicklung und präformales Beweisen bei infinitesimalen Prozessen. - JMD **10** (1989) 123-140.

[11] J. J. Kaput: Mathematics and Learning: Roots of Epistemological Status. - In: J. Lochhead - J. Clement (Hg.): Cognitive Process Instruction. Research on Teahing Thinking Skills. Philadelphia: The Franklin Institute Press (1979) 289-303. □

Diskussion und Kritik

Zu »Energieänderung beim Einschieben eines Dielektrikums in das homogene Feld eines Plattenkondensators«

(O. Schmidt in MNU **43** (1990) 347-349)

Von Prof. Dr. Ulrich Köpf, Fachhochschule Offenburg, Badstraße 24, 7600 Offenburg

Ich stelle immer wieder fest, daß selbst Studenten der Elektrotechnik selten erklären können, wo beim Einschieben eines Dielektrikums in einen Plattenkondensator die fehlende Energie hinkommt.

Deshalb ist es sehr zu begrüßen, daß dieses Problem von O. Schmidt aufgegriffen wurde. Nach der Lektüre kam mir jedoch der Satz aus dem anschließenden Beitrag »Neues von der Wurfparabel« von Ch. Jäkel (MNU **43** (1990) 349-351) in den Sinn: *»Dieser elegante Lehrbuchbeweis hinterläßt leider bei meinen Schülern das unangenehme Gefühl, überlistet worden zu sein, denn so schlüssig er ist, nimmt er doch in keiner Weise Bezug auf das eigentliche Phänomen . . .«.*

Dabei ist es so einfach, das Auftreten einer Kraft an dem unteren Plattenrand in Abbildung 1 des Artikels als Folge der Krümmung der Feldlinien und/oder der Randinhomogenität anschaulich qualitativ zu erklären: Die Kräfte auf die positiven und negativen Enden der Dipole liegen nicht in einer Richtung bzw. die Dipole werden in die Richtung zunehmender Felstärke gezogen und beides liefert eine Kraft in y-Richtung.

Daß eine auf solchen Überlegungen aufbauende quantitative Berechnung ungeheuer schwierig ist, zeigt den Schülern dann umso deutlicher den großen Nutzen des Energiesatzes bzw. der Beziehung $F_y = \mathrm{d}W/\mathrm{d}y$ bei praktischen Rechnungen.

Schließlich verstehe ich nicht, warum der Autor die grundlegende Gleichung (1) nicht kurz ableitet; vielleicht so: der Kondensator besteht aus zwei parallel geschalteten Teilen $C = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} = \ldots$ mit dem Energieinhalt $W(y) = Q^2/(2C) = \ldots$ Die Differentiation $\mathrm{d}W/\mathrm{d}y = \mathrm{d}(Q^2/(2\,C))/\mathrm{d}y = F_y$ ist dann auch nicht mehr allzu schwierig.

Erwiderung von Otto Schmidt

Die Einwände von U. Köpf beziehen sich auf zwei Punkte:

1. Eine anschaulich-qualitative Erklärung für die Kraft auf das Dielektrikum wurde in meinem Artikel nicht gegeben.

2. Es fehlt eine kurze Herleitung der Formel (1).