Peter Bender, Paderborn

Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen

In: Helmut Postel, Arnold Kirsch & Werner Blum (Hsg.) (1991): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, 48–60

Es ist heute unbestritten, daß das Lernen von Mathematik ein *sozial vermittelter, konstruktiver Akt* des *Individuums* ist. Wenn diese Erkenntnis in didaktische Arbeiten und den Unterricht kaum Einzug gehalten hat, dann liegt das u. a. an dem engen Mathematikbild vieler Autoren und Lehrer, das sich bei Stoffdidaktikern genauso findet wie bei ihren Kritikern, nämlich: Das Entscheidende seien die abstrakten mathematischen Beziehungen zwischen abstrakten mathematischen Objekten sowie gewisse Kalküle; und intuitive, anschauliche, dynamische, operative, anwendungsorientierte Zugänge seien eben nur Zugänge, mit denen man sich diesem Eigentlichen mehr oder weniger gut nähert, geplant oder ungeplant.

In diesem Mathematikbild kann man zwar die Inhalte genau identifizieren und psychologischen Untersuchungen, Intelligenz-Simulationen auf dem Computer oder Darstellungen in Lehrbüchern gut zugänglich machen. Aber in ihm kommt es nicht auf *Sinn* und damit nicht auf die Konstitution von *Sinn* an, und es ist damit eigentlich nicht geeignet als Grundlage für Mathematikunterricht. Aber was sollte an seine Stelle treten?

Eine wesentliche Voraussetzung für das Treiben sinnhafter Mathematik sehe ich in der Ausbildung sogenannter *Grundvorstellungen und Grundverständnisse (GVV)* von den für einzelne Gebiete fundamentalen Begriffen; bzw. diese Herausbildung ist *selbst schon sinnhafte Mathematik*. Dieses Konzept habe ich bei *Heinz Griesel* (1971 – 1974; und in vielen Diskussionen) kennengelernt; auch von anderen Kasseler Kollegen wird es verwendet (z. B. Blum & Kirsch 1979; und früher). Bei Anwendung auf konkrete Inhalte ist es so gut wie selbst-erklärend. Zugleich ist es ein leistungsfähiges Paradigma für Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts; als „didaktisches Prinzip" formuliert: *Bilde in jedem Gebiet geeignete GVV aus.*

1. Zum Bestimmungswort ‚Grund'

Für das GVV-Konzept noch wichtiger als die Grundwörter ‚Vorstellungen' und ‚Verständnisse' ist das Bestimmungswort ‚Grund'. Es gibt dem Konzept seine Prägung auf mindestens drei Ebenen: *Allgemeine Verbindlichkeit, Verankerung in der Lebenswelt, fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet.*

Allgemeine Verbindlichkeit

In den USA und, abgeschwächt, in vielen westlichen Ländern ist seit einiger Zeit für den Mathematikunterricht das Meta-Ziel im Schwange, daß jeder Schüler „creates his own mathematics", als kurzschlüssige Konsequenz aus der eingangs genannten Erkenntnis. Das Wundermittel zur Verwirklichung dieses Ziels steht schon bereit: der Computer (wobei die Probleme der sozialen Vermittlung technokratisch umdefiniert werden, so daß sie der Computer nebenbei mitlöst; z. B.: Einer Klasse mit n Schülern werden höchstens n/2 Geräte zur Verfügung gestellt).

Es tritt hier das alte Dilemma der Unterrichtswissenschaften zutage, nämlich daß die Beachtung deskriptiver Ergebnisse aus den Bezugswissenschaften identifiziert wird mit deren Erhebung zu präskriptiven Normen für den Unterricht. Selbstredend ist dem Lernenden Gelegenheit zu geben zur eigen,köpfigen' Konstruktion seiner Begriffe; aber das bedeutet *nicht*, daß die Ausbildung individuell unterschiedlicher Begriffe zu *fördern* sei, sondern im Gegenteil: Als Lehrer muß ich mich darum bemühen, daß die entstehenden Frames (Schemata) nicht allzu sehr vom *epistemologischen Kern* der Begriffe abweichen.

Dieser Kern wiederum besteht keineswegs nur aus einer mathematischen Definition (insofern erscheint mir Vinners – z. B. 1983 – Gegensatzpaar „concept definition vs. concept image" zu eng), sondern aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, das in einem langen und verwickelten didaktischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß für das Lernen aufbereitet wird (siehe z. B. Bender & Schreiber 1985). Dieser Prozeß hat eigentlich nie ein Ende. Er ist zwar primär stofforientiert, muß aber auch Vermittlungsfragen beachten und hat daher eine ausgeprägt hermeneutische Natur. Insbesondere führt er (schon von seiten des Stoffes her!) nicht zu einem eindeutigen Begriff.

Was davon wiederum im Unterricht wirksam wird, hängt zunächst vom Lehrer ab: welche Begrifflichkeit er selbst zugrundelegt, welche verbalen und non-verbalen Äußerungen er macht, favorisiert bzw. ablehnt (z. B. die Ausschöpfung des Kreises durch eine Folge von Polygonen, verbunden mit der Redeweise „die immer mehr Ecken haben und *schließlich* zum Kreis werden", verstellt einen brauchbaren Grenzwertbegriff), welche Beispiele und Aufgaben er wählt usw., kurz: Welche GVV er entstehen läßt (wobei viele Lehrer diese häufig nicht unter bewußter Kontrolle haben).

Aus psychologischer Sicht stellt sich der epistemologische Kern (verkürzt ausgedrückt) als das Gemeinsame der Frames aller Beteiligten dar (vgl. etwa Dörfler 1988: 65). Jedoch auch bei diesem [Ver]ständnis bleibt m. E. das Ziel der möglichst weitgehenden Übereinstimmung der Frames mit ihm voll erhalten.

Zum kognitionstheoretischen und kognitionspsychologischen tritt noch ein *interaktionistisches* Argument. Was Krummheuer (1989) über die Veranschaulichung sagt, gilt analog für GVV: Sie sind erforderlich als sozial konstituierte „Formate", über die individuelle Argumentation konstruiert werden kann, welche wiederum in den sozialen Unterrichtsprozeß eingebracht werden kann.

Verankerung in der Lebenswelt

Selbst der Mathematiker bringt beim Mathematiktreiben seine Person, Anthropomorphismen und sonstige lebensweltliche Phänomene ins Spiel, wenn er davon redet, „wir betrachten . . .", „wenn n die natürlichen Zahlen durchläuft . . .", „für kleine x . . .", „und", „gleich" usw. (siehe, stellvertretend für viele, Kaput 1979). Erst recht für den Lernenden ist die Einbettung der Begriffe in irgendeine, möglicherweise wenig konkrete Form von lebensweltlichen Situationen eine unumgängliche Voraussetzung für deren Erwerb, da es ihm sonst nicht möglich ist, einen Sinn für das zu Lernende zu konstituieren. Hierfür sprechen sich viele Didaktiker aus (z. B. Davis & McKnight 1980, Fischbein 1989 u. v. a.); jedoch wird schon in den meisten didaktischen Entwürfen und erst recht in der Unterrichtspraxis weltweit diese Forderung kaum erfüllt.

Es sei ausdrücklich betont, daß in dem hier entwickelten Ansatz *Motivation* und *echte Anwendbarkeit* von Mathematik eher sekundäre Gesichtspunkte für diese Einbettungen sind, und zwar sowohl als deren Motiv, wie auch als deren Ziel.

Während die Verankerung in der Lebenswelt für die Idee der universellen Ideen der Mathematik im Sinne Schreibers (1983) eine ontologische Konstituente darstellt, ist sie in bezug auf das GVV-Konzept zwar auch entscheidend, aber nicht als epistemologischer Teil des jeweiligen Begriffs, sondern als didaktisches Mittel, das den Begriff dem Individuum (psychologisch) zugänglich macht.

Daher ist der Lehrende recht frei in der Konstruktion lebensweltlicher Situationen, in denen er die GVV entfalten kann. Diese müssen im Zeitalter des Fernsehens, Autos, Flugzeugs, Telefons usw. keineswegs dem direkten Erfahrungsbereich des Lernenden entstammen; im Gegenteil: Würde man sich auf diesen beschränken, begäbe man sich erfolgversprechender didaktischer Möglichkeiten. Die Situationen können durchaus märchenhafte Züge annehmen; platter Realismus ist nicht unbedingt gefragt; man benötigt Menschen, Tiere und Gegenstände, die mehr oder weniger stark anthropomorphisiert und, unabhängig davon, mehr oder weniger stark mathematisiert sind. Diese müssen irgendwie, nach durchaus willkürlichen Regeln agieren, dabei vielleicht irgendwelche willkürlichen Vorhaben verfolgen und willkürlich Natur- und andere Gesetze beachten, oder auch nicht.

In einem Unterricht zur Integralrechnung habe ich als GVV für die *Flächeninhalts-Funktion* folgende Metapher verwendet: Die 1. Achse ist eine befestigte Straße. Oberhalb von ihr befindet sich ein gleichmäßig nasser Sumpf, der durch die Straße und den Graph der zu integrierenden Funktion begrenzt ist. Auf der Straße fährt ein Entwässerungs-Fahrzeug ab einer bestimmten Stelle nach rechts. Es hat über dem Sumpf senkrecht zur Fahrtrichtung einen hinreichend langen Arm ausgefahren, mit dem es über einen (im Prinzip uninteressanten Mechanismus) den Sumpf *ent*wässert. Es führt einen Behälter mit sich, in dem das Wasser gesammelt wird. An jeder Stelle des Wegs ist die Höhe des Wasserspiegels im Behälter ein (Längen-)Maß für die bis dahin überstrichene Fläche.

Kommt man nun an Stellen, wo die Funktion negativ ist, dann muß die Metapher erweitert werden: Unterhalb der 1. Achse liegt Wüste, ebenfalls durch die Straße und den Funktionsgraph begrenzt; und diese wird mit Hilfe eines zweiten Arms senkrecht zur Fahrtrichtung, jetzt über der Wüste, *be*wässert. Nach wie vor ist die Höhe des Wasserstands im Behälter an jeder Stelle ein Maß für die überstrichene Fläche. Wie immer muß auch hier äußerste methodische Sorgfalt walten, wenn etwa der Graph der Integralfunktion (die lotrecht gedachte Höhe des Wasserstands in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg) in dasselbe Koordinatensystem eingezeichnet wird wie der Graph der ursprünglichen Funktion, der Teil einer (waagrechten) Landkarte ist.

Die Metapher bleibt nicht durchgehend ohne weiteres stimmig: Man braucht Hilfskonstruktionen, z. B. wenn der Behälter voll (leer) geworden ist und noch mehr Sumpf zu ent- (Wüste zu be-)wässern ist. Oder: Die Wüste muß *im gleichen Maß be*wässert werden, wie der Sumpf *ent*wässert wird. Und: Geht man von der Anfangsstelle aus nach links, hat man die Wüste oben und den Sumpf unten, was sogar wieder mit einer 180-Grad-Drehung des Fahrzeugs zusammenpaßt. Wenn man jedoch schließlich die Anfangsstelle variiert, muß man auch die Rollen von Wüste und Sumpf variabel lassen; und da endet die Leistungsfähigkeit der Metapher.

Es ist ja auch gar nicht ihre Bestimmung, komplett durchgehalten zu werden. Sie ist vielmehr ein Vehikel zur Plausibilisierung der Umwandlung von Flächeninhalt in Länge und von negativen Flächeninhalten und damit ein Appell an den *gesunden Menschenverstand* (ein von Kirsch mit Erfolg didaktisch verwendeter Ausdruck). Dann ist es geradezu notwendig, die Grenzen der Metapher herauszupräparieren, damit der gesunde Menschenverstand durchgehalten werden kann. Genau aus diesem Grund ist auch der Eindruck zu vermeiden, als ob es hier um echte Anwendungen der Mathematik ginge. Solche können schon einmal als angenehme Zugabe auftreten; meistens erhält man sie aber nicht auf so billige Weise; und das sehen Schüler (mit gesundem Menschenverstand) auch so.

In den Didaktiken der Naturwissenschaften haben Metaphern eine breite Tradition (s. z. B. Gentner & Stevens 1983), die wir uns für die Mathematikdidaktik nutzbar machen können. Wir hatten es in der *historischen* Genese der mathematischen Begriffe und haben es in einer *didaktisierenden* Genese wohl etwas einfacher, weil unsere Begrifflichkeit sich nicht bzw. nur vermittelt auf reale Naturerscheinungen bezieht. Das zu Erklärende ist eben nicht Teil der Lebenswelt, so daß Lernende eher bereit und in der Lage sind, eine auftretende Unstimmigkeit in einen auszubildenden Frame *adäquat* einzuarbeiten, d. h. den Frame so zu erweitern, daß sich die Unstimmigkeit auflöst.

Im diskutierten Beispiel bedeutet das, daß man Flächeninhalts-Messung und Uminterpretation in Längen auch ohne die Wässerungs-Metapher durchführen kann und negative Flächeninhalte mit negativen ‚Grundseiten' oder ‚Höhen' erklärt. Ich meine, daß die geometrische Veranschaulichung und auch die Aktion des Flächenmessens nach wie vor ausgeprägt lebensweltliche Elemente hat und deswegen nach wie vor GVV für das Integral darstellen. Auch wenn man ihnen den direkten lebensweltlichen Bezug abspricht, so ist wenigstens eine *Verankerung* in der Lebenswelt (etwa über die o. a. Metapher) immer noch gegeben.

Fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet (epistemologisch und psychologisch)

GVV dienen nicht bloß als Aufhänger zur Einführung eines Teilgebiets, vielmehr sollen sie den Grund legen für eine kontinuierliche, oder auch nur sporadische, inhaltliche Interpretation der weiter zu entwickelnden Begrifflichkeit (die auch Sätze, Regeln, Verfahren usw. umfaßt). Die GVV liefern damit zusätzlich zur fachlichen Systematik, aber durchaus in engem Zusammenhang mit dieser, eine etwas informellere Struktur, die den Schülern die Konstruktion adäquater Frames erleichtern soll, indem sie einerseits den Aufbau des Gebiets festigt, andererseits Möglichkeiten zu intuitivem, divergentem, assoziierendem Denken eröffnet und zugleich kanalisiert.

Allerdings entwickeln sich die erwünschten (oder überhaupt irgendwelche) Frames keineswegs von selbst. – Für die Schematisierung von mathematischen Operationen aus *Handlungen* hat man in der westlichen Mathematikdidaktik in naiver Adaption der Arbeiten Piagets zur Entwicklung der Intelligenz ja zunächst einen solchen Automatismus unterstellt. Auch als man wieder die Möglichkeit zum Einwirken durch Unterweisungen zu akzeptieren begann, stellte man sich eine solche Entwicklung als zwar beeinflußbaren, aber dennoch monodirektionalen Verinnerlichungsprozeß vor.

Das Problem, *wie* diese Verinnerlichung eigentlich vor sich geht, wurde von Dörfler (1988) analysiert: Er sieht „das mathematische Konstrukt [...] als nicht [...] aus der Handlung herauslösbar [...], sondern es tritt konstruktiv-integrativ zu ihr hinzu" (S. 55). Einerseits ist die reine mathematische Beziehung selbst nicht wahrnehmbar, sondern muß mit Hilfe der Handlung(svorstellung) erschlossen werden, andererseits steuert ihre Antizipation die Handlung(svorstellung) durch Aktivitäten wie die *Interpunktion* (eine Art Setzen von Marken), die *Fokussierung* oder auch *Verlagerung der Aufmerksamkeit* (S. 74 f). Dies ist dann wieder auf der Basis von stärker mathematisch elaborierten ‚Handlungen' möglich, so daß man an einen hierarchischen Aufbau denken kann (S. 122; vgl. oben das Beispiel zur Integralrechnung).

Diese Theorie läßt sich m. E. wörtlich auf das GVV-Konzept übertragen: Handlung(svorstellung-)en sind sowieso ein wesentliches inhaltliches Element von GVV, und der Gültigkeitsbereich des Ansatzes könnte durch die Aufhebung der Beschränkung auf dieses Element in natürlicher Weise abgerundet werden.

2. Zu den Grundwörtern ‚Vorstellungen' und ‚Verständnisse'

‚Vorstellungen' und ‚Verstehen' sind zwei zentrale psychologische Konstrukte, über die es eine umfangreiche Literatur gibt, die zum Teil auch von der Mathematikdidaktik adaptiert wurde. Die beiden Konstrukte werden von verschiedenen Autoren unterschiedlich verstanden, insbesondere entziehen sie sich einer verbindlichen, einigermaßen scharfen Definition. Bei entsprechend enger Auffassung erscheinen sie einem nutz- bis sinnlos; siehe z. B. die Einwände von Pylyshyn (1973) gegen den Begriff „mental imagery", jedoch auch die Erwiderung von Kosslyn & Pomerantz (1977).

Tonangebende Vertreter der modernen Kognitions*theorie* stehen den beiden Konstrukten reserviert gegenüber, insbesondere weil ihre Formalisierung und Implementation auf dem Computer problematisch sind. Mit dem Paradigma von der mensch-unabhängigen, d. h. a-psychischen Kognition sind wohl gewisse Erfolge bei der Erklärung menschlicher Intelligenzleistungen zu verzeichnen. Aber für Konstrukte wie ‚Lebenswelt', ‚soziale Vermitteltheit', ‚Vorstellungen' usw., die mir im Rahmen des GVV-Konzepts wichtig sind und die ich für ausschlaggebend zumindest in didaktischen Situationen halte, fehlt jedenfalls der computer-orientierten Kognitionstheorie der Sinn, und sie werden zunächst von ihr ausgegrenzt. Damit steht diese moderne Richtung der Intelligenzforschung dem GVV-Konzept recht fern.

Die nun folgende Diskussion dieses Konzepts bewegt sich nur z. T. in psychologischen Kategorien; sie trägt von vorneherein auch didaktische Züge. Nähert man sich den beiden Konstrukten ‚Vorstellungen' und ‚Verständnisse' definitorisch (s. u.), dann scheinen sie wenig miteinander zu tun zu haben. Man kann sie aber unter verschiedenen Gesichtspunkten aufeinander beziehen, und die Quintessenz schließlich ist, daß sie im GVV-Konzept untrennbar verbunden sind. Die Rede von Grundvorstellungen und -verständnissen soll diese Integration zum Ausdruck bringen und nicht etwa eine Einteilung vorgeben.

Vorstellungen und Anschaulichkeit

Mit ‚*Vorstellungen*' bezeichnet man traditionell (innere) anschauliche Repräsentationen eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewußten Prozessen aktiviert werden. Dabei wird ein solcher Prozeß auf einen bestimmten Sinn hin organisiert, den der Vorstellende schon als Ziel mit einbringt (siehe Bosshardt 1981). Dieser konstituierende Beitrag von Sinn weist bereits darauf hin, daß Vorstellen ohne Verstehen (!) unmöglich ist.

Zwar ist *Anschaulichkeit* ein wesentliches Merkmal von Vorstellungen, und auf diese stellt man in der Didaktik schon immer sehr intensiv ab, aber das GVV-Konzept geht darüber hinaus:

Eine alte Dichotomie in der Psychologie ist die Einteilung des Denkens in einen *bildhaften* (allgemeiner: *analogen*) und einen *verbalen* (allgemeiner: *propositionalen*) Modus, die von Paivio (z. B. 1971) und anderen theoretisch aufgearbeitet wurde. Aufgrund neuropsychologischer Forschungen findet man eine Entsprechung in der asymmetrischen Funktionsweise der beiden Hirnhälften des Menschen: Die eine ist mehr zuständig für räumliches, globales, divergentes usw. Denken in Bildern, die andere für kausales, analytisches, konvergentes usw. Denken in Propositionen (vgl. Wachsmuth 1981).

Die beiden Denkmodi können unabhängig voneinander wirken. Das kann so weit gehen, daß jemand Widersprüche nicht bemerkt, weil die Informationen in verschiedenen Modi kodiert sind, oder gerade deswegen Widersprüche sieht, wo keine sind. Viele mathematische Paradoxien sind lediglich solche scheinbare Widersprüche. Für jeden der beiden Modi gibt es Anlässe, in denen er verstärkt eingesetzt wird, Frames, die vornehmlich an ihn gebunden sind, und Menschen, die ihn bevorzugen. Zugleich bestehen Beziehungen zwischen den beiden Modi: bildhafte Vorstellungen können oft verbal, Propositionen oft analog gefaßt werden.

Für das Lernen von Mathematik ist eine dauernde Übersetzung zwischen diesen Modi wesentlich. Man behandelt vielleicht die Geometrie überwiegend bildhaft, die Algebra überwiegend verbal und kommt eventuell sogar dazu, Rücksicht auf die Präferenzen einzelner Schüler zu nehmen. Aber zum Zwecke der Stabilisierung der Frames und deren Flexibilisierung gehört auch die Arbeit im jeweiligen anderen Modus.

Bei der weltweit verbreiteten Weise, Mathematik zu unterrichten, heißt das pauschal: Es muß mehr *veranschaulicht* werden. Das ist ein mühsames Geschäft; Veranschaulichungen und vor allem ihre Harmonisierung untereinander und mit bereits vorhandenen Frames sind aufwendiger Lernstoff. Die Rede vom Zugänglichmachen von Begriffen durch Veranschaulichung trifft nach wie vor zu, allerdings nicht aufgrund eines naiven Glaubens an eine Erleichterung, sondern auf der Basis der erforderlichen *größeren Anstrengung*.

Der Einwand, daß Veranschaulichungen häufig zu Verfälschungen führen oder die Strenge im Mathematikunterricht konterkarieren, hat dieselbe Wurzel wie der Glaube, daß sie das Lernen „verbilligen" könnten: nämlich das verbreitete epistemologische und didaktische Mißverständnis, daß mathematische Begriffe identisch mit ihren mathematischen Definitionen und daß diese zusammen mit den einschlägigen Aussagen das Eigentliche seien. Wenn man nicht gerade einen solchen extremen logizistischen Standpunkt einnimmt (der nach meinem Dafürhalten für die allgemeinbildende Schule völlig ungeeignet ist und diese mangelnde Eignung auch schon demonstriert hat), müssen Anschaulichkeit und Strenge sich überhaupt nicht gegenseitig ausschließen, wie z. B. Blum & Kirsch (1979) überzeugend dargelegt haben.

In der Tat liegt beim GVV-Konzept ein gewisser Akzent auf dem analogen Modus. Man könnte die Rolle der GVV in einer Art prophylaktischem Gegengewicht gegen ein später stärker propositionales Vorgehen sehen. Allerdings haben GVV auch eine verbale Ausprägung. Wenn im Unterricht GVV aufgebaut werden, so wäre das schon fast eine Kunst, dies non-verbal zu tun, und mehr noch: Die dabei vom Lehrer (und von den Schülern!) zu verwendenden Worte sollen ja nicht nur die äußerliche Konstruktion und Exploration der GVV leiten, sondern zugleich die zugrundeliegenden Begriffe und deren Beziehungen wiederspiegeln.

Verständnis und Verstehen

Je nachdem, auf welchen Gegenstandsbereich es sich bezieht, hat ‚*Verstehen*' unterschiedliche Bedeutung: Man kann

(1) *Menschen, Handlungen, Situationen* verstehen, etwa die Motive, Ziele usw. der Beteiligten (praktische Menschenkenntnis, gesunder Menschenverstand);
(2) *Äußerungen medial* bzw. *formal* verstehen (Lautstärke, Fremdsprache);

(3) *Äußerungen inhaltlich* verstehen (bei Mitteilungen, Texten, Wendungen, Wörtern, Symbolen, Zeichnungen usw. das Gemeinte);
(4) schließlich einen *Sachverhalt* verstehen (Sachverstand).

Zunächst ist (4) die zum GVV-Konzept gehörige Bedeutung. Zugleich ist klar, daß ebenso die anderen für das Lernen von Mathematik und auch für dieses Konzept eine Rolle spielen, insbesondere (3). Dieses Verstehen ist ein traditionelles Paradigma der Psychologie; man ist inzwischen nicht mehr der Meinung, daß es bloß im Auffinden einer objektiven Bedeutung von Zeichen besteht, sondern daß der Verstehende den Äußerungen einen Sinn verleiht, indem er sie in einen Zusammenhang stellt und dabei das Gemeinte zu rekonstruieren versucht (s. Engelkamp 1984), womit er in die Nähe von (1) gerät.

Eine Voraussetzung für das Verstehen (3) ist trivialerweise (2), nämlich eine gemeinsame Sprache von Sprecher (i. w. S.) und Hörer, und zwar auch im übertragenen Sinn (Vorhandensein eines „common ground", also (1), in Anlehnung an Clark & Carlson 1981). Neben Juristen und Verwaltungsbeamten sind es viele Mathematiklehrer, bei denen der „common ground" (die Verständigungsgrundlage) mit ihrer Klientel nur schwach ausgeprägt ist: Die Probleme fangen an mit dem Verstehen von Lehrerinstruktionen (s. Maier 1988), setzen sich fort mit den Konflikten zwischen Umgangs- und Fachsprache (s. Winter 1978) und gehen bis zum völligen Unverständnis vieler Schüler für das Beweisen (s. Wittmann & Müller 1988).

Verbreitern der Verständigungsgrundlage heißt aber nicht nur Annäherung der Schüler an den Lehrer durch Belehrung, sondern zunächst einmal, daß der Lehrer sich auf die Schüler einzulassen hat: angefangen in seiner eigenen Ausbildung, der die Stofflastigkeit zu nehmen ist, über ein Verstehen der Schüler als Menschen, d. h. (1), bis hin zum Nachvollzug bzw. zur Vorwegnahme der Verstehensakte der Schüler. Das GVV-Konzept kann *hierzu* einen heilsamen Zwang ausüben (und darüber hinaus den *Sach*verstand (4) des Lehrers fördern). Allerdings ist es für beide Seiten anstrengender, als sich, wie weit verbreitet, mit einem bloß instrumentellen Verständnis (im Sinne Skemps 1976) zufriedenzugeben.

Vorstellungen und Verständnisse im Unterricht

Wenn man annimt, daß der Mensch das ständige Bestreben hat, die ihn umgebende Welt als sinnvoll aufzufassen bzw. sich seine Welt sinnvoll zu machen und sinnvoll zu erhalten (Streben nach „Sinnkonstanz" im Sinne von Hörmann 1976; m. E. das Charakteristische für den Menschen, das in Piagets biologistischen Äquilibrationsansatz zu kurz kommt), dann wirkt der weithin übliche Mathematikunterricht geradezu kontraproduktiv.

Selbstverständlich versuchen die von ihm betroffenen Menschen, sich auch ihn sinnvoll zu machen. Im *Extrem*fall versteht (in dem bekannten französischen Film gleichen Titels von 1984) der algerische Schüler in Paris im (Physik-)Unterricht „der Tee im Harem des Archimedes", wenn er „le théorème d'Archimède" hört. Im *Normal*fall entwickeln die Schüler aber immer noch ihre eigenen Verständnisse und Vorstellungen, die jedoch meistens nur implizit zum Vorschein kommen. Fischbein (1989) nennt sie „tacit models" und beschreibt sie u. a. als simpel, lebensweltlich, robust, autokratisch und einengend.

Ihre *Robustheit* resultiert aus ihrer Einfachheit, ihrer Verankerung in der Lebenswelt und kurzfristigen Erfolgen in ihrem engen Anwendungsfeld. Ihre *Entstehung* verdanken sie dem Mangel an adäquaten GVV, die ja auch lebensweltlich, erfolgreich und daher robust wären, aber gerade keinen autokratischen Charakter hätten und nicht einengend, sondern ausbaufähig wären.

Es ist zwar einiges an Literatur zur *Diagnose* von Fehlvorstellungen und -verständnissen vorhanden. Diese hat sich aber in der Schulpraxis kaum niedergeschlagen. Erfolgreiche systematische *Therapie*-Bemühungen beziehen sich durchweg auf den Primarbereich, und dort vor allem auf *extreme* Abweichungen von erwünschten GVV.

Das GVV-Konzept ist eine solche Therapie, indem mit ihm nämlich versucht wird, die unweigerlich entstehenden Vorstellungen und Verständnisse gleich in die „richtigen" Bahnen zu lenken, d. h. die Frames von vorneherein mit adäquaten GVV zu besetzen. Jedoch werden sich auch bei einer dezidierten Befolgung dieser Strategie noch genügend viele Fehlvorstellungen und -verständnisse ausbilden, so daß Reparatur-Verfahren keineswegs überflüssig sind.

Fischbein (1989) schlägt z. B. vor, daß die Schüler ihre „tacit models" „metakognitiven" Analysen unterziehen. – Selbstredend ist es sinnvoll und notwendig, die mathematischen Inhalte aufeinander zu beziehen; solche und ähnliche Meta-Betrachtungen (die Fischbein u. a. mit seinen Analysen meint) gehören zum Stoff und sind schwierig genug. Aber wenn es wirklich um (meta*kognitive*) Analysen der eigenen Kognition und der der Mitschüler als Unterrichtsstrategie geht, halte ich Schüler auf allen Altersstufen für glatt überfordert (vgl. meine diesbezügliche Kritik an der Logo-Philosophie; Bender 1987: 36 f).

Gewiß kommen im Unterricht Verstehensakte auch auf einer Meta-Ebene vor, nämlich z. B. wenn die Schüler die Absichten des Lehrers zu erschließen versuchen, also ihr Verstehen sich nicht auf den Inhalt seiner Äußerungen, sondern auf seine Motive und Ziele richten. Allerdings ist dieses Verstehen (1) wiederum i. a. kaum reflektiert. Ansonsten ist es ein Wesensmerkmal didaktischer Situationen, daß es um das Verstehen von etwas Gemeintem geht (3), sei dieses verbal oder non-verbal gegeben, zum Zwecke der Ausbildung von Sachverstand (4), der sich in geistes- und sozialwissenschaftlichen Fächern wiederum auf Motive und Ziele von Menschen beziehen, dort also zugleich Verstehen (1) sein kann. Sogar der mathematische Sachverstand steht letzten Endes auch im Dienste einer Erziehung zum Verstehen (1) der sozialen (i. w. S.) Welt.

Faßt man mit Seiler (1984) das Verstehen als Ausbildung bzw. Aktivierung von begrifflichen Strukturen (Frames), Einordnen in diese Strukturen und deren mögliche Veränderungen auf, dann wird die Unterscheidung von (3) und (4) unwesentlich, jedenfalls was das Objekt des Verstehens betrifft: Das in Lehrer-, Schulbuch- oder Mitschüler-Äußerungen Gemeinte sind gerade die Begriffe (i. w. S.), deren Erwerb den mathematischen Sachverstand ausmacht. Mit den dabei ausgebildeten Frames wiederum ist das Gemeinte in solchen Äußerungen, Fragen, Problemen zu erschließen.

Ein Unterschied zwischen Verständnis (als Verstehen (4)) und Verstehen (3) ist aber doch bedeutsam: Verständnis ist das Produkt von Verstehen; Verstehen ist der Erwerb von Verständnis. Produkt und Erwerb sollen hier zwar nicht allzu scharf getrennt werden: Das Produkt wird i. a. immer wieder u. a. durch weitere Verstehens-Akte verändert und ist immer wieder Grundlage für ebensolche.

Mit ihrem Charakter des Ergebnishaften erscheinen *die Verständnisse in einer engen Wesensverwandtschaft mit den Vorstellungen.* Tendenziell sind diese stärker analog, jene eher propositional ausgerichtet. Zusammen gehören sie zum GVV-Konzept: *Verständnis ist nicht ohne Vorstellungen, und Vorstellungen sind nicht ohne Verständnis möglich.*

3. Einige Merkmale von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – erläutert an Beispielen

Geläufig sind GVV für die Zahlbegriffsbildung und das elementare Rechnen (s. Griesel 1971–1974): Multiplikation als wiederholte Addition (s. die Analyse von Dörfler 1988), Division als

Auf- und Verteilen, Brüche, negative Zahlen, Prozentrechnen, Funktionen als Maschinen, Flächeninhalte von Rechtecken durch Auslegen mit Quadraten usw. – Diese Beispiele zeigen deutlich, daß GVV nicht an primitive, nicht-quantifizierte Handlungen gebunden sind (wie z. B. das intuitive Verstehen bei Herscovics & Bergeron 1983), und zwar schon im Primarbereich. Es handelt sich bei ihnen nicht um mathematische Propädeutik, Prämathematik o.ä., sondern um Mathematik (i. w. ohne Kalkül mit Symbolen). Diese Einsicht entspricht leider nicht dem Verständnis und den Vorstellungen vom Mathematikunterricht vieler Didaktiker und Lehrer.

Nach der theoretischen Einordnung soll nun anhand einiger Beispiele das GVV-Konzept konkretisiert werden. Die Merkmale, die dabei diskutiert werden, sind zunächst einmal *deskriptiv* zu verstehen. Natürlich wohnt ihnen auch ein normativer Charakter inne (z. B. *sachliche und psychologische Adäquatheit, Ausbaufähigkeit*). Aber es soll hier kein Algorithmus zur Aufstellung von GVV entwickelt werden (wie man es beim Problemlösen mit Hilfe von Pólyas Strategien versucht hat). Dazu sind die theoretischen Grundlagen nicht mit hinreichender Operationalität faßbar und einige der Merkmale zu trivial, andere zu speziell und unverbindlich, die meisten auch zu vage.

Hier liegt allerdings nicht etwa ein Mangel infolge Unausgereiftheit des GVV-Ansatzes vor, sondern Vagheit ist charakteristisch für ihn und entzieht ihn einer Algorithmisierung. In dieser Vagheit liegt wohl auch die Ursache, warum die Mathematikdidaktik sich dieses Ansatzes bisher so gut wie nicht bemächtigt hat. Wir sollten uns unsere Paradigmen aber nicht nur danach aussuchen, wie leicht sie formalisierbar sind.

Einige Merkmale von GVV

Eine wichtige Rolle spielen *Metaphern*. Dabei kommt es jetzt nicht auf eine genaue Bestimmung dieses Begriffs an, wie sie z. B. Steiner (1988) vorgenommen hat (vgl. auch die Gegenüberstellung von Metaphern und Metonymien von Bauersfeld & Zawadowski 1982). GVV können durchaus auf *echte Anwendungen* aufbauen (z. B. bei geometrischen Formen; s. Bender & Schreiber 1985). Echte Anwendungen sind fraglos ein konstituierender *Teil des Mathematikunterrichts*. Aber ihre Eignung für GVV ist nicht selbstverständlich, weil die ihnen innewohnenden Sachstrukturen die mathematische Begrifflichkeit überlagern und deren psychologische Grundlegung stören können.

Metaphern (bescheidener: *Einkleidungen*) sollen eine gegebene Begrifflichkeit *sparsam* abbilden und sie insbesondere *nicht verkomplizieren oder verdunkeln* wie etwa in folgendem Beispiel: Klare kinematische GVV für den Inkreis eines Dreiecks erhält man, indem man in die Nähe einer Ecke einen kleinen Kreis zwischen die beiden anliegenden Seiten klemmt und den Kreis dann aufbläht mit der Bedingung, daß er die beiden Seiten fortwährend berührt. Beim Größerwerden bewegt er sich notgedrungen von der Ausgangsecke weg, und wenn er an die dritte Seite stößt, ist der Endzustand erreicht; dasselbe kann man ebenfalls mit den beiden anderen Ecken als Ausgangsecken durchführen (s. Bender 1989: 121). Schönwald (in seiner umfangreichen, fantasievollen und größtenteils instruktiven Sammlung „alltagsanschaulicher Beweise"; 1989: 218) *verdunkelt* diesen Sachverhalt nun zu „ein[em] Eishörnchen mit mehreren sich durchdringenden Eisbällchen" mit „ein[em] ebene[n] Schnitt durch das kegelförmige Hörnchen, der die Rotationsachse enthält" und „deutet" schließlich auch noch „von den beiden anderen Ecken aus das Dreieck als Hörnchen – wenn auch mit sonderbaren Proportionen".

Schon *gar nicht* sollten GVV die Begrifflichkeit *verfälschen* wie z. B. in der Logo-„Philosophie" (i. e. S.), in deren Geometrie die GVV der Kinder vom Kreis als verschmiertes 360-Eck ausgebildet werden. Anhänger dieser „Philosophie" ziehen sich zwar darauf zurück, daß die Logo-Geometrie eben eine andere sei, die euklidische Geometrie keineswegs den Primat habe und die Idee der

Homogenität sich auch beim Logo-Kreis zeige. Aber zugleich legt man doch Wert darauf, daß der Logo-Kreis wie ein gewöhnlicher Kreis aussieht, und: seine endliche Symmetrie ist etwas wesentlich anderes als die vollkommene Homogenität des euklidischen Kreises. Der Verweis schließlich auf die Differentialgeometrie, für die hier der Grund gelegt würde, ist abwegig (s. Bender 1987: 16ff).

Im derzeitigen realen Mathematikunterricht sind viele GVV der Schüler nicht mit der kanonischen (oder wenigstens: einer üblichen) Begrifflichkeit vereinbar. Dafür sind die Schüler keineswegs allein verantwortlich: Häufig genug werden ihnen keine oder keine angemessenen Möglichkeiten zur Ausbildung von GVV geboten. So bleiben sie z. B. bei der einmal erworbenen, in der Primarstufe durchaus adäquaten Auffassung, daß beim Multiplizieren ein Wert vergrößert wird. Diese dominante, weil tief verwurzelte und lange erfolgreiche, Auffassung zu beseitigen bzw. zu relativieren, ist dann anläßlich der Bruchrechnung im 6. Schuljahr keineswegs einfach, zumal mancher Lehrer nun sowieso die Notwendigkeit der Ausbildung oder wenigstens Revision von GVV nicht mehr sieht und sich gern auf symbolische Kalküle zurückzieht.

Man muß Abschied nehmen von dem Ideal einer einheitlichen Begrifflichkeit vom Primar- bis in den tertiären Bereich. Man kann in der Primarstufe die Schüler nicht dafür sensibilisieren, daß beim Multiplizieren auch Werte verkleinert werden können (die Multiplikation mit 0 liefert dies nicht hinreichend klar, kann aber wenigstens stutzig machen), und etwaige Vorbereitungen auf differentialgeometrisches Denken sind für sie nichtssagend. Wie weit man *schülergemäße Begriffs-Modifikationen* in Kauf nehmen kann, läßt sich nicht pauschal angeben. Man muß sie als Lehrer bei der Planung und Ausbildung von GVV zunächst wahrnehmen und dann prüfen, ob sie unvermeidbar sind, ob sie überhaupt schädlich sind bzw. wie sie gegebenenfalls später revidiert werden können.

Funktionales Denken und GVV

Als vor etwa zwanzig Jahren *Abbildungsgeometrie* für den Unterricht propagiert wurde, unterstellte man, daß *reale Bewegungen* mit realen Körpern den Schülern als GVV dienen könnten. Der weitreichende Mißerfolg dieser Unternehmung geht darauf zurück, daß SI-Schüler diese GVV in der Tat gut ausbilden und sie bequem auf die Bewegung mathematischer Objekte (Teilmengen der Ebene als Punktmenge) erweitern, daß aber die erforderliche Abstraktion von der Bewegung kaum gelingt. Dies liegt daran, daß die Bewegungs-GVV so stabil sind, daß die gutgemeinten Aufforderungen wirkungslos bleiben, sie etwa durch Fokussierung der Aufmerksamkeit auf Anfangs- und Endlage von Figuren zu überwinden oder die Aufmerksamkeit auf die Ebene als Ganzes zu verlagern (vgl. Bender 1982).

Ganz beseitigen wollte man die „operativen Wurzeln" der geometrischen Abbildungen wohl auch wieder nicht, da diese ja unter positiv besetzten Schlagwörtern wie „bewegliches Denken", „dynamische Vorstellungen" u. ä. firmieren. Man hoffte, den statischen Abbildungsbegriff aufbauen zu können, ohne die Bewegungs-GVV zerstören zu müssen. Möglich war diese Hoffnung, weil eben eine Beschreibung bzw. Erklärung fehlte, *wie* eigentlich Handlungen (Bewegungs-GVV) zu Operationen „verinnerlicht" werden (s. Dörfler 1988).

Ein solcher grundsätzlicher Konflikt zwischen allgemein anerkannten GVV und dem zugehörigen elaborierten mathematischen Begriff ist eigentlich recht selten. Er hat im Fall der Abbildungsgeometrie dazu geführt, daß der elaborierte Begriff halbherzig, aber immerhin, zurückgedrängt wurde; jedoch möglicherweise nur deshalb, weil der Geometrie von vielen Lehrern sowieso keine große Relevanz zuerkannt wird.

Bewegungs-GVV sind übrigens auch und gerade in der *Kongruenzgeometrie* sehr nützlich. Dort spielt die genaue Form der Bewegungen i. a. keine Rolle, und diese intervenieren daher weniger bei der Ausbildung von Kongruenz-, Ähnlichkeits- und anderen Relationen.

Für *funktionale Betrachtungen* in der Geometrie und bei sonstigen Zusammenhängen braucht man einen abstrakteren Bewegungs-Begriff. Es geht dabei um die Frage: Was passiert im Wertebereich, wenn man den Definitionsbereich in dieser oder jener Weise durchwandert. Der metaphorische Charakter dieser Aktivität liegt auf der Hand: Es ist ein Raum zum Wandern da, und es wandert jemand oder etwas (die Variable); dessen Bewegungen werden mit einem nicht näher erklärten Mechanismus, der der Funktionsvorschrift entspricht, einer Art abstraktem Storchenschnabel, auf einen anderen Raum, den Wertebereich, übertragen. Mit Kronfellner (1987) meine ich, daß bei Funktionen dieser Abhängigkeits-Aspekt im Vergleich zum Zuordnungs-Aspekt stärker betont werden sollte.

Diese GVV von funktionalen Zusammenhängen beziehen sich nicht auf reale Bewegungen realer Objekte, sondern auf Punkte der Zahlengerade (als GVV von $\mathbb{R}$ in der Analysis) oder des Raums (oder der Ebene; in der Geometrie), die für Elemente entsprechender Mengen stehen. Diese Punkte bewegen sich nicht, sondern ihr *Zustand betrachtet zu werden* ändert sich mit einer, ebenfalls metaphorisch, eingeführten Zeit.

In der *Analysis* sind diese GVV zentral, und sie sind einfacher auszubilden als in der Geometrie. Probleme entstehen jedoch auch hier, z. B. dadurch, daß die Funktionen der Schulanalysis gern mit ihrem Graph im $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Dieser zieht als Verbildlichung der Funktion sowieso die Aufmerksamkeit auf sich; und er liefert konkret den Mechanismus, mit dem man aus den Wanderungen im Definitionsbereich die im Wertebereich erhält. Aber zugleich verleitet er zum Verkürzen dieses Mechanismus; und statt Wirkungen im Wertebereich werden solche auf dem Graph betrachtet.

In der *Geometrie* sind solche Analysen leider unüblich. Bei Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen sind sie in der Tat unergiebig, und bei vielen interessanten funktionalen Abhängigkeiten (s. etwa Bender 1989) gibt es keinen symbolischen Kalkül, bzw. er wäre abwegig, und so werden sie von vielen Lehrenden und infolgedessen von vielen Lernenden nicht ernst genommen.

Daß viele dieser geometrischen Funktionen (z. B. Flächeninhalt) auf (einer Teilmenge) der Potenzmenge operieren, erscheint mir weniger problematisch, aber oft macht (auch Lehrenden) die Synthese der GVV von realen Bewegungen mit dem Punktmengenbegriff doch Schwierigkeiten. Hierzu gibt es jedoch ebenfalls eine nützliche Metapher: Man faßt die sich bewegenden Objekte als *partiell starre Körper* auf, die auf die Ebene (den Raum) wie Stempel wirken, welche ihre *Bewegungsspur* hinterlassen. Wieder sind es nicht die Punkte, die sich bewegen, sondern ihr Zustand betrachtet zu werden. Diese GVV kann wiederum durch die Metapher vom *Computer-Bildschirm* unterstützt werden: Nicht die Pixel bewegen sich, sondern ihre Eigenschaft gefärbt zu sein.

Mathematik „dynamisch" zu sehen, entspricht ihren Anwendungen auf dem Computer, insgesamt dem Lebensgefühl der westlichen Welt und wohl auch ihrer Verankerung in GVV. Mathematik ist aber nicht von vorneherein dynamisch, sondern eigentlich ausgesprochen statisch, indem sie z. B. die Zeit einfach als weitere Variable vereinnahmt und sie damit sozusagen bannt. Zeitliche Abläufe sind Anthropomorphismen, die wir in mathematische Strukturen hineinsehen, damit wir in die Lage versetzt werden, diese mit Sinn zu erfüllen, was sie für GVV fast unentbehrlich macht. Daß „dynamische" GVV die Begriffsbildung auch stören können, hat sich schon bei den geometrischen

Abbildungen gezeigt. Ein weiteres Beispiel, *Zahlenfolgen und Grenzwerte*, wird in (Bender 1991) diskutiert.

Zu diesem und vielen anderen Gebieten wurden schon überzeugende (auch weniger überzeugende) Vorschläge für GVV entwickelt, besonders auch in der Stochastik. In der Literatur findet man sie in Hülle und Fülle, natürlich kaum unter dem Schlagwort ‚GVV'; und vermutlich gibt es darüber hinaus zahlreiche unveröffentlichte Beispiele, die lokal in Vorlesung und Unterricht eingesetzt werden. Bestimmt müßten viele besser reflektiert (und dann z. T. verworfen) werden, auch vor dem Hintergrund der hier vorgestellten Theorie, die ihrerseits keineswegs abgeschlossen ist.

iteratur

Bauersfeld, Heinrich & Wacek Zawadowski (1982): Metaphors and Metonymies in the Teaching of Mathematics. In: Michele Pellerey (Hrsg.): Proceedings of the 33rd CIEAEM's Meeting on Processes of Geometrisation and Visualization. Pallanza 1981, 51–60

Bender, Peter (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14, 9–24

Bender, Peter (1987): Kritik der Logo-Philosophie. In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 3–103

Bender, Peter (Hrsg.) (1988): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Berlin: Cornelsen

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Kautschitsch & Metzler (1989), 95–145

Bender, Peter (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. Erscheint in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 44

Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner

Blum, Werner & Arnold Kirsch (1979): Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV. Der Mathematikunterricht 25, Heft 3

Bosshardt, Hans-Georg (1981): Vorstellungen – Grenzgänger zwischen Wissenschaft und Alltagsverstand. In: Zeitschrift für Semiotik 3, 363–370

Clark, Herbert H. & Thomas B. Carlson (1981): Context for Comprehension. In: J. Long & A. D. Baddeley (Hrsg.): Proceedings of the International Symposium on Attention and Performance IX. Hillsdale, N. J. & London: Lawrence Erlbaum, 313–330

yis, Robert B. & Curtis McKnight (1980): The Influence of Semantic Content on Algorithmic Behavior. In: Journal of athematical Behavior 3, Heft 1, 39–87

Dörfler, Willibald (1988): Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In: Willibald Dörfler & Roland Fischer (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, 55–125

Engelkamp, Johannes (Hrsg.) (1984): Psychologische Aspekte des Verstehens. Berlin usw.: Springer

Fischbein, Efraim (1989): Tacit Models and Mathematical Reasoning in: For the Learning of Mathematics 9, Heft 2, 9–14

Gentner, Dedre & Albert L. Stevens (Hrsg.) (1983): Mental Models. Hillsdale, N. J. & London: Lawrence Erlbaum

Griesel, Heinz (1971, 1973 & 1974): Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten. 3 Bände. Hannover: Schroedel

Herscovics, Nicolas & Jacques C. Bergeron (1983): Models of Understanding. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15, 75–83

Hörmann, Hans (1976): Meinen und Verstehen. Frankfurt. Suhrkamp

Kaput, James J. (1979): Mathematics and Learning: Roots of Epistemological Status. In: Jack Lochhead & John Clement (Hrsg.): Cognitive Process Instruction. Research on Teaching Thinking Skills. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 289–303

Kautschitsch, Hermann & Wolfgang Metzler (Hrsg.) (1989): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner

Kosslyn, Stephen M. & James R. Pomerantz (1977): Imagery, Propositions, and the Form of Internal Representations. In: Cognitive Psychology 9, 52–76

Kronfellner, Manfred (1987): Ein genetischer Zugang zum Funktionsbegriff. In: mathematica didactica 10, 81-100

Krummheuer, Götz (1989): Die Veranschaulichung als „formatierte" Argumentation im Mathematikunterricht. In: mathematica didactica 12, 225-243

Maier, Hermann (1988): „Verstehen" im Mathematikunterricht - Explikationsversuch zu einem vielverwendeten Begriff. In: Bender (1988):, 131-142

Paivio, Allan (1971): Imagery and Verbal Processes. New York usw.: Holt, Rinehart & Winston

Pylyshyn, Zenon W. (1973): What the Mind's Eye Tells the Mind's Brain: A Critique of Mental Imagery. In: Psychological Bulletin 80, 1-24

Schönwald, Hans (1989): Einige alltagsanschauliche Beweise. In: Kautschitsch & Metzler (1989):, 217-225

Schreiber, Alfred (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 6, 65-76

Seiler, Thomas Bernhard (1984): Begriffsentwicklung und die Veränderung des Verstehens. In: Engelkamp (1984):, 55-74

Skemp, Richard R. (1976): Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Mathematics Teaching 77, 20-26

Steiner, Hans-Georg (1988): Über Metaphern, Modelle und Mathematik. In: Bender (1988), 190-201

Vinner, Shlomo (1983): Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, 293-305

Wachsmuth, Ipke (1981): Two Modes of Thinking - also Relevant for the Learning of Mathematics? In: For the Learning of Mathematics 2, Heft 2, 38-45

Winter, Heinrich (1978): Umgangssprache - Fachsprache im Mathematikunterricht. In: Schriftenreihe des IDM 18. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, 5-56

Wittmann, Erich Christian & Gerhard Müller (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender (1988), 237-257