Literaturverzeichnis

Bernhard, R. H., (A More General Sufficient Condition), A More General Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. XIV (1979), No. 2, pp. 337-341.

Boulding, K. E., Time and Investment, in: Economia, Vol. III (1936), May, pp. 196-220.

Cuninghame-Green, R. A., Discounted Cash Flow, in: Operational Research Quarterly, Vol. 16 (1965), No. 2, pp. 251-253.

de Faro, C., (A Sufficient Condition), A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return: Further Comments, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. XIII (1978), No. 3, pp. 577-584.

Häußler, W. M., (Unterjährige Zahlungen), Barwert, Endwert und Effektivzins bei unterjährigen Zahlungen, in: Zeitschrift für Operations Research, 26. Jg. (1982), Serie B, Heft 2, S. B97-B121.

Henrici, P., (Complex Analysis), Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1: Power Series, Integration, Conformal Mappings, Location of Zeros; New York, etc.: Wiley 1974.

Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Stuttgart 1981.

Hosterbach, E., (Kapitalwert), Noch einmal: "Kapitalwert oder interner Zinsfuß?", in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 42. Jg. (1972), Nr. 5, S. 376-377.

Hosterbach, E., Seifert, O., (Zur Mehrdeutigkeit), Zur Mehrdeutigkeit des internen Zinsfußes, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 41. Jg. (1971), Nr. 12, S. 867-880.

Kilger, W. (Kritik), Zur Kritik am internen Zinsfuß, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 35. Jg. (1965), Nr. 12, S. 765-798.

Meyer, H., Die interne Verzinsung, in: Plus, 8. Jg. (1974), Heft 7, S. 49-56, Heft 8, S. 55-61, Heft 9, S. 49-61.

Meyer, H. (Fragwürdigkeit), Die Fragwürdigkeit der Einwände gegen die interne Verzinsung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 30. Jg. (1978), Nr. 1, S. 39-62.

Norstrøm, C. J., (Kritische Würdigung), Kritische Würdigung des internen Zinsfußes, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 42. Jg. (1990), Nr. 2, S. 107-118.

Pratt, J. W., Hammond, J. S. III., (Evaluating Projects), Evaluating and Comparing Projects: Simple Detection of False Alarms, in: The Journal of Finance, Vol. 34 (1979), No. 5, pp. 1231-1242.

Witten, P., Zimmermann, H.-G., (Eindeutigkeit), Zur Eindeutigkeit des internen Zinssatzes und seiner numerischen Bestimmung, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 47. Jg. (1977), Nr. 2, S. 99-114.

für solche Investitionen ist gewährleistet, daß sich der Kapitalwert bei variablem Kalkulationszinssatz antiton verhält.

Sobald die Kapitalwert-Funktion q mehrere Nullstellen hat, d. h. sobald beim internen Zinssatz Eindeutigkeitsprobleme entstehen, ist sie nicht mehr monoton fallend, und es treten Bereiche von Kalkulationszinssätzen auf, in denen der größere Zinssatz einen größeren Kapitalwert ergibt. Abbildung 1 [102] zu Beispiel 1 zeigt den typischen Sachverhalt: alle Zinssätze zwischen x_2 und x_4 (außer x_3) und rechts von x_6 ergeben größere Kapitalwerte als z. B. der Zinssatz x_1, obwohl sie größer als dieser sind.

Aber auch in Bereichen von Investitionen, in denen der interne Zinssatz im Sinne von Kapitel 3 noch brauchbar ist, erweist sich die Kapitalwertmethode als prinzipiell unbrauchbar. Beispielsweise hat die Investition (50; −115; 66) mit dem internen Zinssatz 10 % für Kalkulationszinssätze bis 10 % und ab 20 % einen positiven Kapitalwert. Dieser ist für Zinssätze bis 15 % fallend und ab dann mit dem Grenzwert 50 wieder steigend. Sogar bei **herkömmlichen** Investitionen $(a_k)_k$ mit mehr als einer Auszahlung am Anfang, also mit a_0, $a_1 < 0$, gibt es Intervalle, in denen mit wachsendem Kalkulationszinssatz auch der Kapitalwert wächst! Die Ableitung $dq/dx(1+x)$ der Kapitalwert-Funktion lautet nämlich

$$-(1+x)^{-n-1} \cdot (a_1 \cdot (1+x)^{n-1} + 2 \cdot a_2 \cdot (1+x)^{n-2} + \ldots + n \cdot a_n) \quad ;$$

das Polynom in der Klammer besitzt genau einen Vorzeichenwechsel und damit im Bereich $x > -1$ genau eine einfache Nullstelle x_1. Für Zinssätze x zwischen -1 und x_1 gilt $dq/dx(1+x) < 0$, d. h., die Kapitalwert-Funktion $q(1+x)$ ist fallend, und für Zinssätze $x > x_1$ gilt $dq/dx(1+x) > 0$, d. h. $q(1+x)$ ist steigend - die Kapitalwertmethode ist nicht brauchbar. Bei der Investition (−1; −100; 102) zum Beispiel ist $x_1 = 104$ %, und für größere Kalkulationszinssätze hat die Kapitalwert-Funktion eine positive Steigung.

Wohl erscheint bei einer solchen Investition der Ansatz eines derart hohen Kalkulationszinssatzes von vornherein sinnlos, aber er ist theoretisch und praktisch nicht unmöglich. Daß der Kapitalwert hierbei negativ wird, ist jedenfalls kein Hinderungsgrund. Die Entscheidung kann für eine so schlechte Investition sogar positiv ausfallen, nämlich wenn die Alternativen noch schlechter sind. Um die Kapitalwertmethode zu retten, könnte man versucht sein, solche Kalkulationszinssatz-Intervalle zu verbieten, in denen sich der Kapitalwert nicht antiton verhält. Dies könnte selbstverständlich nicht in der Weise geschehen, daß sich bei der stetigen Vergrößerung des Kalkulationszinssatzes - anfangend bei -1 - verbotene und erlaubte Bereiche abwechseln. Sobald die Steigung der Kapitalwert-Funktion einmal positiv wird, müßte vielmehr der Bereich rechts von dieser Stelle komplett verboten werden.

Mit solchen Beschränkungen hätte die Kapitalwertmethode aber ihre angebliche Einfachheit und Universalität verloren. Bei jeder Investition müßte nämlich die Ableitung der Kapitalwert-Funktion gebildet und analysiert werden, wobei der begriffliche und

[102] Zwar ist in Abbildung 1 der Graph der Endwert-Funktion p und nicht der der Kapitalwert-Funktion q gekennzeichnet; aber p und q haben, wie oben ausgeführt, dasselbe Vorzeichenverhalten, d. h., sie sind jeweils an denselben Stellen positiv (null, negativ), und der Graph der Funktion q hat qualitativ dasselbe Aussehen wie der von p.

mathematische Aufwand nicht geringer wäre als beim internen Zinssatz. Vor allem aber ist sachlich überhaupt nicht zu rechtfertigen, warum bestimmte positive Kalkulationszinssätze nicht verwendet werden dürfen. Letztlich bleibt daher nichts anderes übrig, als die Kapitalwertmethode wirklich nur auf den Spezialfall von Investitionen anzuwenden, bei denen eine einzige Auszahlung zum Zeitpunkt 0 vorliegt und danach ausschließlich Einzahlungen erfolgen. In der Praxis ist das immer noch ein breites Anwendungsfeld; allerdings muß man zur Kenntnis nehmen, daß der interne Zinssatz einen deutlich weiteren Anwendungsbereich hat. Insbesondere ist immer dort, wo der interne Zinssatz nicht mehr brauchbar ist, die Kapitalwertmethode erst recht nicht brauchbar.

5. Schlußbetrachtung

Mit der vorliegenden Analyse dürfte die formal-begriffliche Problematik des internen Zinssatzes abschließend geklärt sein. Nach punktuellen Erklärungsversuchen bis in die siebziger Jahre hinein hatte die Finanzwissenschaft diese Problematik aus den Augen verloren, weil man inzwischen mehrheitlich dazu neigte, den Kapitalwert als Indikator für die Güte einer Investition dem internen Zinssatz vorzuziehen. Allerdings ist dieser in der betriebswirtschaftlichen Praxis nach wie vor weit verbreitet, vor allem auch als effektiver Zinssatz in der Kreditwirtschaft.

Außerdem ist die Kapitalwertmethode begrifflich sehr eng mit dem internen Zinssatz verbunden, auch wenn dies in der Diskussion häufig übersehen wird. Insbesondere entgeht man mit ihr nicht den beim internen Zinssatz identifizierten Schwierigkeiten, wenn sich im Zahlungsstrom Aus- und Einzahlungen mit allzu starken Schwankungen abwechseln. Darüber hinaus treten bei der Kapitalwertmethode Inkonsistenzen schon bei Investitionen auf, bei denen der interne Zinssatz noch brauchbar ist, z. B. sogar bei einer herkömmlichen Investition, wenn deren Zahlungsstrom am Anfang mehr als eine Auszahlung aufweist.

Eine Ursache für das Favorisieren der Kapitalwertmethode dürfte darin liegen, daß ihre formal-mathematischen Eigenschaften zu allen Zeiten noch weniger gründlich untersucht waren als die des internen Zinssatzes. Tatsächlich ist sie nur für den Spezialfall von Investitionen brauchbar, bei denen einer einzigen Auszahlung zum Zeitpunkt 0 lauter Einzahlungen folgen. Die formal motivierte Empfehlung, beim Auftreten mehrerer Nullstellen nicht den internen Zinssatz, sondern die Kapitalwertmethode der Investitions-Entscheidung zugrunde zu legen, ist - formal gesehen - geradezu widersinnig.

Man muß sich damit abfinden, daß das Grundproblem der Finanzwissenschaft, Zahlungen nicht nur nach ihrer Höhe, sondern auch nach ihrem zeitlichen Auftreten zu bewerten, nicht auf vollständig glatte Weise zu lösen ist, jedenfalls wenn man den Bereich der betrachteten Zahlungsströme nicht einschränkt. Im allgemeinen sind die in der Praxis vorkommenden Investitionen jedoch hinreichend 'gutartig' - selbst bei häufiger wechselndem Vorzeichen der Zahlungen - , so daß der interne Zinssatz auch für die Praxis ein formal brauchbares Wirtschaftlichkeitsmaß darstellt.

thode selbst. Dieser wird ja ein Funktionieren, d. h. ein Herbeiführen der 'richtigen' Entscheidung, aufgrund folgender Einschätzung unterstellt: Der Kalkulationszinssatz ist eine Art Hürde, die vor einer Auswahl möglicher Investitionen aufgestellt wird. Bei jeder dieser Investitionen gibt der Kapitalwert dann an, ob bzw. wie gut sie diese Hürde überwindet. Je höher diese Hürde von vornherein gewählt wird, d. h., je höher der Kalkulationszinssatz angesetzt ist, desto knapper ist der Abstand, mit der sie von den einzelnen Investitionen genommen wird, d. h., desto geringer ist deren Kapitalwert bzw. desto geringer ist die Anzahl der Investitionen, die die Hürde noch nehmen, d. h. die keinen negativen Kapitalwert besitzen.

Diesen Vorstellungen liegt der Sachverhalt zugrunde, daß beim Ab- oder Aufzinsen mit steigendem Kalkulationszinssatz x das Gewicht 1 der Anfangszahlung eines Zahlungsstroms gegenüber dem Gewicht $(1+x)^{-k}$ späterer Einträge (mit $k>0$) größer wird. Ist die Anfangszahlung negativ, d. h., stellt sie eine Auszahlung dar, und sind die späteren Einträge positiv, d. h., handelt es sich danach ausschließlich um Einzahlungen, d. h., liegt der 'Normal'fall vor, so muß der Kapitalwert einer Investition mit steigendem Kalkulationszinssatz sinken. Formal korrespondiert diese Feststellung mit der Eigenschaft, daß die Kapitalwert-Funktion q im Bereich $x>-1$ dann streng monoton fallend sein muß.[97]

Völlig absurd erschiene es, wenn bei einer Investition mit steigendem Kalkulationszinssatz auch der Kapitalwert stiege; denn, um im Bild zu bleiben, eine Investition verhält sich nicht wie ein Mensch, der durch höhere Anforderungen zu höheren Leistungen angespornt werden kann, sondern ihr Zahlungsstrom ist absolut unabhängig vom Kalkulationszinssatz. Man muß sich darauf verlassen können, daß eine Investition, die bei einem bestimmten Kalkulationszinssatz unrentabel ist, auch bei jedem höheren Kalkulationszinssatz unrentabel ist.[98] Wenn Investitionen existieren, die sich anders verhalten, bräuchte man lediglich den Kalkulationszinssatz hinreichend hoch anzusetzen, um solche unrentablen Investitionen wieder als rentabel auszuweisen. Derart übersteigerte Ansätze würden nachträglich dadurch gerechtfertigt, daß man sie ja gerade mit den betrachteten Investitionen realisieren kann. Man sieht, daß das Auftreten solcher Investitionen die Kapitalwertmethode entwertet.

Faßt man diese Erörterungen etwas formaler, dann sind an die Kapitalwertmethode - wieder in Anlehnung an Definition 2 - die folgenden weiteren Forderungen zu stellen. Bei nunmehr **festem Zahlungsstrom** a muß der Kapitalwert q in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz x folgende Eigenschaften erfüllen: Existenz, Eindeutigkeit, Ordenbarkeit, Permanenz und Stetigkeit, die alle leicht nachzuweisen sind, sowie außerdem

97 Vergleiche dazu Abbildung 2, in der zwar das Verhalten der Funktion p dargestellt ist, von dem sich das Verhalten von q aber qualitativ nicht unterscheidet.

98 Auch beim Vergleich zweier Investitionen a und b mittels der Differenz-Investition a-b muß mit wachsendem Kalkulationszinssatz der Kapitalwert von a-b kleiner werden, und wenn anfangs Rentabilität vorliegt (Entscheidung für Investition a), dann darf dies höchstens einmal in Unrentabilität (Entscheidung für Investition b) umschlagen. Daher gehört das Beispiel von Norstrøm, C. J., Kritische Würdigung, S. 112 f., wie viele andere in der Literatur, in den Bereich, in dem die Kapitalwertmethode nicht anwendbar ist.

Antitonie,[99] die im allgemeinen nicht gilt! Daß es bei der Kapitalwertmethode **zwei** funktionale Abhängigkeiten sind, die Brauchbarkeits-Kriterien wie denen in Definition 2 entsprechen müssen - nämlich die multilineare Funktion $q=q(a)$ in Abhängigkeit vom Zahlungsstrom a für einen festen Zinssatz x und die gebrochen rationale Kapitalwert-Funktion $q=q(1+x)$ in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz x für einen festen Zahlungsstrom a -, rührt von der Tatsache her, daß zusätzlich zum Zahlungsstrom der Kalkulationszinssatz als exogene Größe auftritt.

Die Analyse des Kapitalwerts von Investitionen in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz ist mit dem Studium des internen Zinssatzes in den bisherigen Kapiteln praktisch schon geleistet. Tatsächlich hätte der interne Zinssatz ohne weiteres auch mit Hilfe der Kapitalwert-Funktion (23) anstatt mit der Endwert-Funktion (7) definiert werden können. Das Polynom p aus Gleichung (7) hängt mit der Funktion q aus Gleichung (23) über die Gleichung $p(1+x)=q(1+x)\cdot(1+x)^n$ zusammen. Die Funktion q gibt den Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt 0 (Barwert) und die Funktion p den Wert zum Zeitpunkt n (Endwert) an, beide für denselben Zinssatz x. Der Faktor $(1+x)^n$ ist im Bereich $x>-1$ durchweg positiv, und deswegen besitzen die beiden Funktionen p und q in diesem Bereich dasselbe Vorzeichenverhalten, d. h., sie haben identische Nullstellenmengen und nehmen an denselben Stellen positive bzw. negative Werte an. Daher besitzen sie identische Mengen zulässiger Nullstellen im Sinne von Definition 1, und es ergäbe sich in den Definitionen 3, 4, 5A und 5B mit der Funktion q derselbe Begriff des internen Zinssatzes wie mit der Funktion p.[100]

Bei der Kapitalwertmethode ist also für den vorgegebenen Kalkulationszinssatz x der Wert $q(1+x)$ zu bestimmen, während der interne Zinssatz 'die' Lösung der Gleichung $q(1+x)=0$ ist. Diesem begrifflich sehr engen Zusammenhang der beiden Methoden steht eine rechentechnisch unterschiedliche Vorgehensweise gegenüber: Das Lösen der Gleichung $q(1+x)=0$ geschieht mit zwar primitiven, aber rechenintensiven iterativen Verfahren, für deren Durchführung man letztlich einen programmierbaren elektronischen Rechner und entweder gewisse Programmierkenntnisse oder geeignete Software benötigt - zwei Voraussetzungen, die bis in die sechziger Jahre häufig nicht erfüllt waren. Dagegen war das Auswerten des Terms $q(1+x)$ schon immer auch ohne elektronische Rechner praktisch möglich.

Der Kapitalwert soll im folgenden nicht so gründlich analysiert werden wie der interne Zinssatz. Es werden z. B. nur noch günstige Investitionen[101] betrachtet, d. h. solche, für die der Kalkulationszinssatz 0 einen positiven Kapitalwert ergibt. Für diese Investitionen werden auf Basis der oben durchgeführten Studien des internen Zinssatzes einige allgemeine Ergebnisse, verbunden mit knappen Begründungen, aufgezeigt und an Beispielen verdeutlicht: **Die Kapitalwertmethode ist prinzipiell nur dann brauchbar, wenn es um Investitionen geht, die den allereinfachsten Spezialfall darstellen, die nämlich eine einzige Auszahlung am Anfang und danach nur noch Einzahlungen aufweisen.** Nur

99 Die Kapitalwert-Funktion ist in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz (streng) monoton fallend. Vergleiche Abbildung 2 und Fußnote 97. Die geforderte Antitonie des Kapitalwerts hat ihre genaue Entsprechung beim internen Zinssatz darin, daß für diesen nur Nullstellen in Frage kommen, die nach Definition 1 zulässig sind.

100 Siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 2.2. und am Anfang von Kapitel 3.

101 Die Übertragung der folgenden Ausführungen auf nicht günstige Investitionen liegt auf der Hand.

nicht von vornherein feststeht, sondern von den Mitteln der Bausparkasse abhängt, bekannt ist. Mit den angenommenen Merkmalen ergibt sich ein Zahlungsstrom von (2.750; 7mal 6.000; −112.790; 9mal 8.640; 7.500; 1.020) mit der Gesamtsumme 18.240 und dem internen Zinssatz ∞.

Zur Vermeidung eines Zinssatzes 'unendlich' kann man das Bauspardarlehen fiktiv mit einer Vorfinanzierung koppeln und so insgesamt eine herkömmliche Investition erhalten:[91] Nach einer Auszahlung in Höhe von 120.000 am Anfang, folgen 8 Jahre lang monatliche Einzahlungen[92] in Höhe von 800 und danach die Tilgung durch das Bauspardarlehen. Dem obigen Zahlungsstrom ist jetzt noch der Zahlungsstrom (−115.600; 7mal 9.600; 125.200) mit der Gesamtsumme 76.800 hinzuzufügen, so daß man schließlich den resultierenden Zahlungsstrom (−112.850; 7mal 15.600; 12.410; 9mal 8.640; 7.500; 1.020) mit einer Gesamtsumme von 95.040 und dem internen Zinssatz 0,0895 erhält. Durch Kopplung mit dem gesamten Bausparvertrag erhöht sich also der interne Zinssatz der Vorfinanzierung für den Bauherrn von 0,0830 auf 0,0895. Dies bedeutet, daß er seine Finanzierung günstigerweise ohne Bausparen durchführt, jedenfalls wenn er für die gesamte Laufzeit dieselben Bedingungen erhalten kann wie für die Vorfinanzierung allein.

4.4. Formaler Vergleich mit der Kapitalwertmethode

In der finanzwissenschaftlichen Diskussion[93] werden immer wieder die **Kapitalwertmethode** und die **Methode des internen Zinssatzes** zur Bewertung von Investitionen in einen - vermeintlich ausschließenden - Gegensatz gebracht. Tatsächlich stehen die beiden Methoden begrifflich in einem sehr engen Verhältnis. Insbesondere treten die formalen Probleme des internen Zinssatzes in entsprechender Form auch bei der Kapitalwertmethode auf, und dies nicht nur bei denselben Typen von Zahlungsströmen, sondern bereits bei solchen, bei denen der interne Zinssatz mit den oben diskutierten Modifikationen noch brauchbar ist.

In der Reinform funktioniert die Kapitalwertmethode folgendermaßen: Zu einem vorliegenden Zahlungsstrom $(a_k)_k$ wird der Barwert unter einem vorgegebenen Zinssatz x, dem **Kalkulationszinssatz**, bestimmt, d. h., sämtliche Einträge des Zahlungsstroms werden auf den Zeitpunkt 0 abgezinst und dann saldiert. Ist der Wert positiv, ist die Investition rentabel,[94] und sie wird durchgeführt; ist er negativ, unterläßt man sie. Bei zwei Investitionen entscheidet man sich für diejenige mit dem größeren Kapitalwert, oder man bestimmt den Kapitalwert der Differenz-Investition und entscheidet sich je nach dessen Vorzeichen für eine der beiden in Frage stehenden Investitionen. Für die grund-

91 Diese Modifikation hat jedoch nicht nur theoretische Bedeutung; sie stellt vielmehr eine gängige Praxis bei der Hausfinanzierung dar.
92 Diese sind als Zinszahlungen (bei einem effektiven Zinssatz von 0,0830) deklariert.
93 Vergleiche u. a. die in Fußnote 1 genannte Literatur.
94 Die hier verwendete übliche Bezeichnung 'rentabel' darf nicht mit dem in Abschnitt 2.1. eingeführten formalen Begriff 'günstig' verwechselt werden.

sätzlichen Überlegungen hierbei müssen Varianten, wie die Annahme eines variablen Kalkulationszinssatzes o. ä., außer acht bleiben.

Auch der Kapitalwert muß als Wirtschaftlichkeitsmaß entsprechende Forderungen, wie die in Definition 2 für den internen Zinssatz genannten - 'Existenz', 'Eindeutigkeit', 'Ordenbarkeit', 'Permanenz', 'Isotonie' und 'Stetigkeit' - , erfüllen. Diese ergeben sich beim Kapitalwert **scheinbar** einfacher und vollkommener als beim internen Zinssatz. Zur Überprüfung braucht man nur die Kapitalwert-Funktion q zu betrachten, die jedem Zahlungsstrom $a=(a_k)_k$ seinen Kapitalwert

$$(23) \qquad q(1+x) := q_a(1+x) := a_0 + a_1 \cdot (1+x)^{-1} + \dots + a_n \cdot (1+x)^{-n}$$

in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz $x > -1$ zuordnet. Für einen **festen Zinssatz** x (und eine feste Laufzeit n) ist q eine lineare Funktion der Einträge $a_0, a_1, \dots, a_n$ des Zahlungsstroms, und für q sind die genannten Forderungen trivialerweise erfüllt. Lediglich der Beweis der Isotonie erfordert die folgende Zusatzüberlegung: Weil $x > -1$ gilt, sind die Terme $(1+x)^{-1}, (1+x)^{-2}, \dots, (1+x)^{-n}$ positiv; deswegen wächst mit wachsenden Einträgen a_k auch der Kapitalwert, d. h. eine Investition, die offensichtlich günstiger ist als eine andere, besitzt einen höheren Kapitalwert als diese. Im Normalfall, nämlich bei Ansatz eines **positiven** Kalkulationszinssatzes, gilt $(1+x)^{-k} < 1$ (für alle $k \geq 1$), und eine Investition besitzt sogar schon dann einen höheren Kapitalwert als eine andere, wenn sie dieselbe Gesamtsumme wie diese aufweist und bei ihr lediglich Einzahlungen früher bzw. Auszahlungen später als bei dieser stattfinden.

Weil der Kapitalwert bei **gegebenem Kalkulationszinssatz** so einfach zu errechnen ist und so klare, wünschenswerte Eigenschaften besitzt, wird ihm von vielen Finanzwissenschaftlern der Vorzug vor dem internen Zinssatz gegeben - insbesondere bei Zahlungsströmen, bei denen die in dieser Arbeit diskutierten Mehrdeutigkeitsprobleme auftreten.[95] Mit dieser Selbstbeschränkung auf die Auswertung der Kapitalwert-Funktion q für einen einzigen Kalkulationszinssatz x verschließt man aber die Augen vor den Inkonsistenzen, denen der Kapitalwert bei solchen Zahlungsströmen ebenfalls unterliegt. In der Praxis bedeutet ein solches Vorgehen, daß man bei Vorliegen einer nicht herkömmlichen Investition[96] mit der Kapitalwertmethode prinzipiell nur zufällig keine falsche Entscheidung trifft. Diese Inkonsistenzen werden im folgenden diskutiert.

Bei der Kapitalwertmethode tritt zur Unsicherheit über den Zahlungsstrom einer Investition noch die Willkür der Setzung des Kalkulationszinssatzes, und man tut in der **Praxis** gut daran, die Kapitalwerte der in Frage stehenden Investitionen für verschiedene Zinssätze zu bestimmen und zu vergleichen. Insbesondere empfiehlt es sich immer, für jede Investition auch den 'maximalen' Zinssatz auszurechnen, für den der Kapitalwert noch nicht negativ ist, d. h. 'den' internen Zinssatz. Auch aus **theoretischen** Motiven ist die Abhängigkeit der Kapitalwert-Funktion q einer Investition vom Zinssatz x von prinzipiellem Interesse.

Der Hauptgrund, warum man die Abhängigkeit des Kapitalwerts von einem **variablen Kalkulationszinssatz** berücksichtigen muß, liegt aber im Prinzip der Kapitalwertme-

95 So unlängst wieder in Norstrøm, C. J., Kritische Würdigung, S. 111.
96 D. h. mit mehreren Wechseln zwischen Ein- und Auszahlungen.

die Vorzeitigkeit der Zahlungen nicht berücksichtigt hätte. Mit der Verkürzung der Perioden auf Quartale wäre der Zahlungsstrom (-3.000; 4mal 2.000) mit dem internen Quartalszinssatz 0,55166 und dem Jahreszinssatz 4,7968 ($=1{,}55166^4 - 1$) entstanden.

Daß die Werte für den internen Zinssatz bei den beiden Berechnungsweisen 'innerperiodische lineare Verzinsung' und 'Verkürzung der Perioden' so stark auseinanderklaffen, geht auf die gezielte Wahl dieses extremen Beispiels zurück. Der Zahlungsstrom (0; 5.000) ist so zu interpretieren, daß für den Investor zu keiner Zeit ein negativer Saldo besteht, da als Zeiträume nur ganze Perioden in Frage kommen und die Einzahlungen in der ersten Periode so früh liegen und so hoch sind, daß sie die Auszahlung am Anfang schon innerhalb dieser Periode ausgleichen.

Da der Wert ∞ an anderen Stellen unvermeidbar auftritt, kann er auch hier in Kauf genommen werden. Er darf, wie gesagt, nur nicht mit unendlich hohen Zinsen in Verbindung gebracht werden, sondern muß als 'besonders günstig' verstanden werden.

Für nicht ganzjährige Gesamt-Laufzeiten sieht die Formel für den effektiven Zinssatz nach der PAngV vor, daß die letzte Zinsperiode entsprechend zu verkürzen ist und die Zinsen mit der letzten Zahlung, d. h. vor Ablauf eines Jahres nach dem vorletzten Zinszeitpunkt, zu kapitalisieren sind.[90] Abgesehen von der erheblichen Komplizierung der Formel, führt diese Regel auch zu der Inkonsistenz, daß **spätere Einzahlungen** zu günstigeren Zahlungsströmen und damit zu **höheren** effektiven Zinssätzen führen können.

Beispiel 22: Einer Auszahlung von -100 zum Zeitpunkt 0 stehen Einzahlungen von insgesamt 102 gegenüber. Bei Fall (a) soll dieser Betrag komplett zum Zeitpunkt $1-t$, also um die Zeitspanne t vor Ablauf des Jahres ($0 < t < 1$), eingezahlt werden. Bei Fall (b) soll nur ein Betrag von 101 zum Zeitpunkt $1-t$ und der Rest in Höhe von 1 zum Jahresende eingezahlt werden. Offensichtlich ist (a) vorteilhafter als (b).

Dagegen ist der effektive Zinssatz nach der PAngV bei Fall (a) niedriger. Er ergibt sich aus der Gleichung $-100\cdot(1+(1-t)\cdot x_a) + 102 = 0$ und ist

$$x_a = 0{,}02/(1-t) \quad ,$$

während bei Fall (b) der Zahlungsstrom $(-100+101\cdot t;\ 101\cdot(1-t)+1) = (101\cdot t-100;\ -101\cdot t+102)$ lautet und der effektive Zinssatz

$$x_b = \begin{cases} 0{,}02/(1-1{,}01\cdot t) & \text{für} \quad t < 1/1{,}01 \\ \infty & \text{für} \quad t \ge 1/1{,}01 \end{cases}$$

beträgt. Für alle t gilt offensichtlich $x_b > x_a$.

Diese Inkonsistenz könnte dadurch beseitigt werden, daß man nur ganzzahlige Laufzeiten zuläßt, so daß Zinsen in der letzten Periode zwar nur bis zur letzten Zahlung anfallen, aber ihre Kapitalisierung u. U. erst nach Ablauf

[90] Diese Verrechnungsweise richtet sich nach der Bankpraxis, der sog. Sparkassenkonvention.

des vollen Jahres vorgenommen wird. Beim Zahlungsstrom b muß im Falle dieser Modifikation der Berechnungsweise nichts geändert werden, während sich aus Zahlungsstrom a der neue Zahlungsstrom $a' = (-100 + 102\cdot t;\ 102\cdot(1-t))$ mit dem internen Zinssatz

$$x_{a'} = \begin{cases} 0{,}02/(1-1{,}02\cdot t) & \text{für} \quad t < 1/1{,}02 \\ \infty & \text{für} \quad t \ge 1/1{,}02 \end{cases}$$

ergibt. Nun gilt die Beziehung $x_{a'} > x_b$ für $t < 1/1{,}01$ und $x_{a'} = \infty = x_b$ für $t \ge 1/1{,}01$, wie es sich gehört.

Wohl bezieht sich die Brauchbarkeits-Definition (Definition 2) nur auf (fertige) Zahlungsströme mit einheitlichen Periodenlängen, es leuchtet aber ein, daß sie entsprechend erweitert werden muß, wenn, wie bei der Formel zur PAngV, die genauen Zeitpunkte innerperiodischer Zahlungen eine Rolle spielen sollen. Liegen z. B. zwei günstige Investitionen a und b vor, die sich lediglich dadurch unterscheiden, daß a (innerperiodisch) frühere Einzahlungen als b aufweist, dann muß der interne Zinssatz von Investition a höher sein als der von b, sofern sie nicht beide ∞ sind (Isotonie).

Wie Beispiel 22 zeigt, ist der effektive Zinssatz nach der Formel der PAngV nicht isoton in diesem Sinne. Man kann aber leicht beweisen, daß bei dem Verfahren, nicht-ganze Laufzeiten auf ganze aufzurunden und damit auch die letzte Zinskapitalisierung wieder nach einer vollen Periode vorzunehmen (**Aufrundungs-Verfahren**), der effektive Zinssatz isoton wäre.

In der Praxis unterscheiden sich die beiden Verfahren in ihren Ergebnissen so gut wie nicht, so daß man die diskutierte Unstimmigkeit in der Formel der PAngV zugunsten einer genauen Nachbildung der Bankpraxis vielleicht in Kauf nehmen kann. - Für ein stimmiges System einer Bewertung von Investitionen mit dem internen Zinssatz, bei dem innerperiodische Zahlungen (fiktiv) bis zum jeweiligen Periodenende linear verzinst werden sollen, kommt die Formel der PAngV aber nicht in Frage, sondern z. B. das Aufrundungs-Verfahren.

Beispiel 23: Ein Bausparvertrag sei durch folgende Merkmale gekennzeichnet: Bausparsumme 120.000, monatliche Einzahlungen in Höhe von 500 bis zur Zuteilung, Zuteilung nach 8 Jahren, danach 10 Jahre 5 Monate lang monatliche Einzahlungen in Höhe von 720 und 1 Monat später eine Abschlußzahlung über 240. Abschlußgebühr, Kontoführungsgebühr, Darlehensgebühr, nominale Haben- und Sollzinsen, verzögerte Kapitalisierung der Einzahlungen usw. erscheinen alle nicht explizit im Zahlungsstrom, sondern wirken sich lediglich implizit, aber durchaus spürbar durch die Zeitdauer bis zur Zuteilung, durch die Länge der Darlehensphase nach der Zuteilung und durch die Höhe der letzten Zahlung auf diesen aus.

Nur mit einer umständlichen Rechnung lassen sich sämtliche Vertragsbestandteile in den Zahlungsstrom umsetzen; und diese Umsetzung kann letztlich erst dann vorgenommen werden, wenn der Zuteilungstermin, der

4.3. Innerperiodische Zahlungen

Das Auftreten innerperiodischer Zahlungen scheint zunächst ein Problem minderen Ranges zu sein. Für die Zwecke der Investitionsplanung kann man die Ungenauigkeiten, die entstehen, wenn man einfach so tut, als ob die Zahlungen immer an Periodenenden stattfinden, meistens vernachlässigen. Möchte man trotzdem die genauen Zahlungszeitpunkte berücksichtigen, dann setzt man am einfachsten die (Zins-) Perioden kürzer an; anstelle von Jahren wählt man z. B. Quartale, Monate, Tage. Bekanntlich kommt man damit wegen der Wirkung der Zinseszinsen bei den einzelnen Zahlungen mit niedrigeren nominalen Zinssätzen zu denselben Endwerten wie beim Ansatz längerer Perioden. Hat man die Periodenlänge jedoch ein für allemal festgelegt, gelten die Ausführungen bis einschließlich Abschnitt 4.2. ohne Abstriche.

Im Bankgewerbe werden effektive Zinssätze von Krediten[87] üblicherweise sehr genau angegeben. Gegenüber Privatkunden besteht dazu sogar eine Pflicht nach der Preisangabenverordnung (PAngV). Diese Verordnung legt auch fest, **wie** der effektive Zinssatz zu berechnen ist: Die Laufzeit beginnt mit der ersten Zahlung. Die Zinsperioden dauern genau 1 Jahr, anfangend mit dem Laufzeitbeginn - sie sind also unabhängig vom Kalenderjahr - , das Jahr gerechnet zu 360 Tagen. Ist die Gesamt-Laufzeit nicht ganzjährig, ist die letzte Zinsperiode entsprechend kürzer. Jede Zahlung vor dem Ende einer Zinsperiode wird bis zum Periodenende zunächst einfach aufgezinst.[88]

Diese Vorschrift über die Verrechnung innerperiodischer Zahlungen hat folgende Vorzüge: Durch sie ist eine einheitliche Periodenlänge festgesetzt, wobei das Jahr als Grundperiode wirtschaftlichen Handelns angenommen wird. Insbesondere kann die Berechnung des effektiven Zinssatzes leicht anhand einer Staffelrechnung - wie bei einem normalen Sparkonto - nachvollzogen werden. Wenn die Zinsen tatsächlich in kürzeren Zeitabständen kapitalisiert werden, was bei vielen Kreditformen der Fall ist, so werden diese Abweichungen von der (fiktiven) Norm als solche genau durch den effektiven Zinssatz erfaßt. Unterschiedliche Zinsperiodenlängen werden auf diese Weise überhaupt erst vergleichbar gemacht.

Diese Argumente gelten zwar auch für andere Standard-Periodenlängen, aber das Jahr hat den rechnerischen Vorzug, daß die Zahlungsströme im Sinne von Abschnitt 2.1. nicht zu umfangreich werden, daß der Grad der zugehörigen Polynome nicht zu groß wird und insbesondere daß sich Zahlungen innerhalb eines Jahres gegenseitig ausgleichen können, so daß die Zahl der Vorzeichenwechsel u. U. klein gehalten wird. In der Tat treten innerperiodische Zahlungen in der endgültigen Form des Zahlungsstroms nicht mehr auf, wie man sich anhand einer einfachen mathematischen Umrechnung verdeutlichen kann:

α sei eine Zahlung, die um die Zeitspanne t vor dem nächsten Zinszeitpunkt stattfindet ($0 \leq t \leq 1$). Wird die Zahlung α bis zu diesem Zinszeitpunkt mit dem Zinssatz x einfach verzinst, so ist ihr Wert danach durch den Term $\alpha \cdot (1 + t \cdot x)$ beschrieben, den man folgendermaßen umformen kann:

87 Ein Kredit ist eine Investition der Bank in den Kreditnehmer, und der effektive Zinssatz dieses Kredits ist nichts anderes als der interne Zinssatz dieser Investition.

88 Dies alles sind fiktive Größen als Basis für die Berechnung einer weiteren fiktiven Größe, des effektiven Zinssatzes.

$$(22) \qquad \alpha \cdot (1 + t \cdot x) = \alpha \cdot (1 - t + t + t \cdot x) = t \cdot \alpha \cdot (1+x) + (1-t) \cdot \alpha \quad .$$

Faktisch wird die Zahlung α in zwei Teilzahlungen $t \cdot \alpha$ und $(1-t) \cdot \alpha$ zerlegt. $t \cdot \alpha$ wird am Periodenanfang geleistet und in der ganzen Periode aufgezinst; $(1-t) \cdot \alpha$ wird am Periodenende geleistet. Auf diese Art und Weise sind sämtliche innerperiodische Zahlungen in dazu gleichwertige Zahlungen umzuwandeln, die an den Periodenenden stattfinden.

Beispiel 20: 61 Monatsraten in Höhe von je 100 ergeben aufgrund von Rechnung (22) nicht den Zahlungsstrom (100; 1200; 1200; 1200; 1200; 1200), sondern den Zahlungsstrom (650; 1200; 1200; 1200; 1200; 650).

Zwar ist das Angebot eines Kredits durch eine Bank ein sehr spezieller Fall der Investitionsrechnung, dennoch bietet es sich an, die Berechnungsmethode der PAngV im allgemeinen zu übernehmen. Damit ist eine gewisse Einheitlichkeit im Sinne der Permanenz-Forderung in Definition 2 gewahrt, und zwar unabhängig von der Periodenlänge, die auch kürzer als 1 Jahr angenommen werden kann. Entweder spielt der genaue Zeitpunkt der Zahlungen in einer Periode keine Rolle - dann sind diese einfach zu saldieren - oder dieser Zeitpunkt (t vor Periodenende) ist von Bedeutung, dann ist eine Zahlung α mit den Beträgen $(1-t) \cdot \alpha$ auf das Periodenende und $t \cdot \alpha$ auf das Ende der Vorperiode zu verteilen. Rechnung (22) zeigt, daß der numerische Aufwand für diese Verteilung sehr gering ist, und an Beispiel 20 sieht man, daß der resultierende Zahlungsstrom nicht komplizierter aufgebaut ist, als wenn die Zahlungen einer Periode ohne innerperiodische Verzinsung saldiert würden. Es erfolgt lediglich die Verschiebung eines Teilbetrags vom Laufzeitende an den Laufzeitanfang.[89] Allerdings ist der Zusammenhang zwischen den beiden Zahlungsströmen - ohne und mit Berücksichtigung der genauen innerperiodischen Zahlungszeitpunkte - nur dann so einfach, wenn in jeder vollen Periode dieselbe Abfolge von Zahlungen vorliegt.

Die Verteilung der Zahlung -8.000 auf zwei Perioden in Beispiel 18 hat genau diese Verrechnung innerperiodischer Zahlungen als Hintergrund. Wenn der Zahlungstermin vom Anfang einer Periode kontinuierlich bis zu deren Ende verschoben wird, dann sinkt die Restzeit bis zum Periodenende von 1 auf 0, und der Zahlungsstrom $(-8.000 \cdot t; -8.000 \cdot (1-t))$ ändert sich von $(-8.000; 0)$ bis auf $(0; -8.000)$.

Beispiel 21: Das Prinzip der innerperiodischen linearen Verzinsung bringt gewisse merkwürdige Phänomene mit sich:

Einer Auszahlung von 3.000 am Anfang stehen innerhalb eines Jahres vier Einzahlungen in Höhe von je 2.000 an den Quartalsenden gegenüber. Der Zahlungsstrom lautet dann $(-3.000 + 2.000 \cdot 3/4 + 2.000 \cdot 1/2 + 2.000 \cdot 1/4; 2.000 \cdot 1/4 + 2.000 \cdot 1/2 + 2.000 \cdot 3/4 + 2.000) = (0; 5.000)$ und er besitzt den internen Zinssatz ∞.

Die Saldierung der Einzahlungen, einfach zum Jahresende, hätte den Zahlungsstrom $(-3.000; 8.000)$ mit dem internen Zinssatz $1,6667$ ergeben, der

89 In Beispiel 20 handelt es sich um einen Betrag in Höhe von 550.

Den dargestellten Effekt kann man auch für die folgende Schar von Investitionen beobachten, bei der die Auszahlungen nicht nach hinten verlegt, sondern betragsmäßig verkleinert werden. Wieder findet vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 10 jedesmal eine Einzahlung in Höhe von 1.000 statt. Außerdem erfolgt zum Zeitpunkt 2 eine Auszahlung von 3243 und zum Zeitpunkt 3 eine variable Auszahlung $\alpha \geq -6.000$. Die Schar hat unter diesen Bedingungen die Gestalt (1.000; 1.000; -2.243; 1.000+α; 7mal 1.000). Vom Parameter α hängt der interne Zinssatz folgendermaßen ab:

α	-6.000	-5.500	-5.000	-4.800	-4.757	≥-4.757
x_0	0,0954	0,1414	0,2163	0,2809	0,3301	∞

Das **Bausparen** ist für Bausparkassen eine Investition vom Typ des Beispiels 18. Nach jahrelangen Einzahlungen (sog. Ansparphase) erfolgt eine Auszahlung[81] und danach wieder eine Reihe von Einzahlungen (sog. Darlehensphase). Auch wenn der Bausparer, das Investitionsobjekt, die Einzahlungen vertragsgemäß leistet, steht der Termin der Darlehens-Auszahlung dennoch nicht von vornherein fest, sondern hängt von den Mitteln ab, die die Bausparkasse jeweils zur Verfügung hat, und damit von deren unternehmerischen Qualität.

Bis Anfang der achtziger Jahre waren die Wartezeiten bis zur Darlehens-Zuteilung noch so kurz, daß der interne Zinssatz im allgemeinen gerade noch endlich war. Allerdings war er deutlich über 10 % angesiedelt. Danach erfolgte (aus der Sicht der Bausparer) eine rapide Verschlechterung, so daß der interne Zinssatz durchweg ∞ betrug. Auch während der Konsolidierung in den letzten Jahren haben sich die Wartezeiten nicht wieder so weit verkürzt, daß man mit den Zinssätzen bereits aus dem Bereich ∞ herausgekommen wäre. - Mit einer hohen Einzahlung am Anfang kann der Bausparer zwar seine Wartezeit verkürzen, aber prinzipiell den internen Zinssatz nicht verringern, da der Vorteil der kürzeren Zeit durch die frühen hohen Einzahlungen eliminiert wird.

Für Bausparkassen stellt ein Bausparvertrag eine vorzügliche Investition dar - mit dem Bausparer als Investitionsobjekt. Diese Investition hat außerdem die Vorteile, daß der Bausparer das Darlehen manchmal gar nicht in Anspruch nimmt und die Forderungen grundsätzlich gut abgesichert werden. Allerdings ist es für eine Bausparkasse letztlich sinnlos, die Rendite für einen einzelnen Vertrag in Betracht zu ziehen, da dessen Modalitäten, nämlich im wesentlichen der Zeitpunkt der Darlehens-Auszahlung, von ihren insgesamt zur Auszahlung zur Verfügung stehenden Mitteln abhängt. Für den Bausparer ist der interne Zinssatz jedoch ein Anhaltspunkt für die Güte seines Vertrags bzw. des Bauspar-Wesens überhaupt.[82]

81 Dies ist das Bauspardarlehen. Es wird meistens nicht genau an einem Laufzeit-Jahresende ausgezahlt und ist daher rechnerisch auf zwei Perioden zu verteilen.

82 Da beim Bausparen innerperiodische Zahlungen üblich und einflußreich sind, wird ein konkretes Beispiel erst in Abschnitt 4.3. (Beispiel 23) gerechnet.

Als weiteres Beispiel für eine Investition mit v=2 (und i. a. v"=2) führt Häußler[83] eine Geldanlage im Rahmen der sog. **Berlin-Förderung** an. Dabei besteht der Zahlungsstrom zunächst 15 Jahre lang nur aus Auszahlungen und danach 10 Jahre lang nur aus Einzahlungen. Das Entscheidende sind aber steuerliche Vergünstigungen, deren Einbeziehung in den Zahlungsstrom dazu führt, daß im ersten Jahr als Saldo letztlich doch eine Einzahlung vorliegt.[84, 85]

Beispiel 19: Stehen sich zwei Investitionen gegenüber, die beide den internen Zinssatz ∞ aufweisen, muß man ihre Wirtschaftlichkeit mit Hilfe weiterer Überlegungen vergleichen. In Fortsetzung von Beispiel 18 könnten diese Überlegungen folgendermaßen lauten:

Zwischen den beiden Zahlungsströmen a = (3mal 1.000; -7.000; 6mal 1.000; 2.000) und b = (3mal 1.000; -7.000; 7mal 1.000) besteht die Relation a gü b, aber nicht b gü a, und daher ist a die Investition, die man realisiert.

Zwischen den Zahlungsströmen c = (3mal 1.000; -7.000; 5mal 1.000; 0; 3.000) und b besteht die Relation 'gü' nicht. Hier könnte man noch nach der Kapitalwertmethode vorgehen. Für Kalkulationszinssätze bis 100 % ist Investition c und für höhere Zinssätze Investition b vorteilhafter. Man muß abschätzen, welchen Zinssatz man für realistisch hält, und schon hat man exogene Größen einbezogen und das Wesen des internen Zinssatzes verletzt.[86]

Eine weitere Möglichkeit, wie man die beiden Investitionen doch noch miteinander vergleichen kann, ist die Kopplung beider Investitionen mit einem weiteren fiktiven Zahlungstrom in der Weise, daß der Schwerpunkt der Auszahlungen nach vorne rückt und v = v" = 1 wird. Addiert man z. B. zu den Investitionen b und c jeweils den Zahlungsstrom (-8.000; 1.000; 1.000; 9.000), dessen interner Zinssatz 0,125 beträgt, dann erhält man bei Investition b als neuen Zahlungsstrom (-7.000; 3mal 2.000; 7mal 1.000) und bei Investition c als neuen Zahlungsstrom (-7.000; 3mal 2.000; 5mal 1.000; 0; 3.000) mit den internen Zinssätzen 0,1637 und 0,1718. Folglich ist Investition c vorzuziehen.

Abschließend sei nochmals hervorgehoben, daß man mit anderen hinzuzufügenden Zahlungsströmen zu anderen Ergebnissen kommen kann und daß man mit dieser Vorgehensweise denselben prinzipiellen Problemen wie mit der Kapitalwertmethode unterworfen ist.

83 Siehe Häußler, W. M., Unterjährige Zahlungen, S. B116 f.

84 Ein analoges Beispiel, bei dem die Einbeziehung steuerlicher Gesichtspunkte im Zahlungsstrom zusätzliche Vorzeichenwechsel hervorruft, diskutieren Pratt, J. W., Hammond, J. S. III., Evaluating Projects, S. 1231 ff.

85 Für den gewöhnlichen Bausparer spielen heutzutage steuerliche Gesichtspunkte lange nicht die Rolle, die häufig suggeriert wird.

86 Zur Problematik der Kapitalwertmethode siehe Abschnitt 4.4.

Beispiel 17: Hosterbach & Seifert[80] betrachten schließlich noch den Zahlungsstrom (−100.000; 280.000; −267.240; 98.168; −11.024) mit der Gesamtsumme −96 sowie den Nullstellen −0,8; −0,5; 0,04 und 0,06. Von diesen sind zwar −0,5 und 0,06 isoton, aber nur die Nullstelle −0,5 ist zulässig. Da die Autoren das Vorzeichen der Gesamtsumme nicht beachten, kommen sie zu dem offensichtlich unrichtigen Ergebnis, den internen Zinssatz 0,06 zu setzen.

Tatsächlich liegt eine ungünstige Investition vor:

- Bei Variante A muß man den gesamten Zahlungsstrom mit −1 multiplizieren. Dann erhält man eine positive Gesamtsumme und dieselben Nullstellen wie bisher. Allerdings sind jetzt die Nullstellen −0,8 und 0,04 isoton, und nur 0,04 ist zulässig. Diese Nullstelle und nur diese ist der interne Zinssatz (bei vertauschter Rolle von Investor und Investitionsobjekt).
- Bei Variante B ist als interner Zinssatz direkt −0,5 zu wählen.

In beiden Varianten ist der interne Zinssatz brauchbar.

In den Beispielen 16 und 17 erhält man bei Variante A und bei Variante B Ergebnisse mit erheblich unterschiedlichen Größenordnungen. Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß die beiden Varianten nicht dafür gedacht sind, miteinander verglichen zu werden. Jede für sich ist stimmig; man muß sich für eine von beiden entscheiden und alle Überlegungen in dieser durchführen. Variante A hat den Nachteil, daß hier u. U. Maschinen als Investoren interpretiert werden müssen. Variante B hat den Nachteil, daß negative Zinssätze mit einigen Konsequenzen unseren Vorstellungen vom Kapitalwachstum zuwiderlaufen. Ein interner Zinssatz ∞, d. h. die Existenz günstiger Investitionen, bei denen mit keinem noch so hohen Zinssatz die aufgezinsten Einzahlungen durch die aufgezinsten Auszahlungen ausgeglichen werden können, ist nicht so abwegig, wie es nach Beispiel 10 zunächst erscheinen mag.

Beispiel 18: Es wird eine Schar von Investitionen betrachtet, deren Einzahlungsströme alle gleich sind; von der Periode 0 bis zur Periode 10 betragen die Einzahlungen jeweils 1.000. Diesen steht eine Auszahlung von −8.000 gegenüber, die in zwei Teilzahlungen zu zwei hintereinander liegenden Zeitpunkten zerlegt ist und deren Schwerpunkt sich in der Schar immer weiter nach hinten verschiebt. Notiert man diese Verschiebung in 1.000er-Schritten, ergibt sich die folgende Schar:

(−7.000; 1.000; 1.000; ... ; 1.000)
(−6.000; 0; 1.000; ... ; 1.000)
(−5.000; −1.000; 1.000; ... ; 1.000)
⋮

80 Siehe Hosterbach, E., Seifert, O., Zur Mehrdeutigkeit, S. 878 f.

(1.000; −7.000; 1.000; ... ; 1.000)
(1.000; −6.000; 0; ... ; 1.000)
(1.000; −5.000; −1.000; ... ; 1.000)
⋮
(1.000; 1.000; 1.000; ... ; −7.000)

Offensichtlich werden die Investitionen immer günstiger. Findet die Auszahlung komplett zu einem einzigen Zeitpunkt k statt, dann beträgt der interne Zinssatz x_0:

k	0	1	2	≥ 3
x_0	0,0707	0,0937	0,1465	∞

Verteilt man hingegen die Auszahlung auf die Zeitpunkte 2 und 3, wobei α $(-8.000 \leq \alpha \leq 0)$ zum Zeitpunkt 3 und $-8.000-\alpha$ zum Zeitpunkt 2 ausgezahlt wird, dann beläuft sich der interne Zinssatz x_0, wie Abbildung 7 veranschaulicht, auf:

α	0	−2.000	−4.000	−4.700	−4.757	−4.757,085915..	≤−4.757,085916
x_0	0,1465	0,1744	0,2323	0,2992	0,3301	0,331410	∞

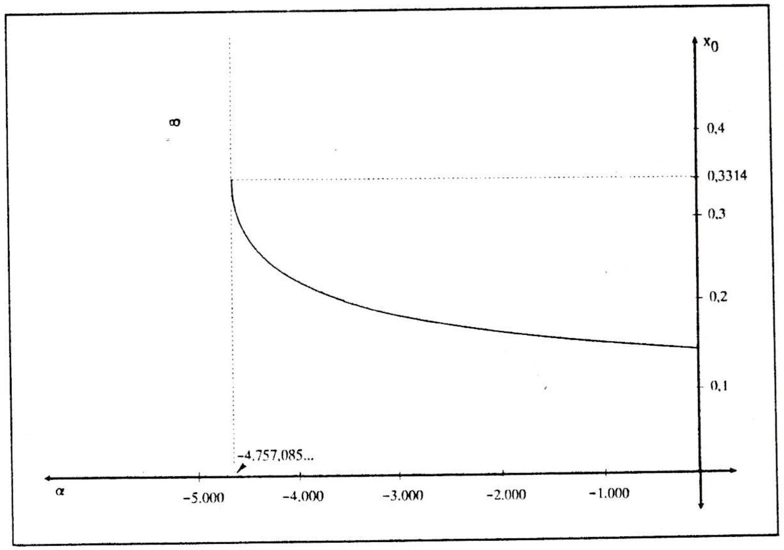

Abbildung 7

aufweisen. Diese 'leichte' Beseitigung der Mehrdeutigkeit ist für ihn ein Beleg für die **generelle** Brauchbarkeit des internen Zinssatzes. Sein Beispiel[72] lautet:

Beispiel 15: Die Investition a = (−1.000.000.000; 5.900.000.000; −13.923.500.000; 16.428.550.000; −9.691.800.240; 2.286.936.288) besitzt die Gesamtsumme 186.048, das Volumen 49.230.786.528 und die Nullstellen 0,16; 0,17; 0,18; 0,19; 0,20, von denen die erste, dritte und letzte zulässig sind. Eine Erhöhung bzw. Verminderung von a_5 um lediglich 0,37 führt zu Investitionen mit nur einer positiven (zulässigen) Nullstelle, nämlich 0,20121 bzw. 0,15879.[73]

Daß, wie in Beispiel 15, bei einer Investition mit einem Volumen von über 49 Mrd. eine Änderung von insgesamt knapp 0,74 eine Schwankung des internen Zinssatzes um über 4 % hervorruft,[74] spricht eher gegen die Brauchbarkeit des internen Zinssatzes bei solchen Investitionen.

Wenn man sich an den finanzmathematischen Umgang mit Zahlungsströmen mit kleinen Gesamtsummen und großen Volumina gewöhnt hat, erscheint es möglicherweise plausibel und akzeptabel, daß der interne Zinssatz in gewissen Bereichen auf kleine Änderungen stark reagiert[75] - jedenfalls so lange Stetigkeit herrscht. Falls allerdings Unstetigkeitsstellen auftreten, so kann man diese wohl mathematisch erklären; aber ökonomisch ist es sinnlos, wenn z. B. bei einer Investition jede, noch so kleine, Steigerung einer Zahlung zu einem Wachstum des Zinssatzes um (wie hier) mindestens 4 % führt.[76]

Hosterbach & Seifert[77] betrachten einen bestimmten Zahlungsstrom, variieren diesen und analysieren die Nullstellenmenge im Bereich $x > -1$, wobei sie mit Recht auf die Nullstellen betrachten, die im Sinne von Definition 1 zulässig sind. Isotonie abstellen und nur Nullstellen betrachten, die im Sinne von Definition 1 zulässig sind. Allerdings gelingt ihnen keine vollständige Systematisierung, weil sie im wesentlichen nur dieses eine Beispiel behandeln, vor allem aber, weil sie den ausschlaggebenden Einfluß des **Vorzeichens der Gesamtsumme** übersehen.

Beispiel 16: Die Investition a = (−3.000; 15mal 1.000) hat eine Laufzeit von 15 Perioden und besitzt den transformierten Zahlungsstrom (−3.000; −44.000; −300.000; −1.260.000; −3.640.000; −7.644.000; −12.012.000; −14.300.000; −12.870.000; −8.580.000; −4.004.000; −1.092.000; 0; 140.000; 60.000; 12.000). Nach 11 Jahren erfolgt nun eine zusätzliche (Aus-) Zahlung α, deren Höhe von 0 bis −13.500 variiert. Der transformierte Zahlungsstrom

72 Dieses Beispiel ist hier leicht abgewandelt, indem sämtliche Einträge mit 1.000 vervielfacht sind.

73 Vergleiche auch Abbildung 1 zu Beispiel 1: Bei einem Volumen von 644 Mrd. bringt eine Erhöhung von a_{10} um knapp 0,2 oder eine Verminderung von a_{10} um knapp 1,3 die Nullstellen x_3, x_4, x_5 und x_6 zum Verschwinden und überführt den Zahlungsstrom in einen Bereich, in dem der interne Zinssatz brauchbar ist.

74 Dies ist ein Hinweis auf Unstetigkeitsstellen im tangierten Bereich.

75 Siehe auch die Beispiele 5, 11, 18 und 23.

76 Vergleiche die Erläuterungen zu Definition 2.

77 Siehe Hosterbach, E., Seifert, O., Zur Mehrdeutigkeit, S. 867 ff.

lautet dann (a''_0; a''_1; ...; a''_{10}; $a''_{11}+\alpha$; $a''_{12}+4\cdot\alpha$; $a''_{13}+6\cdot\alpha$; $a''_{14}+4\cdot\alpha$; $a''_{15}+\alpha$) mit der Gesamtsumme $a''_{15}+\alpha$. Für $\alpha > -12.000$ ist die Investition günstig, für $\alpha = -12.000$ neutral und für $\alpha < -12.000$ ist sie ungünstig. Man kann diese drei Fälle zwar kontinuierlich ineinander überführen, sie sind aber prinzipiell verschieden gelagert; bei diesem Übergang ändert sich der interne Zinssatz **nicht stetig**.

Für $\alpha > -12.000$ ist $v'' = 1$, und nach Satz 1 existiert genau eine zulässige Nullstelle. Der interne Zinssatz ist also brauchbar, und zwar nimmt er von 0,3286 bis 0,2132 ab, wenn α von 0 bis −12.000 sinkt. Für $\alpha = -12.000$ ist der interne Zinssatz 0, und für $\alpha < -12.000$ ist folgendermaßen zu verfahren (vgl. Abbildung 6):

Variante A: Bei vertauschten Rollen von Investor und Investitionsobjekt ist $v'' = 2$. Wenn α von −12.000 bis −13.283,9848504... sinkt, wächst der interne Zinssatz von 0 bis 0,134475 und ist für noch kleinere α schließlich ∞ zu setzen.

Variante B: Es ist $v = 3$ und $v'' = 2$. Demzufolge liegt im Intervall]−1;0[genau eine Nullstelle, und der interne Zinssatz ist brauchbar. Sinkt α von −12.000 bis −13.500, dann fällt der interne Zinssatz von −0,2326 bis −0,2924.[78, 79]

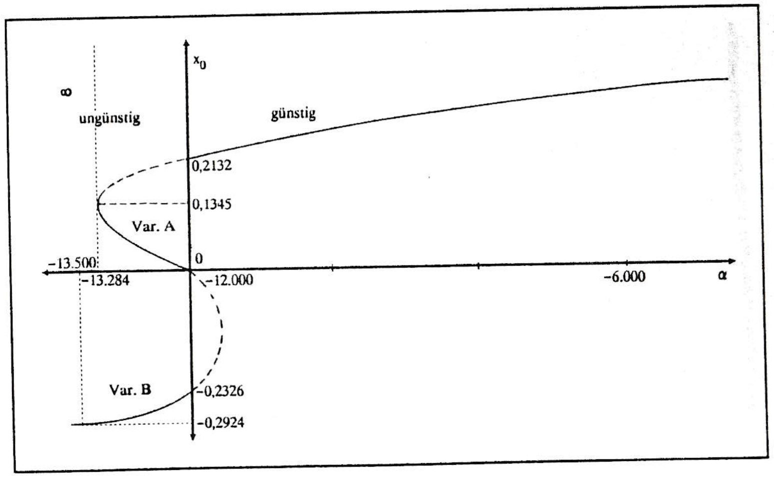

Abbildung 6

78 Der Wert −0,2924 wäre bei Hosterbach, E., Seifert, O., Zur Mehrdeutigkeit, in der Zeile 'S_2' der Tabelle auf S. 869 noch für Y_2 einzusetzen.

79 Die Autoren nehmen an ihrem Beispiel weitere Variationen vor, die man alle gemäß Abschnitt 4.1. zu behandeln hat.

Beispiel 14: Der Zahlungsstrom (−1.000.000; 6.700.000; −18.570.000; 27.245.000; −22.309.400; 9.664.080; −1.729.728) mit der Gesamtsumme −48 und $v=6$ Vorzeichenwechseln hat den transformierten Zahlungsstrom (−1.000.000; 700.000; −70.000; −35.000; 5.600; 280; −48) mit $v''=4$ Vorzeichenwechseln. Im Bereich]−1;0[existieren nach dem Satz von Fourier-Budan[62] höchstens 2 Nullstellen.[63] Der interne Zinssatz ist brauchbar. Die beiden Nullstellen lauten −0,2 und −0,1 ; folglich beträgt der interne Zinssatz −0,1 .[64]

4. Anwendungen

4.1. Die praktische Bestimmung des internen Zinssatzes

Für die Bestimmung eines internen Zinssatzes genügt es nicht, die kleinste positive Nullstelle des Zahlungsstroms zu berechnen. Man muß vielmehr **vorher** feststellen, ob die Investition günstig ist oder nicht, und **nachher**, ob sie mehrere zulässige Nullstellen besitzt, d. h., ob die kleinste Nullstelle im Sinne von Definition 2 brauchbar ist oder nicht. Um dies zu bewerkstelligen, ermittelt man zunächst mit Hilfe des Zahlungsstroms $(a_k)_k$ die Gesamtsumme a'_n. Je nachdem, ob diese positiv, null oder negativ ist, ist die Investition günstig, neutral oder ungünstig.

- Bei **neutralen** Investitionen ist der interne Zinssatz 0 zu setzen, und man erhält somit keine weitere Information.

- Bei **nicht neutralen** Investitionen beginnt man günstigerweise nicht direkt mit dem Ausrechnen von Nullstellen, sondern verschafft sich mit Hilfe der Vorzeichen-Kriterien[65] zunächst einen Anhaltspunkt, ob überhaupt Nullstellen in den relevanten Bereichen]−1;0[bzw. $\mathbf{R}^+$ existieren und ob dort mehrere Nullstellen liegen können.

  ~ Bei **günstigen** Investitionen ermittelt man die Zahlen v, v' und v'' der Vorzeichenwechsel im ursprünglichen, kumulierten und transformierten Zahlungsstrom und die Zahl m der positiven Nullstellen (in dieser Reihenfolge).[66] Sobald sich eine dieser Zahlen als ≤ 2 erweist, ist die Brauchbarkeit des internen Zinssatzes festgestellt. Sobald eine dieser Zahlen 0 ist, ist der interne Zinssatz ∞ zu setzen. Andernfalls ist die kleinste positive Nullstelle als interner Zinssatz zu wählen. Für $m \geq 3$ sollte man sich einen Überblick über alle zulässigen Nullstellen verschaffen und beachten, daß die Brauchbarkeit durch das Fehlen der Stetigkeit relativiert ist.

  Zur Berechnung der Anzahl m der Nullstellen und der einzelnen Nullstellen selbst kann man z. B. die Vorzeichenwechsel-Anzahlen in der Sturmschen Kette

62 Siehe Henrici, P., Complex Analysis, S. 443.
63 Der Wert 2 ergibt sich als Differenz aus v und v''.
64 Wie im allgemeinen zur Ermittlung des internen Zinssatzes vorzugehen ist, wird in Abschnitt 4.1. beschrieben.
65 Diese sind: Die Kartesische Vorzeichenregel - siehe beispielsweise Henrici, P., Complex Analysis, S. 439 ff. - und der Satz von Fourier-Budan - siehe Henrici, P., Complex Analysis, S. 443.
66 Mit ihrer Vielfachheit gezählt.

für das Polynom p'' und dessen Ableitung dp''/dx bestimmen. Dies führt man zuerst in $x=1$, dann an einer Stelle x, die so groß zu wählen ist, daß man sicher sein kann, daß sie größer ist als alle Nullstellen, und schließlich an den durch Bisektion ermittelten Stellen durch. Dabei erhält man mit einer geeigneten Erweiterung dieses Verfahrens auch die Vielfachheiten, und damit m.[67]

  ~ Bei **ungünstigen** Investitionen multipliziert man in **Variante A** den Zahlungsstrom mit −1, vertauscht also die Rollen von Investor und Investitionsobjekt, und geht dann so vor wie bei günstigen Investitionen.

  In **Variante B** braucht man einen Überblick über die Nullstellen im Intervall]−1;0[. Nach dem Satz von Fourier-Budan ist deren Anzahl z nach oben beschränkt durch die Differenz $v - v''$ aus den Vorzeichenwechsel-Anzahlen des ursprünglichen und des transformierten Zahlungsstroms. Man bestimmt also die Werte v, $v - v''$ und z (in dieser Reihenfolge). Sobald sich eine dieser Zahlen als ≤ 2 erweist, steht fest, daß der interne Zinssatz brauchbar ist. Sobald eine dieser Zahlen 0 ist, ist der interne Zinssatz −1 zu setzen. Andernfalls ist die größte negative Nullstelle als interner Zinssatz zu wählen. Für $z \geq 3$ sollte man sich wiederum zunächst einen Überblick über alle zulässigen Nullstellen verschaffen und beachten, daß die Brauchbarkeit durch das Fehlen der Stetigkeit relativiert ist. Bei der Sturmschen Kette mit dem Polynom p und dessen Ableitung dp/dx sind die Vorzeichenwechsel an den Stellen $x=-1$, $x=0$ und den durch Bisektion ermittelten Stellen zu betrachten.[68]

Möchte man zwei Zahlungsströme vergleichen, die als internen Zinssatz beide ∞ oder beide −1 besitzen, die also durch diesen nicht unterschieden werden, so sind weitere Überlegungen erforderlich. Wenn nicht sowieso die eine Investition im Sinne der Definitionen 6 und 8 offensichtlich günstiger ist als die andere, dann kann man durch gleichartige Veränderungen der beiden Zahlungsströme[69] unterschiedliche interne Zinssätze erzeugen.[70] Allerdings können unterschiedliche Manipulationen u. U. zu verschiedenen Ergebnissen führen, so daß allenfalls die Empfehlung ausgesprochen werden kann, die fiktiven Veränderungen nicht willkürlich, sondern möglichst realitätsnah vorzunehmen. Hierbei zeigt sich wieder einmal, daß sich eine Wirtschaftlichkeitsprüfung über eine einzelne Investition hinaus auf das gesamte Gefüge von Investitionen und Finanzierungen eines Betriebes erstrecken muß.

4.2. Beispiele aus der Praxis und Re-Analyse von Beispielen aus der Literatur

Meyer[71] bemerkt zutreffend, daß bei einer Investition mit mehreren zulässigen Nullstellen im allgemeinen bereits kleine Änderungen des Zahlungsstroms (im Vergleich zum Volumen) hinreichen, um zu Investitionen zu gelangen, die nur eine zulässige Nullstelle

67 Siehe beispielsweise Henrici, P., Complex Analysis, S. 444 ff.
68 Siehe beispielsweise Henrici, P., Complex Analysis, S. 444 ff.
69 Zum Beispiel durch Verschiebung von Auszahlungen nach vorne, durch Hinzufügen von Einzahlungen o. ä.
70 Siehe Beispiel 23.
71 Siehe Meyer, H., Fragwürdigkeit, S. 54 ff., insbesondere S. 58 f.

3.7.3. Satz 3A

Geht man bei der Einbeziehung nicht günstiger Investitionen nach Variante A vor, so macht man die Entscheidung darüber, ob **X** oder **Y** [60] als Investor aufzufassen ist, allein vom Zahlungsstrom abhängig und nicht von irgendwelchen exogenen Status-Definitionen der Beteiligten. Bei allen Investitionen a mit $a'_n > 0$ ist **X** der Investor, bei allen Investitionen a mit $a'_n < 0$ ist **Y** der Investor, und bei neutralen Investitionen sind beide Setzungen möglich, wobei es keine Rolle spielt, welche Wahl getroffen wird. Ist **Y** z. B. eine Maschine, so muß diese fiktiv personifiziert bzw. verselbständigt werden. Gilt nun für eine Investition, daß $a'_n < 0$ und damit **Y** der Investor ist, so bedeutet dies, daß im Zahlungsstrom die Rollen von Ein- und Auszahlungen zu vertauschen sind, d. h., daß der ganze Zahlungsstrom mit -1 zu multiplizieren ist. Damit hat man die ungünstige Investition in eine günstige Investition mit **Y** als Investor verwandelt und kann die entsprechenden Abschnitte sowie die Sätze 1 und 2 wortwörtlich anwenden.

Beispiel 12: Für den Zahlungsstrom $(-100; 90)$ ist $n=1$ und $a'_n = -10 < 0$. Bei Variante A ist er mit -1 zu multiplizieren, und der neue Zahlungsstrom $(100; -90)$ wird als günstige Investition für **Y** aufgefaßt. Da dieser keine zulässige Nullstelle besitzt, ist der interne Zinssatz für **Y** als Investor (!) folglich ∞ zu setzen. In der Tat liegt eine vorzügliche Investition für **Y** vor, wenn **Y** am Anfang eine Einzahlung in Höhe von 100 erhält und am Ende nur eine Auszahlung in Höhe von -90 leisten muß. Diese Investition ist z. B. wesentlich günstiger als eine Investition, bei der die Auszahlung am Anfang und die Einzahlung am Ende stattfindet und bei der der interne Zinssatz bereits 0,1111 beträgt. Man betrachte dazu die Schar von Zahlungsströmen $(-90+190 \cdot t; 100-190 \cdot t)$ (für $0 \le t \le 1$), in der die Investitionen von $(-90; 100)$ bis $(100; -90)$ immer günstiger werden und der interne Zinssatz streng monoton wächst, bis bei $t = 9/19$ die Investition $(0; 10)$ erreicht ist, ab der der interne Zinssatz ∞ beträgt.

Nimmt man neutrale Investitionen hinzu, so entstehen beim Übergang von günstigen zu ungünstigen Investitionen Unstetigkeitsstellen:

Beispiel 13: Man betrachte eine Schar von Investitionen, deren transformierte Zahlungsströme $(100; -100; a''_2)$ lauten, wobei a''_2 in einer kleinen Umgebung von 0 variiert. Bei Variante A liegen eine neutrale Investition mit $(100; -100; 0)$ bzw. $(-100; 100; 0)$ sowie zwei Scharen mit $(100; -100; a''_2)$ und $(-100; 100; a''_2)$ vor, bei denen immer $a''_2 > 0$ gilt. Die internen Zinssätze lauten in der ersten Schar $0{,}5 - \sqrt{0{,}25 - 0{,}01 \cdot a''_2}$ und in der zweiten Schar $0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + 0{,}01 \cdot a''_2}$. Wenn a''_2 gegen 0 geht, dann nähern sich in der ersten Schar die Zinssätze dem Wert 0, und in der zweiten Schar nähern sie sich dem Wert 1 (vgl. Abbildung 5).

[60] Siehe Abschnitt 2.1.

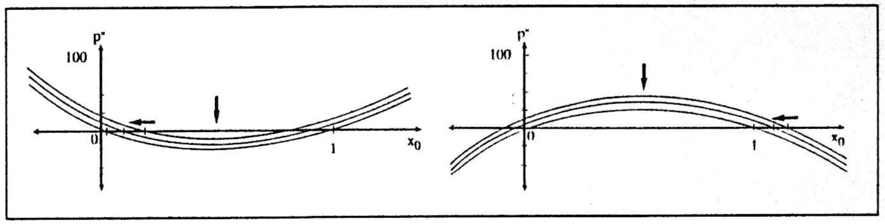

Abbildung 5

Beweis von Satz 3A:

Die Forderungen I und II aus der Brauchbarkeits-Definition sind trivialerweise erfüllt. Auch Forderung III ist erfüllt, wie man leicht sieht, wenn man zum einen Definition 7 berücksichtigt und zum anderen die Vertauschung der Rollen von Investor und Investitionsobjekt richtig interpretiert.

Eine Investition, die für das Investitionsobjekt günstig ist, ist für den Investor ungünstig. Sie hat dann zwar einen positiven internen Zinssatz,[61] dieser ist aber für den ursprünglichen Investor ungünstiger als etwa ein Zinssatz von 0. Eine entsprechende Anordnung auf der Zahlengeraden kann man sich folgendermaßen vorstellen: Von 0 nach rechts werden die Zinssätze abgetragen, die zu günstigen Investitionen gehören. Nach links werden die (ebenfalls positiven!) Zinssätze abgetragen, die ungünstigen Investitionen zuzuordnen sind. Diese darf man **nicht** mit einem Minuszeichen versehen und als negative Zahlen auffassen, da mit ihnen Gleichung (4) im allgemeinen nicht erfüllbar ist. Zur Unterscheidung von den nach rechts abgetragenen Zinssätzen könnte man sie mit dem Zusatz 'mit vertauschten Rollen von Investor und Investitionsobjekt' o. ä. bezeichnen. Mit der auf diese Weise hergestellten Ordnung ist dann der interne Zinssatz bei Variante A isoton.

Wie in Beispiel 13 dargestellt, treten jetzt die neutralen Investitionen als neue Unstetigkeitsstellen auf. Forderung IV der Brauchbarkeits-Definition bleibt dabei erfüllt.

3.7.4. Satz 3B

Auch hier trifft Forderung II definitionsgemäß zu, und der **Beweis**, daß auch die Forderungen I, III und IV erfüllt sind, ergibt sich direkt aus den Abschnitten 3.1. bis 3.6., insbesondere aus den Lemmata 3 und 4. Zu den Unstetigkeitsstellen mit dem Wert ∞ oder 0 kommen jetzt noch solche mit dem Wert -1 hinzu.

[61] Das ist gerade das Wesen von Variante A.

Beispiel 9: Schließlich kann man auch Fälle angeben, bei denen der Übergang zum transformierten Zahlungsstrom keinen Informationsgewinn mit sich bringt, etwa weil die Zahl m der positiven Nullstellen mit der Zahl v_a der Vorzeichenwechsel im ursprünglichen Zahlungsstrom übereinstimmt und sich darunter mehr als eine zulässige Nullstelle befindet. Der Zahlungsstrom (100.000; –450.000; 758.750; –568.125; 159.390) z. B. mit 4 Vorzeichenwechseln besitzt die 4 Nullstellen 0,05 ; 0,1 ; 0,15 und 0,2 , darunter die beiden zulässigen Nullstellen 0,05 und 0,15 .

3.7.2. Satz 2

Beweis für Aussage (a): Besitzt eine günstige Investition genau zwei verschiedene positive Nullstellen, so ist die kleinere der beiden zulässig und die größere nicht zulässig. Weist sie genau eine doppelte positive Nullstelle auf, so ist diese zulässig.[59] Ist genau eine einfache positive Nullstelle vorhanden, so ist diese zulässig. Gibt es endlich überhaupt keine positive Nullstelle, so wird nach Definition 3 der interne Zinssatz ∞ gesetzt.

Damit ist Forderung I (Existenz, Eindeutigkeit, Ordenbarkeit) aus der Brauchbarkeits-Definition erfüllt. Forderung II (Permanenz) ist die Grundlage von Definition 3 und damit automatisch erfüllt. Die Isotonie (Forderung III) wurde in Abschnitt 3.5. überprüft. Auch die Frage der eingeschränkten Stetigkeit (Forderung IV) ist in Abschnitt 3.5. abschließend diskutiert worden. Unstetigkeitsstellen können nur dort auftreten, wo doppelte positive Nullstellen vorliegen; an diesen Stellen geht aber der interne Zinssatz bei kleinen Veränderungen in Richtung günstigerer Investitionen direkt in den Wert ∞ über, weil keine weiteren positiven Nullstellen vorhanden sind.

Beweis für Aussage (b): Aussage (b) ist mit Beispiel 5 verifiziert.

Bei einer herkömmlichen günstigen Investition ist ein interner Zinssatz in Höhe von ∞ nicht möglich. Durch einen Grenzübergang kann man sich jedoch das Auftreten dieses Wertes plausibel machen.

Beispiel 10: Läßt man im Zahlungsstrom (a_0; 101) den Eintrag a_0 vom Wert -100 aus wachsen, dann wächst der interne Zinssatz $x_0 = -101/a_0 - 1$ von 0,01 aus über alle Grenzen. Für $a_0 \geq 0$ ist er ∞ zu setzen, da Investitionen mit einem solchen a_0 nur aus Einzahlungen bestehen und damit günstiger als jede Investition mit einem endlichen internen Zinssatz sind. Dieser Sachverhalt folgt nicht nur formal-mathematisch aus Definition 6, sondern auch aus inhaltlich-ökonomischen Überlegungen.

[59] Siehe Definition 1 und Abschnitt 3.5.

Bei 'vernünftigem' Verhalten von Investor und Investitionsobjekt ist ein solcher Zahlungsstrom, bei dem keine negativen Einträge vorkommen, nicht realistisch. Er liegt aber sehr wohl im Bereich des Möglichen. Beispielsweise treten dann keine negativen Einträge auf, wenn ein Investor schon Einzahlungen erhält, ehe er planmäßig Auszahlungen leistet, und dieser Plan durch plötzliche Zahlungsunfähigkeit des Investors vorzeitig abgebrochen wird. Auch infolge der in Abschnitt 4.3. diskutierten Verrechnungsmethode für unterjährige Zahlungsweisen kann ein solcher Zahlungsstrom entstehen, obwohl - ganz in herkömmlicher Weise - am Anfang eine Auszahlung erfolgt.

Während man in Beispiel 10 den Wert ∞ quasi als Grenzwert einer Folge von Zinssätzen, die über alle Grenzen wachsen, erhält, wird nun in Beispiel 11 eine andere Form des Übergangs von Investitionen mit endlichem internen Zinssatz zu solchen mit unendlichem internen Zinssatz beschrieben. In einer Schar von immer günstigeren Investitionen gelangt man an eine wohlbestimmte letzte Investition mit endlichem positivem internen Zinssatz; Investitionen, die in der Schar noch später folgen, erhalten den internen Zinssatz ∞.

Beispiel 11: Einem Einzahlungsstrom von (1.000; 1.000; 1.000) steht eine Auszahlung von –2.800 gegenüber. Es handelt sich also um eine günstige Investition. Ein Anteil $-t \cdot 2800$ der Auszahlung wird zum Zeitpunkt 0 und der Rest, nämlich $-(1-t) \cdot 2.800$, wird zum Zeitpunkt 1 geleistet (für ein t mit $0 \leq t \leq 1$). Der Zahlungsstrom lautet somit ($1.000 - t \cdot 2.800$; $-1.800 + t \cdot 2.800$; 1.000) und hat die Nullstellen 0,25 für $t = 5/14 \approx 0{,}3571$ und $(14 \cdot t - 1 \pm \sqrt{196 \cdot t^2 + 28 \cdot t - 19})/(10 - 28 \cdot t)$ für $t \neq 5/14$. Für $1 > t > 5/14$ ist eine der beiden Nullstellen negativ, für $5/14 > t > (\sqrt{20} - 1)/14 \approx 0{,}2480$ sind beide positiv, für $t = (\sqrt{20} - 1)/14$ ist die Nullstelle doppelt ($= (2 + \sqrt{20})/8$), und für kleinere positive t gibt es keine reellen Nullstellen.

t	1	0,7	0,5	≈0,3571	0,3	0,27	0,25	≈0,2480	<
x_0	0,0732	0,1074	0,1583	0,2500	0,3417	0,4477	0,6667	0,8090	∞

Dies ist ein typisches Beispiel für eine Schar günstiger Investitionen mit konstantem Einzahlungsstrom und sich immer mehr nach hinten verlagerndem Schwerpunkt der Auszahlungen. Läßt man den Parameter t kontinuierlich von 1 bis 0 laufen, so besitzt der Zahlungsstrom (ebenso der transformierte Zahlungsstrom) zunächst nur 1 Vorzeichenwechsel. Für $t > 9/14$ befindet sich dieser beim Eintrag 0 ; danach tritt er beim Eintrag 1 auf. Später (für $t < 5/14$) besitzen die Investitionen 2 Vorzeichenwechsel. Dabei wächst der interne Zinssatz kontinuierlich bis zu einem letzten Wert $x_0 \approx 0{,}8090$ für $t \approx 0{,}2480$. Wird der Parameter t schließlich noch kleiner, dann springt der interne Zinssatz auf den Wert ∞ und behält diesen bei allen Investitionen, die in der Schar noch folgen.

Folgende schwache Form der eingeschränkten Stetigkeit kann man erreichen, wenn man den internen Zinssatz als Intervall $[x_0; x_k]$ von der kleinsten bis zur größten zulässigen Nullstelle (von x_0 bis x_k) definiert. Ist a eine Investition mit dem internen Zinssatz $[x_{0a}; x_{k_a a}]$, dann gilt für jede, beliebig kleine, positive Zahl ε : Investitionen b in der Nähe der Investition a besitzen entweder den internen Zinssatz ∞, oder es ist $[x_{0b}; x_{k_b b}] \cap [x_{0a} - \varepsilon; x_{k_a a} + \varepsilon] \neq \phi$. - Stetige Abhängigkeit der Intervallgrenzen vom Zahlungsstrom ist nur dann gesichert, wenn diese keine Nullstellen gerader Ordnung sind, d. h. im Normalfall.

Das Liften von stetigen Wegen in **B** nach **M** ist aber in solchen Punkten (a"; x) unproblematisch, d. h. wiederum stetig möglich, in denen $dp_{a"}/dx(x) \neq 0$, d. h., in denen x einfache Nullstelle von $p_{a"}$ ist.[54] Denn dort existiert eine offene Umgebung des Punktes (a"; x), die durch die Projektion auf **B** homöomorph auf eine offene Umgebung von a" abgebildet wird.[55]

$\mathbf{B}_m$ (für eine natürliche Zahl m mit $0 \leq m \leq n$) sei nun die Menge der günstigen Investitionen mit Laufzeit n (also $a"_0 \neq 0$) und höchstens m Nullstellen.[56] $\mathbf{B}_m$ ist offene Teilmenge in **B**, was sich folgendermaßen einsehen läßt: $a" \in \mathbf{B}_m$ sei ein transformierter Zahlungsstrom mit höchstens m Nullstellen, und sein Polynom $p_{a"}$ sei faktorisiert, d. h. als maximal zerlegtes Produkt von m Linearfaktoren mit positiver reeller Nullstelle, z Linearfaktoren mit negativer reeller Nullstelle und $(n-m-z)/2$ reellen quadratischen Faktoren geschrieben.[57] Mit einer kleinen Änderung der Einträge $a"_k$, bei der insbesondere $a"_0 \neq 0$ bleibt, könnte man m nur vergrößern, wenn sich dabei ein quadratischer Faktor in das Produkt zweier linearer Faktoren verwandeln würde. Dazu müßten die Imaginärteile der konjugiert komplexen Nullstellen des quadratischen Faktors gegen 0 gehen, wodurch an der Stelle des Übergangs zwei gleiche Linearfaktoren, d. h. eine doppelte Nullstelle, entstünden. Dies bedeutet, daß eine ganze Umgebung von a" existiert, in der m nicht größer ist als in a" selbst.

Nun werde die Menge **B** noch weiter eingeschränkt, und zwar auf $\mathbf{B}_2$. Dort kommen neben Investitionen ohne positive Nullstellen (mit dem internen Zinssatz ∞) nur solche Unstetigkeitsstellen vor, die genau zwei identische positive Nullstellen haben. In beliebiger Nähe einer solchen (transformierten) Investition a" liegen nur Investitionen mit genau 2 und solche mit genau 0 Nullstellen. Jeder stetige Weg in $\mathbf{B}_2$, der von dieser Investition a" seinen Ausgang nimmt und auf dem die Investitionen immer günstiger werden, führt direkt auf solche Investitionen, die keine positiven Nullstellen besitzen, und damit auf den internen Zinssatz ∞. Im Teilraum $\mathbf{B}_1$ schließlich ist der interne Zinssatz komplett stetig.

Geht man nun zur Menge der nicht günstigen Investitionen über, brauchen **neutrale** Investitionen nicht weiter untersucht zu werden, da ihr interner Zinssatz einheitlich 0 gesetzt ist. Bei **ungünstigen** Investitionen schließlich ergibt sich in Variante A gegenüber günstigen Investitionen nichts Neues. Auch in Variante B ist ähnlich wie bei günstigen

54 Siehe Abbildung 3.
55 Dieser Sachverhalt ist die Essenz des Theorems über implizite Funktionen. Vergleiche Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, S. 286 ff.
56 Mit der Vielfachheit gezählt.
57 Wegen $a"_n > 0$ kommt 0 als Nullstelle nicht in Frage.

Investitionen vorzugehen. Nur ist die Basis **B** jetzt identisch mit dem Raum $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^-$, und der Gesamtraum, in dem die Nullstellen-Mannigfaltigkeit untersucht wird, hat die Form $\mathbf{B} \times]-1;0[$, mit prinzipiell derselben Struktur wie bei günstigen Investitionen.

3.7. Beweise und Erläuterungen der Sätze

3.7.1. Satz 1

Beweis: a sei eine günstige Investition, d. h. $a"_n > 0$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_0 \neq 0$. Nach Abschnitt 3.1. gilt die Ungleichungskette $v_{a'} \geq v_{a"} \geq m \geq 0$, und die Differenzen $v_{a'} - v_{a"}$ sowie $v_{a"} - m$ sind gerade Zahlen. Aus der Voraussetzung $v_{a'} = 1$ (a) folgt daher die Gleichheit $v_{a"} = 1$ (b) und daraus $m = 1$. Ist also eine der Voraussetzungen (a) oder (b) erfüllt, dann hat die Investition genau eine positive Nullstelle, und diese ist nach Abschnitt 3.5. zulässig.

Satz 1 hat folgenden Gehalt: Auch wenn in einem Zahlungsstrom nicht alle Auszahlungen vor allen Einzahlungen stattfinden, also mehrere Vorzeichenwechsel auftreten und somit keine herkömmliche Investition vorliegt, braucht es nur eine zulässige Nullstelle zu geben. Dies ist dann der Fall, wenn die späteren Auszahlungen oder die früheren Einzahlungen ein so geringes Volumen aufweisen, daß sie bei der Kumulierung oder spätestens bei der Transformation 'verschluckt' werden. Aus Satz 1 folgen sofort die "Eindeutigkeitsbedingungen 2", "3a" und "3b" aus der Arbeit von Witten & Zimmermann.[58] Er ist aber schärfer als diese Bedingungen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 6: Der Zahlungsstrom (−1; 4; −2; 1; −2; 1) mit 5 Vorzeichenwechseln erfüllt alle diese Eindeutigkeitsbedingungen nicht. Da der kumulierte Zahlungsstrom (−1; 3; 1; 2; 0; 1) nur 1 Vorzeichenwechsel aufweist und $a'_5 \neq 0$ ist, existiert dennoch nur eine zulässige Nullstelle.

Beispiel 7: Kriterium (a) reicht jedoch manchmal nicht aus, und man benötigt für den Nachweis, daß nur eine zulässige Nullstelle vorliegt, zusätzlich Kriterium (b). Bei dem Zahlungsstrom (−1; 4; −7; 6; 1; −1) weist der kumulierte Zahlungsstrom (−1; 3; −4; 2; 3; 2) immer noch 3 Vorzeichenwechsel auf. Erst die Betrachtung des transformierten Zahlungsstroms (−1; −1; −1; −1; 3; 2) mit 1 Vorzeichenwechsel liefert die geforderte Eindeutigkeit.

Beispiel 8: Auch Kriterium (b) ist nicht scharf. Der Zahlungsstrom (−1.000; 3.500; −4.090; 1.595) besitzt den transformierten Zahlungsstrom (−1.000; 500; −90; 5). Obwohl dieser 3 Vorzeichenwechsel aufweist, existiert nur die eine zulässige Nullstelle $x_0 = 0{,}1$. Dies folgt direkt daraus, daß das Polynom $p_{a"}$ in $\mathbf{R}^+$ streng monoton fallend ist.

58 Siehe Witten, P., Zimmermann, H.-G., Eindeutigkeit, S. 105 und S. 107.

zugelassen sind. Mit Hilfe der Koeffizienten a''_k des transformierten Zahlungsstroms wird diese Menge mit $\mathbf{R}^{n+1}$ identifiziert.[50]

Im Raum $\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}$ werden alle Punkte $(a'';x)$ betrachtet, für die x eine Nullstelle des (transformierten) Zahlungsstroms $a''=(a''_0;a''_1;...;a''_n)$ ist. Die Menge aller dieser Punkte ist die genaue Nullstellenmenge des Polynoms $p(a'';x):=p_{a''}(x)$ in den $n+2$ Variablen $a''_0, a''_1, ..., a''_n, x$. Der Gradient[51] $(x^n; x^{n-1}; ...; x; 1; dp_{a''}/dx(x))$ dieses Polynoms verschwindet nirgends in $\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}$, und daher ist diese Menge $p^{-1}(0)$ eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.[52] Der Raum $\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}$ wird nun zweimal eingeschränkt: Es werden nur positive Nullstellen und nur **günstige** Investitionen betrachtet. Es sei also $\mathbf{B}:=\{a''\,|\,a''_n>0\}$ $(=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+)$ **Basis** und $\mathbf{M}:=p^{-1}(0)\cap\mathbf{B}\times\mathbf{R}^+$ die Einschränkung der o. a. Mannigfaltigkeit, die ebenfalls eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

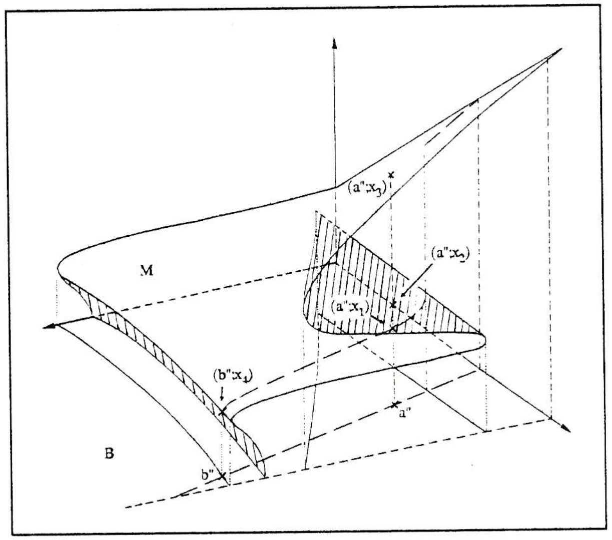

Abbildung 3

[50] Nach Ausscheiden des Zahlungsstroms (0; 0; ...; 0) könnte man stattdessen auch die Klassen ähnlicher Investitionen betrachten und mit der Sphäre S^n identifizieren. Diese Unterscheidung zwischen Investitionen und Ähnlichkeitsklassen ist jedoch im folgenden nicht wesentlich, so daß mit dem Raum $\mathbf{R}^{n+1}$ und nicht mit S^n gearbeitet wird.

[51] Das ist der Vektor, dessen Einträge von den Ableitungen des Polynoms nach den Variablen $a''_0, a''_1, ..., a''_n$ und x gebildet werden.

[52] Damit ist i. w. ausgesagt, daß die lokale Struktur der Fläche $p^{-1}(0)$ überall gleichwertig zum gewöhnlichen Raum $\mathbf{R}^{n+1}$ ist, daß also keine Singularitäten auftreten. Die Begründung ergibt sich unmittelbar aus dem Theorem über implizite Funktionen. Siehe Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, S. 286 ff.

Diese Mannigfaltigkeit kann man sich, wie in Abbildung 3 zu sehen, als Blätter über der Basis **B** liegend vorstellen. Über einem Punkt in **B** liegen höchstens n Punkte von **M**. Hat man einen stetigen Weg[53] in **M** festgelegt, so ist auch seine Projektion auf **B** ein stetiger Weg. Einen stetigen Weg in **B** kann man aber nicht immer zu einem ebensolchen in **M** liften. Es ist möglich, daß sich über $a''\in\mathbf{B}$ kein Punkt in **M** befindet. Dies ist gleichbedeutend damit, daß Gleichung (5) keine positive Lösung besitzt. Es ist aber auch möglich, daß eine Unstetigkeitsstelle auftritt und daß man den Weg von einem Blatt von **M** auf ein anderes fortsetzen muß.

Beispiel 5: Ein solcher in **B** stetiger, aber nicht stetig liftbarer Weg (mit $n=3$) ist die Schar $a''_t:=(-1.000; 400; -50; a''_3)_t$, wobei $a''_3>0$ stetig wachsen soll. Beim Liften zum Weg $(-1.000; 400; -50; a''_3; x)_t$ in **M** tritt für a''_3 zwischen den Werten $50/27$ und 2 eine Unstetigkeitsstelle auf. Für $a''_3<50/27$ ist die Nullstelle $x_1:=x$ eindeutig bestimmt und hängt stetig, streng monoton wachsend, von a''_3 ab. Für $50/27\le a''_3\le 2$ sind mehrere Nullstellen vorhanden. Wählt man in diesem Bereich immer die kleinste Nullstelle aus, dann kann man damit die Funktion $x_1(a''_3)$ stetig bis $a''_3=2$ fortsetzen. Für $a''_3>2$ ist die Nullstelle $x_2:=x$ ebenfalls eindeutig bestimmt und hängt stetig, wiederum streng monoton wachsend, von a''_3 ab. Wählt man im Uneindeutigkeits-Bereich zwischen $50/27$ und 2 die größte Nullstelle aus, dann kann man damit die Funktion $x_2(a''_3)$ stetig vom Wert $a''_3=2$ aus bis nach $50/27$ fortsetzen. Für alle a''_3 innerhalb dieses Bereichs gilt aber $x_2(a''_3)>x_1(a''_3)$, so daß x_1 nicht stetig mit x_2 fortgesetzt werden kann. Dies wäre aber notwendig, wenn man a''_3, ausgehend von einem Wert in der Nähe von 0, über 2 hinaus wachsen lassen möchte (vgl. Abbildung 4).

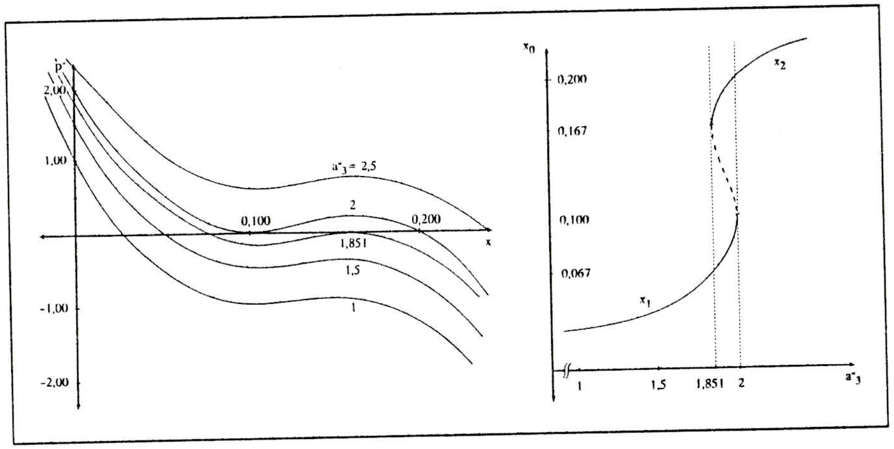

Abbildung 4

[53] Ein stetiger Weg ist eine stetige Abbildung $\mathbf{I}\to\mathbf{M}: t\to(a'';x)_t$, wobei **I** das offene, halboffene oder abgeschlossene Einheitsintervall ist.

Beweis: n sei das Maximum der Laufzeiten der beiden Investitionen a und b. Die Differenz-Investition $c:=a-r\cdot b$ besitzt den kumulierten (bzw. rückwärts kumulierten) Zahlungsstrom $c'=a'-r\cdot b'$ (bzw. $c^*=a^*-r\cdot b^*$) und das Polynom $p_c=p_a-p_{r\cdot b}$, wobei r der in der Voraussetzung angenommene Wert ist. Dann gilt $c'_k\geq 0$ (bzw. $c^*_k\geq 0$) (für $k=0,1,\dots,n$) und $c'_{k_0}>0$ (bzw. $c^*_{k_0}>0$) für denjenigen Index k_0, der in der Voraussetzung ausgezeichnet wurde. Zu zeigen ist noch, daß die Ungleichung $p_c(1+x)>0$ im Bereich $\mathbf{R}^+$ (bzw. $]-1;0[$) gilt.

(a) Für $x>0$ gilt: $\quad p_c(1+x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} +$

$c'_0\cdot(1+x)^n \geq \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c'_0\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} +$

$c'_1\cdot(1+x)^{n-1} \geq \sum_{k=2}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c'_1\cdot(1+x)^{n-2} = \sum_{k=3}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} +$

$c'_2\cdot(1+x)^{n-2} \geq \sum_{k=3}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c'_2\cdot(1+x)^{n-3} = \geq = \geq \dots \geq = c_n +$

$c'_{n-1}\cdot(1+x) \geq c_n+c'_{n-1} = c'_n \geq 0$. Ist $k_0=n$, dann ist $c'_n>0$, und ist $k_0<n$, dann ist $c'_{k_0}\cdot(1+x)^{n-k_0} > c'_{k_0}\cdot(1+x)^{n-k_0-1}$, weil x positiv ist.

(b) Für $-1<x<0$ gilt: $p_c(1+x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\cdot(1+x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_0 \geq$

$\sum_{k=0}^{n-1} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_0\cdot(1+x) = \sum_{k=0}^{n-2} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_1\cdot(1+x) \geq$

$\sum_{k=0}^{n-2} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_1\cdot(1+x)^2 = \sum_{k=0}^{n-3} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_2\cdot(1+x)^2 \geq$

$\sum_{k=0}^{n-3} c_k\cdot(1+x)^{n-k} + c^*_2\cdot(1+x)^3 = \geq = \geq \dots \geq = c_0\cdot(1+x)^n +$

$c^*_{n-1}\cdot(1+x)^{n-1} \geq c_0\cdot(1+x)^n + c^*_{n-1}\cdot(1+x)^n = c^*_n\cdot(1+x)^n \geq 0$. Ist $k_0=n$, dann ist $c^*_n\cdot(1+x)^n>0$, und ist $k_0<n$, dann ist $c^*_{k_0}\cdot(1+x)^{k_0} > c^*_{k_0}\cdot(1+x)^{k_0+1}$, weil x zwischen -1 und 0 liegt.

Aus Lemma 3 und Lemma 4 folgt die Isotonie des internen Zinssatzes für die Fälle, daß die zu vergleichenden Investitionen beide günstig oder beide ungünstig sind.

3.6. Die Nullstellen-Mannigfaltigkeit für Investitionen mit einer maximalen Laufzeit n - Zur Stetigkeit des internen Zinssatzes

Geht man von globalen zu lokalen Überlegungen über, lassen sich nicht nur die betragsmäßig kleinsten Nullstellen zweier Investitionen vergleichen, sondern man kann die beiden Nullstellenmengen insgesamt einander gegenüberstellen. Das Theorem über implizite Funktionen[48] besagt, daß sich Nullstellen x_k bei kleinen Änderungen der Koeffizienten des Polynoms (7), p, stetig ändern, jedenfalls wenn sie einfach sind, d. h. $dp/dx(1+x_k)\neq 0$ gilt. Im Normalfall liegen lauter einfache Nullstellen vor, und es wechseln sich zulässige $(dp/dx(1+x_k)<0)$ mit nicht zulässigen $(dp/dx(1+x_k)>0)$ Nullstellen ab.

[48] Siehe Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, S. 286 ff.

Nach wie vor seien a und b zwei Investitionen, die die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllen. Im folgenden werden kontinuierliche Übergänge von Investition b nach Investition a betrachtet, bei denen die Investitionen immer günstiger werden und damit für jedes x im relevanten Bereich ($\mathbf{R}^+$ im günstigen und $]-1;0[$ im ungünstigen Fall) der Wert $p(1+x)$ wächst. Trifft man bei diesen Übergängen nicht auf Investitionen mit mehrfachen Nullstellen, dann werden die zulässigen Nullstellen fortwährend größer.[49] Das Umgekehrte geschieht bei entsprechenden Übergängen von a nach b.

Eine j-fache Nullstelle x_k ist durch die Bedingungen $d^ip/dx^i(x_k)=0$ (für $i=0,1,\dots,j-1$) und $d^jp/dx^j(x_k)\neq 0$ gegeben. Das Theorem über implizite Funktionen läßt sich in diesem Zusammenhang nicht mehr nutzen. Aber wenn man wiederum nur Übergänge betrachtet, bei denen die Investitionen ausschließlich immer günstiger oder ausschließlich immer ungünstiger werden, so daß insbesondere im relevanten Bereich das Polynom $p(1+x)$ für alle x entweder nur zu- oder nur abnimmt, dann verändern sich die **zulässigen** Nullstellen immer noch in der oben angegebenen Weise. Man muß beachten, daß man im Falle der Aufspaltung einer mehrfachen Nullstelle in mehrere einfache Nullstellen unter diesen dann wieder ausschließlich zulässige auswählt. Dazu gehört, wie man sich mit Hilfe von Definition 1 überzeugen kann, die am nächsten bei 0 liegende Nullstelle. Ist die Ordnung j einer Nullstelle x_k ungerade, dann verhält sich diese wie eine einfache Nullstelle. Ist j gerade, dann muß man unterscheiden, ob die Investition günstig oder ungünstig ist:

- Wenn Investition a **günstig** ist, dann ist x_k eine zulässige Nullstelle, falls sie (lokale) Minimalstelle in $\mathbf{R}^+$ ist. Beim Übergang zu ungünstigeren Investitionen wird eine solche Nullstelle kleiner; beim Übergang zu günstigeren Investitionen 'verschwindet' sie. Ist x_k der interne Zinssatz, so liegt für diesen eine Unstetigkeitsstelle vor. Entweder erfolgt ein Sprung zur nächstgrößeren Nullstelle, die ebenfalls zulässig ist, oder nach ∞, weil keine positive Nullstelle mehr vorhanden ist. Nur im zweiten Fall ist der interne Zinssatz brauchbar; denn der Wert ∞ läßt - anders als endliche Werte - nur noch qualitative Vergleiche zu und unterbindet die Suggestion eines quantitativen Vergleichs.
- Wenn Investition a **ungünstig** ist, dann ist x_k eine zulässige Nullstelle, falls sie (lokale) Maximalstelle in $]-1;0[$ ist; und es gelten analoge Überlegungen wie im günstigen Fall (mit -1 anstelle von ∞).

Jetzt wird verständlich, warum in Definition 1 (lokale) Maximalstellen bei günstigen (bzw. Minimalstellen bei ungünstigen) Investitionen nicht als zulässig erklärt wurden. Beim Übergang zu ungünstigeren (bzw. günstigeren) Investitionen 'verschwinden' die Nullstellen dieses Typs, und es stehen keine kleineren (bzw. größeren) endlichen Werte zur Verfügung, in die der interne Zinssatz gegebenenfalls übergehen könnte.

Für eine vorgegebene Laufzeit n ($n\in\mathbf{N}$) wird nun die Menge aller Investitionen studiert, deren Laufzeiten höchstens die Länge n besitzen, wobei jetzt auch $a_0=0$ und $a_n=0$

[49] Die nicht zulässigen Nullstellen werden dabei fortwährend kleiner.

Lemma 2: Auf der Menge **aller** Investitionen gilt sowohl bei Variante A als auch bei Variante B :

(a) 'mgü' ist transitiv.

(b) Zwei Investitionen a und b sind genau dann gleichgünstig, wenn sie
- ähnlich sind oder
- ihre kumulierten (rückwärts kumulierten) Zahlungsströme beide keine negativen (positiven) Einträge und etwaige Null-Einträge an denselben Stellen aufweisen oder
- beide neutral sind.

(c) Auf der Menge der Klassen gleichgünstiger Investitionen induziert 'mgü' auf natürliche Weise eine Ordnungsrelation.[45]

Beweis: Unter Beachtung der Definitionen 7, 8A bzw. 8B ergeben sich die Aussagen (a) und (b) wie bei günstigen Investitionen (Lemma 1). Aussage (c) folgt direkt aus der Definition von 'ggü' mit der Transitivität von 'mgü'.

3.5. Die Isotonie des internen Zinssatzes

Bei günstigen Investitionen $(a_k)_k$ ist für die Nullstellen der Bereich $\mathbf{R}^+$, bei ungünstigen Investitionen (in Variante B) der Bereich $]-1;0[$ relevant. Sollten überhaupt Nullstellen im jeweils relevanten Bereich existieren, ist die am nächsten bei 0 liegende x_0 im Sinne von Definition 1 **zulässig**. Dies gilt, weil für das Polynom p_a bei einer günstigen Investition $p_a(1) = a'_n > 0$ und damit $p_a(1+x)>0$ für $0<x<x_0$ ist und bei einer ungünstigen Investition $p_a(1) = a'_n < 0$ und damit $p_a(1+x)<0$ für $x_0<x<0$ ist.[46]

Lemma 3: a und b seien zwei Investitionen mit ihren Polynomen p_a bzw. p_b sowie ihren internen Zinssätzen x_a bzw. x_b.

(a) Wenn die Investitionen a und b beide günstig sind und für alle $x \epsilon \mathbf{R}^+$ die Beziehung $p_a(1+x)>p_b(1+x)$ gilt, dann ist $x_a>x_b$ oder $x_a=x_b=\infty$.

(b) Wenn die Investitionen a und b beide ungünstig sind und für alle $x \epsilon]-1;0[$ die Beziehung $p_a(1+x)>p_b(1+x)$ gilt, dann ist $x_a>x_b$ oder $x_a=x_b=-1$.

Beweis: (a) Ist $x_b=\infty$, dann hat b keine Nullstelle in $\mathbf{R}^+$. Es gilt $p_b(1+x)>0$ für alle positiven x und erst recht $p_a(1+x)>0$ für alle positiven x, d. h. also $x_a=\infty$.

Bei endlichen x_b gilt: Für alle x mit $0<x\leq x_b$ ist $p_a(1+x) > p_b(1+x) \geq 0$. Dies bedeutet, daß Investition a entweder keine positive Nullstelle besitzt und $x_a=\infty>x_b$ ist oder positive Nullstellen aufweist, diese alle rechts von x_b liegen und damit $x_a>x_b$ gilt.

[45] Das heißt insbesondere, daß zwei Klassen mit Investitionen, die gegenseitig 'mgü' sind, übereinstimmen.

[46] Siehe auch Abbildung 2.

(b) Ist $x_a=-1$, dann hat a keine Nullstelle in $]-1;0[$. Es ist $p_a(1+x)<0$ und erst recht $p_b(1+x)<0$ für alle x in diesem Intervall, d. h. also $x_b=-1$.

Bei $x_a>-1$ gilt: Für alle x mit $x_a\leq x<0$ ist $p_b(1+x)<p_a(1+x)\leq 0$. Das bedeutet, daß Investition b entweder keine Nullstelle in $]-1;0[$ besitzt und $x_b=-1<x_a$ ist oder Nullstellen in diesem Intervall aufweist, diese alle links von x_a liegen und damit $x_b<x_a$ gilt.

Die Ungleichungen zwischen den Polynomen zweier Investitionen in Lemma 3 gelten z. B., wenn

$$(21)\quad \begin{array}{ll} a_k \geq b_k & \text{für } k = 0, 1, \ldots, n \\ \text{und} & \\ a_{k_0} > b_{k_0} & \text{für ein } k_0 \end{array}$$

ist (so daß a gü b gilt). Dies folgt daraus, daß im Bereich $\mathbf{R}^{>-1}$ das Argument $1+x$ immer positiv ist und daher der Graph von p_a in diesem Bereich überall höher als der von p_b liegt.

Gelten nun die Beziehungen (21) nicht für die Investitionen a und b, sondern nur noch für die Investitionen a und $r\cdot b$ mit einem bestimmten positiven r, dann bestehen möglicherweise die Ungleichungen aus Lemma 3 nicht mehr zwischen den Polynomen p_a und p_b, aber sicher noch zwischen den Polynomen p_a und $p_{r\cdot b}$. Da jedoch die beiden Polynome p_b und $p_{r\cdot b}$ identische Nullstellenmengen besitzen, gelten für die Investitionen a und b auch in diesem Fall die Aussagen von Lemma 3 und die Überlegungen, die am Anfang von Abschnitt 3.6. stehen.

Die Relation 'gü' ist jedoch noch allgemeiner definiert, wenn die Ungleichungen (21) nicht zwischen den Zahlungsströmen selbst, sondern zwischen den kumulierten bzw. rückwärts kumulierten Zahlungsströmen der Investitionen a und $r\cdot b$ (für ein positives r) bestehen.[47] Aber auch in diesem Falle gilt:

Lemma 4: a und b seien zwei Investitionen mit ihren Polynomen p_a und p_b, für die die Relation a gü b gilt.

(a) **Voraussetzung:** a und b sind beide günstig, d. h. für die kumulierten Zahlungsströme ist $a'_k \geq r\cdot b'_k$ (für $k=0,1,\ldots,n$) und $a'_{k_0} > r\cdot b'_{k_0}$ (für ein k_0) für ein positives r.

Behauptung: Für alle $x \epsilon \mathbf{R}^+$ ist $p_a(1+x)>p_{r\cdot b}(1+x)$.

(b) **Voraussetzung:** a und b sind beide ungünstig, d. h., für die rückwärts kumulierten Zahlungsströme ist $a^*_k \geq r\cdot b^*_k$ (für $k=0,1,\ldots,n$) und $a^*_{k_0} > r\cdot b^*_{k_0}$ (für ein k_0) für ein positives r.

Behauptung: Für alle $x \epsilon]-1;0[$ ist $p_a(1+x)>p_{r\cdot b}(1+x)$.

[47] Siehe die Definitionen 6 und 8B.

daß bei jeder Verlängerung um eine Periode mit einer Nullzahlung in den kumulierten Zahlungsströmen als letzte Glieder konstant $a^{(0)}_n = a'_n = a''_n$ und $b^{(0)}_n = b'_n = b''_n$ hinzukommen, für die $a^{(0)}_n \geq r \cdot b^{(0)}_n$ gilt. Auch die Gültigkeit des Zeichens '>' an einer Stelle in der n-ten Diagonalen pflanzt sich auf jede so erzeugte n^+-te Diagonale $(n^+ \geq n)$ fort.

Man kann leicht zeigen, daß die kleinste positive Nullstelle des Polynoms (7) auch bezüglich dieses weiteren Begriffs von 'mgü' isoton ist. Vergleiche von Investitionen können dann jedoch aufwendig werden, insbesondere wenn man sicher gehen möchte, daß die Relation 'mgü' **nicht** besteht. In diesem Falle rentiert es sich nicht mehr, analytischen Methoden aus dem Weg zu gehen und auf die Ermittlung der beiden relevanten Nullstellenmengen zu verzichten. Mit deren Hilfe kann man nämlich unmittelbar feststellen, ob die Relation 'mgü' (in diesem Sinn) besteht oder nicht. Allerdings sind damit zugleich die internen Zinssätze bekannt, und man kann sich die Überlegungen sparen, die sich direkt auf die Einträge der Zahlungsströme beziehen.

3.4. Die Relation 'günstiger' bei nicht günstigen Investitionen

Definition 7: Eine Investition a heißt **günstiger als** (gü) und **mindestens so günstig wie** (mgü) eine Investition b, wenn

- a günstig $(a'_n > 0)$ und b nicht günstig $(b'_n \leq 0)$ ist **oder**
- a neutral $(a'_n = 0)$ und b ungünstig $(b'_n < 0)$ ist.

Eine Investition a heißt **ungünstiger als** (ugü) b, wenn b gü a ist.

Zwei **neutrale** Investitionen sind immer **gleichgünstig.**

Die Relation 'gü' ist bereits gegeben, wenn die 'Vorzeichen' der Gesamtsummen[44] der beiden Investitionen verschieden sind - unabhängig davon, ob die Ungleichungen (16) für alle Einträge der Zahlungsströme erfüllbar sind.

Bei vielen Paaren neutraler Investitionen erscheint eine der beiden doch günstiger als die andere, so z. B. die Investition (−2; 3; −1) gegenüber der Investition (−2; 2). Dieser Einschätzung liegt die Annahme zugrunde, daß beispielsweise durch frühere Ein- und spätere Auszahlungen eine Investition günstiger wird, wie dies bei günstigen Investitionen der Fall ist. Diese schwache Form der Wiederanlage-Prämisse ist wohl unumstritten. Bei neutralen Investitionen besteht hingegen kein Anlaß, von einer (fiktiven) Wiederanlage mit positivem Zinssatz auszugehen, jedenfalls dann, wenn man keine exogenen Größen einbezieht. Dann spielt es auch keine Rolle, wann die Ein- bzw. Auszahlungen stattfinden, da diese ohnehin mit 0 verzinst werden.

Es bleibt der Fall, daß man zwei ungünstige Investitionen miteinander vergleichen möchte. Bei Variante A kommt man mit den bisherigen Definitionen zurecht. Die globale

44 Analog zur mathematischen Signum-Funktion gibt es für das 'Vorzeichen' drei Möglichkeiten: + , 0 (neutral) und - .

Einordnung ergibt sich gemäß Definition 7, und es ist diejenige der beiden Investitionen die günstigere, die nach dem Rollentausch zwischen Investor und Investitionsobjekt, also nach Multiplikation aller Einträge mit −1, die ungünstigere ist. Definition 8A faßt diese Überlegungen zusammen; die Eigenschaften der Relationen aus Definition 6 werden dabei direkt übertragen.

Definition 8A: Für zwei ungünstige Investitionen a und b heißt a mgü b (entsprechend ggü, gü, ugü), falls −b mgü −a (entsprechend ggü, gü, ugü) ist.

Auch bei Variante B ist offensichtlich, daß ungünstige Investitionen durch höhere Einzahlungen und absolut betrachtet niedrigere Auszahlungen günstiger werden. Verlagert man jedoch die Zahlungs-**Zeitpunkte**, zeigen ungünstige Investitionen ein den günstigen Investitionen entgegengesetztes Verhalten. Bei Variante B bedeutet nämlich die Wiederanlage-Prämisse (in der abgeschwächten Form), daß freiwerdendes Kapital (fiktiv) nur mit einem negativen Zinssatz wieder angelegt werden kann. - Daß diese Fiktion in den westlichen Volkswirtschaften derzeit unrealistisch ist, spielt in der Begrifflichkeit des internen Zinssatzes keine Rolle. Plausibel sind negative Zinssätze z. B. in einer stark deflationären Volkswirtschaft. Dort tut man als Investor gut daran, seine Auszahlungen frühzeitig zu leisten und die Einzahlungen spät zu fordern, da jegliches Kapital im Laufe der Zeit an Wert verliert, und zwar umso mehr, je länger die Laufzeit ist.

Zur formalen Beschreibung dieses Sachverhalts soll nun zum Zahlungsstrom a der **rückwärts kumulierte Zahlungsstrom**

$$(19) \quad a^* := (a^*_0; a^*_1; \ldots; a^*_n) \quad \text{mit} \quad a^*_k := \sum_{j=0}^{k} a_{n-j}$$

definiert werden. Es bestehen die Identitäten $a^*_0 = a_n$ und $a^*_k = a^*_{k-1} + a_{n-k}$ (für $k = 1, 2, \ldots, n$); außerdem gilt $a^*_n = a'_n$ und $a^*_k = a'_n - a'_{n-k-1}$ (für $k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Definition 8B: Für zwei ungünstige Investitionen a und b heißt a mgü b (entsprechend ggü, gü, ugü), wenn es ein $r \in \mathbf{R}^+$ gibt, so daß für die rückwärts kumulierten Zahlungsströme gilt:

$$(20) \quad a^*_k \geq r \cdot b^*_k \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n \quad .$$

Wiederum ergibt sich direkt, daß, wenn die Ungleichungen (15) zwischen zwei ungünstigen Zahlungsströmen a und b bestehen, d. h., wenn die Investition a höhere Einzahlungen oder absolut betrachtet niedrigere Auszahlungen aufweist, dann auch die Ungleichungen (20) mit demselben Ähnlichkeitsfaktor r erfüllt sind. Darüber hinaus gilt: Wenn für irgendeine Stelle k_0 in den ursprünglichen Zahlungsströmen sogar '>' statt '≥' zutrifft, dann gilt auch in den rückwärts kumulierten Zahlungsströmen an den Stellen $n-k_0, n-k_0+1, \ldots, n$ das Zeichen '>' anstelle des Zeichens '≥'. Definition 8B ist somit eine Verallgemeinerung der Beziehungen (15) hinsichtlich ungünstiger Investitionen.

Auch bei Variante B lassen sich die im Anschluß an Definition 6 formulierten Eigenschaften, wie im folgenden ausgeführt, direkt auf ungünstige Investitionen übertragen.

(b) Gilt für zwei günstige Investitionen a und b, daß a mgü b mit dem Faktor r und b mgü a mit dem Faktor s ist, dann besitzen die kumulierten Zahlungsströme a' und b' ihre positiven, ihre Null- und ihre negativen Einträge jeweils an denselben Stellen. Ferner gelten für alle Stellen k_1 mit positiven Einträgen die Ungleichungen $a'_{k_1}/b'_{k_1} \geq r$ sowie $1/s \geq a'_{k_1}/b'_{k_1}$, und für alle Stellen k_0 mit negativen Einträgen gelten die Ungleichungen $a'_{k_0}/b'_{k_0} \geq 1/s$ sowie $r \geq a'_{k_0}/b'_{k_0}$. Existieren (außer den sowieso vorhandenen positiven Einträgen, z. B. a'_n) auch negative Einträge, dann ist $r = 1/s$, alle Quotienten a'_{k_1}/b'_{k_1} stimmen mit allen Quotienten a'_{k_0}/b'_{k_0} überein, und die Investitionen a und b sind ähnlich.

Ähnliche Investitionen sind trivialerweise gleichgünstig. Darüber hinaus sind auch zwei Investitionen gleichgünstig, deren kumulierte Zahlungsströme keine negativen Einträge besitzen und deren Null-Einträge an denselben Stellen liegen, da sie mit hinreichend kleinen r und s gegenseitig 'mindestens so günstig wie' sind.[43]

Für die Relation 'gü' gilt folgende Aussage: Eine günstige Investition a ist genau dann günstiger als eine günstige Investition b, wenn ein $r \in \mathbf{R}^+$ existiert, so daß

$$(17)\quad \begin{aligned} a'_k &\geq r \cdot b'_k && \text{für } k = 0, 1, ..., n \text{ und} \\ a'_{k_0} &> r \cdot b'_{k_0} && \text{für mindestens ein } k_0 \end{aligned}$$

ist; **es sei denn**, die kumulierten Zahlungsströme enthalten keine negativen Einträge und etwaige Null-Einträge an denselben Stellen. In diesem Falle sind die Ungleichungen (17) notwendig, aber nicht hinreichend für 'a gü b'. Auf der Menge aller ggü-Klassen induziert 'mgü' eine Ordnungsrelation, was sich direkt aus der Definition von 'ggü' und aus der Transitivität von 'mgü' ergibt.

Der hier entwickelte Begriff von günstigeren Investitionen ist naheliegend. Das mindeste, was ein brauchbarer interner Zinssatz leisten muß, ist, daß er diesen Begriff respektiert. Damit ist gemeint, daß er günstigeren Investitionen höhere Werte zuordnen muß, d. h., daß er **isoton** sein muß. Man kann die Begrifflichkeit im Zusammenhang mit 'mgü' aber noch in verschiedene Richtungen verallgemeinern, ohne das Prinzip, Einträge von Zahlungsströmen direkt zu vergleichen, aufgeben zu müssen.

Beispielsweise könnte man festlegen, daß jede günstige Investition ohne negative Einträge günstiger ist als jede Investition mit negativen Einträgen - auch wenn sie Null-Einträge an Stellen hat, wo bei dieser positive Einträge vorliegen. Eine noch umfassendere Definition könnte lauten, daß eine günstige Investition a mindestens so günstig wie eine

[43] Die Investitionen mit der Laufzeit n ($n \in N$) ohne negative Einträge im kumulierten Zahlungsstrom sind also in 2^{n-1} ggü-Klassen eingeteilt. Diese Zahl ist gerade die Anzahl der Möglichkeiten, Nullen auf $a'_1, ..., a'_{n-1}$ zu verteilen.

günstige Investition b heißt, wenn die Ungleichungen (16) für die transformierten (statt für die kumulierten) Zahlungsströme gelten, d. h.

$$(18)\quad a''_k \geq r \cdot b''_k \quad \text{für } k = 0, 1, ..., n \quad \text{und für ein } r \in \mathbf{R}^+$$

ist. Diese Definition wäre zwar inhaltlich nicht mehr direkt interpretierbar, aber dennoch einfach handhabbar, weil man die transformierten Zahlungsströme im allgemeinen ohnehin bestimmt. Sie ist umfassender als Definition 6. Durch die Aufstellung von Schema (11) für die Investitionen a und b zeigt man leicht, daß aus den Ungleichungen (16) die Ungleichungen (18) folgen. Da jede Zeile dieses Schemas (ab der Nr. 0) aus ihrer Vorgängerzeile durch Kumulierung entsteht, ergeben sich folgende Zusammenhänge: Gelten in der Zeile Nr. i $(-1 \leq i < n)$ die Ungleichungen $a^{(i)}_k \geq r \cdot b^{(i)}_k$ (für $k = 0, 1, ..., \min(n, n-i)$ für ein $r \in \mathbf{R}^+$), dann gelten die entsprechenden Ungleichungen alle auch in jeder späteren Zeile Nr. j $(i < j \leq n)$. Gilt darüber hinaus für ein k_0 sogar das Zeichen '>', dann hat dieses Zeichen auch in den späteren Zeilen (bis zur Nr. $n-k_0$) an der Stelle k_0 Bestand, insbesondere gilt auch $a''_{k_0} > b''_{k_0}$. - Eine gemäß den Ungleichungen (18) definierte Relation 'mgü' wäre allerdings nicht transitiv.

Beispiel 4: Für $a = (-3; 10; -8; 3)$ ist $a'' = (-3; 1; 3; 2)$,
$a^+ = (-3; 10; -8; 3; 0)$ und $a^{+''} = (-3; -2; 4; 5; 2)$;

für $b = (-4; 14; -14; 7; -1)$ ist $b'' = (-4; -2; 4; 5; 2)$;

und für $c = (-5; 17; -18; 7)$ ist $c'' = (-5; 2; 1; 1)$,
$c^+ = (-5; 17; -18; 7; 0)$ und $c^{+''} = (-5; -3; 3; 2; 1)$.

Es ist a günstiger als b und b günstiger als c, aber zwischen a und c besteht die Relation 'mindestens so günstig wie' nicht.

Die Verletzung der Transitivität rührt daher, daß die Zahlungsströme a und c zum Zwecke des Vergleichs mit Investition b verlängert werden müssen und die Ungleichungen (18) zwar zwischen den transformierten Zahlungsströmen $a^{+''}$ und $c^{+''}$ der verlängerten Investitionen, nicht aber zwischen den transformierten Zahlungsströmen a'' und c'' selbst bestehen. - Die Transitivität ließe sich erzwingen, indem man das Verlängern von Investitionen ausschließt und nur Investitionen gleicher Laufzeit miteinander vergleicht.

Dieser Einengung der Begrifflichkeit könnte man wiederum aus dem Weg gehen, indem man die Relation 'mgü' zwischen zwei günstigen Investitionen a und b schon erklärt, sobald die Ungleichungen (18) überhaupt bei irgendwelchen Verlängerungen a^+ und b^+ mit einer gemeinsamen Laufzeit n^+ gelten. Mit Hilfe von Schema (11) zeigt man wiederum leicht, daß eine solche Definition von 'mgü' noch allgemeiner wäre als diejenige über die Ungleichungen (18). Gilt nämlich $a''_k \geq r \cdot b''_k$ (für $k = 0, 1, ..., n$ für ein $r \in \mathbf{R}^+$), d. h. in der n-ten Diagonalen $a^{(n-k)}_k \geq r \cdot b^{(n-k)}_k$ (für $k = 0, 1, ..., n$; für dieses r; wobei n das Maximum der Laufzeiten von a und b ist), dann gilt auch für jede darunter liegende n^+-te Diagonale $a^{(n^+-k)}_k \geq r \cdot b^{(n^+-k)}_k$ (für $k = 0, 1, ..., n^+$). Dies folgt daraus, mierten Zahlungsstrom nicht zu; und wenn sie abnimmt, dann offenbar um eine gerade Zahl. Diese Anzahl sinkt niemals unter die Zahl m" der positiven Nullstellen, und wenn tatsächlich $v'' \leq 2$ erreicht wird, dann ergibt sich insbesondere $m'' \leq v'' \leq 2$.[39]

3.3. Die Relation 'günstiger' bei günstigen Investitionen

Üblicherweise spielt für die (rein finanzmathematische) Bewertung einer Investition ihr Volumen keine Rolle, es kommt nur auf das Verhältnis der Zahlungen untereinander an. Eine proportionale Änderung all dieser Zahlungen ändert nichts an der Rendite, d. h., es ist gleichgültig, ob der Zahlungsstrom $a=(a_k)_k$ oder $r \cdot a := (r \cdot a_k)_k$, für eine beliebige **positive** reelle Zahl r, betrachtet wird. Zwei Investitionen a und b sollen **ähnlich** heißen, wenn eine positive reelle Zahl r existiert, für die $a = r \cdot b$ gilt.[40]

Eine Investition a ist offensichtlich mindestens so günstig wie eine Investition b, wenn jeder Eintrag ihres Zahlungsstroms mindestens so hoch ist wie der entsprechende (d. h. in derselben Periode liegende) Eintrag von b,[41] in Zeichen: $a_k \geq b_k$ (für $k=0,1,...,n$), wobei n das Maximum der beiden zu den Investitionen a und b gehörenden Laufzeiten darstellt.

Unterscheiden sich die Investitionen a und b allzu sehr in ihren Volumina, dann führt nur selten eine direkte Gegenüberstellung, aber häufig noch ein Vergleich von a mit einer zu b ähnlichen Investition $r \cdot b$ (mit geeignetem r) zu einer einheitlichen Abschätzung der Einträge. In diesem Fall ist Investition a **mindestens so günstig wie** b, wenn ein $r \in \mathbf{R}^+$ existiert, so daß

$$(15) \quad a_k \geq r \cdot b_k \qquad \text{für } k = 0, 1, ..., n$$

gilt. Zu beachten ist in diesem Zusammenhang die scheinbar paradoxe Möglichkeit, daß zwei Investitionen mindestens so günstig wie die jeweils andere sein können, ohne daß sie ähnlich sind. Dies trifft z. B. zu, wenn beide - aus welchen praktischen Gründen auch immer - keine Auszahlungen und nur echte Einzahlungen enthalten.

Nach dieser allgemeinen Begriffsbestimmung für beliebige Investitionen beziehen sich die Betrachtungen im Rest dieses Abschnitts nur auf **günstige** Investitionen. Nicht nur höhere Ein- und niedrigere Auszahlungen, sondern auch **frühere Ein-** und **spätere Auszahlungen** machen eine Investition a günstiger als b, obwohl möglicherweise die Ungleichungen (15) mit keinem Faktor r simultan erfüllt werden können. Diesen Sachverhalt kann man mit Hilfe der kumulierten Zahlungsströme definieren.

39 Das hier entwickelte Prinzip der formalen Verlängerung von Laufzeiten unterliegt auch dem bei Pratt und Hammond angegebenen Verfahren. Siehe Pratt, J. W., Hammond, J. S. III., Evaluating Projects, S. 1236 ff.

40 Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation, d. h. insbesondere: Wenn a und b ähnlich sind und b und c ähnlich sind, dann sind auch a und c ähnlich.

41 Für die Absolutbeträge der Auszahlungen bei Investition a heißt das, daß sie kleiner oder gleich den entsprechenden Einträgen bei b sein müssen.

Definition 6: Für zwei günstige Investitionen a und b mit dem Maximum n ihrer beiden Laufzeiten heißt

- a **mindestens so günstig wie (mgü)** b, wenn eine positive reelle Zahl r existiert, so daß für die (u. U. verlängerten) kumulierten Zahlungsströme gilt:

$$(16) \quad a'_k \geq r \cdot b'_k \qquad \text{für } k = 0, 1, ..., n \;;$$

- a **gleichgünstig wie (ggü)** b, wenn a mgü b und b mgü a;
- a **günstiger als (gü)** b, wenn a mgü b und nicht a ggü b;
- a **ungünstiger als (ugü)** b, wenn b gü a.

Beispiel 3:

(a)	(10; −11; 3)	gü	(9; −11; 3)	gü	(8; −10; 3)
(b)	(8; −10; 3)	ugü	(8; −10; 3; 1)	ggü	(16; −20; 6; 2)
(c)	(1; −1; 1)	gü	(2; −2; 1)	gü	(1; −1; 1)
(d)	(100; −400; 310)	und	(10; −41; 33)	stehen in keiner der vier Relationen.	

Aus Definition (2) des kumulierten Zahlungsstroms ergibt sich direkt, daß, wenn die Ungleichungen (15) zwischen zwei Zahlungsströmen bestehen, automatisch auch die Ungleichungen (16) mit demselben Ähnlichkeitsfaktor r erfüllt sind. Trifft darüber hinaus für irgendeine Stelle k_0 in den ursprünglichen Zahlungsströmen sogar '>' statt '≥' zu, dann gilt in den kumulierten Zahlungsströmen das Zeichen '>' an den Stellen $k_0, k_0+1, ..., n$. Definition 6 ist also eine Verallgemeinerung der Beziehungen (15).

Lemma 1:[42] (a) Die Relation 'mgü' ist transitiv auf der Menge der günstigen Investitionen.

(b) Zwei günstige Investititionen sind genau dann gleichgünstig, wenn

- sie entweder ähnlich sind und ihre kumulierten Zahlungsströme **positive sowie negative** Einträge besitzen
- oder ihre kumulierten Zahlungsströme **keinerlei negative** Einträge aufweisen und sie etwaige Null-Einträge an denselben Stellen haben.

Beweis: (a) Betrachtet man drei günstige Investitionen a, b, c mit ihren Laufzeiten n_a, n_b, n_c und den Beziehungen a mgü b sowie b mgü c, also $a'_k \geq r \cdot b'_k$ (für $k=0,1,..., \max(n_a,n_b),..., \max(n_a,n_b,n_c)$) und $b'_k \geq s \cdot c'_k$ (für $k=0,1,..., \max(n_b,n_c),..., \max(n_a,n_b,n_c)$) (für geeignete $r, s \in \mathbf{R}^+$, dann ist $a'_k \geq r \cdot s \cdot c'_k$ (für $k=0,1, ..., \max(n_a,n_c), ..., \max(n_a,n_b,n_c)$), also a mgü c.

42 Lemma 1 würde nicht gelten, wenn die Relation 'mgü' unter Benutzung der transformierten statt der kumulierten Zahlungsströme definiert worden wäre. Wie Beispiel 4 zeigt, wäre dann nämlich die Transitivität (vergleiche Fußnote 40) verletzt.

Für jeden Vorzeichenwechsel im Zahlungsstrom $(a''_k)_k$, etwa zwischen a''_j und a''_{j+r}, nimmt somit die Folge $(v_0; v_1; \ldots; v_n)$ der Vorzeichenwechsel-Anzahlen in Schema (11), nämlich jedenfalls zwischen v_{n-j-r} und v_{n-j}, um mindestens den Wert 1 ab. Wenn also $(a''_k)_k$ genau v'' Vorzeichenwechsel aufweist, dann ist $v_0 - v'' \geq v_n = 0$ und damit $v' = v_0 \geq v''$.

Falls $a'_n \neq 0$ ist, dann ist die Differenz zwischen v' und v'' eine gerade Zahl; denn es ist $a'_0 = a''_0$ (bzw. $a'_s = a''_s$) und $a'_n = a''_n$, so daß v' und v'' entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Bei $a'_n = 0$ kann diese Differenz jedoch auch ungerade sein.

Beispiel 2: Für $(a_k)_k = (1; 1; -5; 3)$ ergibt Schema (11):

i	$(a^{(i)}_k)_k$				v_i
-1	1	1	-5	3	2 = v
0	1	2	-3	0	1 = v′
1	1	3	0		0
2	1	4			0
3	1				0 ,

und es ist $(a''_k)_k = (1; 4; 0; 0)$ mit $v'' = 0$.

Die Transformation von $(a_k)_k$ in $(a''_k)_k$ stellt demnach eine Glättung dar; die Ausschläge der Koeffizienten nach oben und unten werden geringer; die Anzahl der Vorzeichenwechsel nimmt ab (bzw. nicht zu). Die induzierte Transformation des Polynoms $p(1+x)$ in das Polynom $p''(x)$ bringt mit sich, daß die zu betrachtende Grundmenge von $\mathbf{R}^{>-1}$ auf $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^{>0}$ verkleinert wird, die Zahl der Nullstellen also abnimmt (bzw. nicht zunimmt).

3.2. Formale Verlängerung von Laufzeiten

Eigentlich bräuchte man eine Investition $(a_k)_k$ nur in der Zeitspanne zwischen der ersten und der letzten tatsächlichen Zahlung zu betrachten. Man könnte also die Laufzeit n stets so annehmen, daß grundsätzlich $a_0 \neq 0 \neq a_n$ vorausgesetzt werden kann. Zum Zwecke des direkten Vergleichs der Zahlungsströme zweier Investitionen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$, die in verschiedenen Zeiträumen abgewickelt werden, kann es jedoch nötig sein, eine der beiden Investitionen ohne Hinzufügen von Zahlungen zu verlängern, d. h. den Zahlungsstrom mit Nullen aufzufüllen. Werden darüber hinaus keine externen Einflußgrößen mit einbezogen, spielt es aus finanz**mathematischer** Sicht keine Rolle, ob die

beiden Investitionen zu verschiedenen Zeiten beginnen. Man benötigt demnach keine Nullen am Anfang von Zahlungsströmen und kann prinzipiell

$$(13) \qquad a_0 \neq 0$$

(und $b_0 \neq 0$) voraussetzen.[37]

Die Verlängerung eines Zahlungsstroms a mit der Laufzeit n um t $(t \in \mathbf{N})$ Nullen am Ende bedeutet den Übergang zu einem Zahlungsstrom a^+ mit der Laufzeit $n^+ = n+t$ und den Einträgen $a^+_k = a_k$ (für $k = 0, 1, \ldots, n$) und $a^+_k = 0$ (für $k = n+1, \ldots, n+t$). Dabei wird das Bestimmungspolynom $p(1+x)$ in $p(1+x) \cdot (1+x)^t$ und $p''(x)$ in $p''(x) \cdot (1+x)^t$ verwandelt, wobei sich die relevante Nullstellenmenge nicht verändert, da nur $x_0 = -1$ als t-fache Nullstelle hinzukommt. Der neue **kumulierte** Zahlungsstrom entsteht aus dem alten durch Anhängen von t-mal a'_n, d. h., er hat dieselbe Anzahl von Vorzeichenwechseln wie jener. Es wird daher im folgenden nicht zwischen einer Investition und ihren Verlängerungen unterschieden, solange sich die Ausführungen um den Zahlungsstrom, den kumulierten Zahlungsstrom oder die relevante Nullstellenmenge drehen.

Der neue **transformierte** Zahlungsstrom mit seinen Eigenschaften ist allerdings nicht so einfach aus dem alten herzuleiten. Seine Einträge ergeben sich aus Gleichung (3) mit der Laufzeit n^+ anstelle von n. Mit Hilfe von Schema (11) kann man sich diese Einträge aus denen des alten transformierten Zahlungsstroms folgendermaßen entstanden denken: Das Verlängern des ursprünglichen Zahlungsstroms um t Nullen kann man auch als t-maliges Verlängern um jeweils eine Null auffassen. Dabei ergeben sich die Einträge des neuen transformierten Zahlungsstroms jedesmal durch Addition zweier benachbarter Einträge des alten transformierten Zahlungsstroms, und zwar ist

$$(14) \qquad \begin{aligned} a^{+''}_0 &= a''_0 \,, \\ a^{+''}_k &= a''_{k-1} + a''_k \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n \,, \\ a^{+''}_{n+1} &= a^{+'}_{n+1} = a'_n = a''_n \,. \end{aligned}$$

Liegen die Vorzeichenwechsel des alten transformierten Zahlungsstroms an den Stellen $j_1, j_2, \ldots, j_v$ $(0 \leq v < n)$, dann kann sich beim neuen Zahlungsstrom höchstens je ein Vorzeichenwechsel an den Stellen von j_1 bis $j_2 - 1$, von j_2 bis $j_3 - 1$ usw. und von j_v bis n befinden.[38]

Somit kann als Ergebnis festgehalten werden: Beim Anhängen von Nullen an den ursprünglichen Zahlungsstrom nimmt die Anzahl v'' der Vorzeichenwechsel im transfor-

[37] Zur Bildung der Differenz c zweier Investitionen a und b, die nicht zum selben Zeitpunkt beginnen, ist es natürlich erforderlich, den Beginn der später liegenden Investition formal vorzuverlegen, d. h. ihren Zahlungsstrom nach vorne auszudehnen und dort mit Nullzahlungen aufzufüllen. Für die Ermittlung des internen Zinssatzes der Differenz-Investition kann aber wieder ein Zahlungsstrom $(c_k)_k$ betrachtet werden, für den $c_0 \neq 0$ ist.

[38] Wegen der Verlängerung um den $(n+1)$-ten Eintrag ist es möglich, daß der letzte Vorzeichenwechsel tatsächlich erst an der Stelle n stattfindet. Da dieser Eintrag aber identisch mit dem n-ten Eintrag im alten transformierten Zahlungsstrom ist, kann dies nur passieren, wenn im neuen transformierten Zahlungsstrom an den Stellen j_v bis $n-1$ kein Vorzeichenwechsel vorliegt.

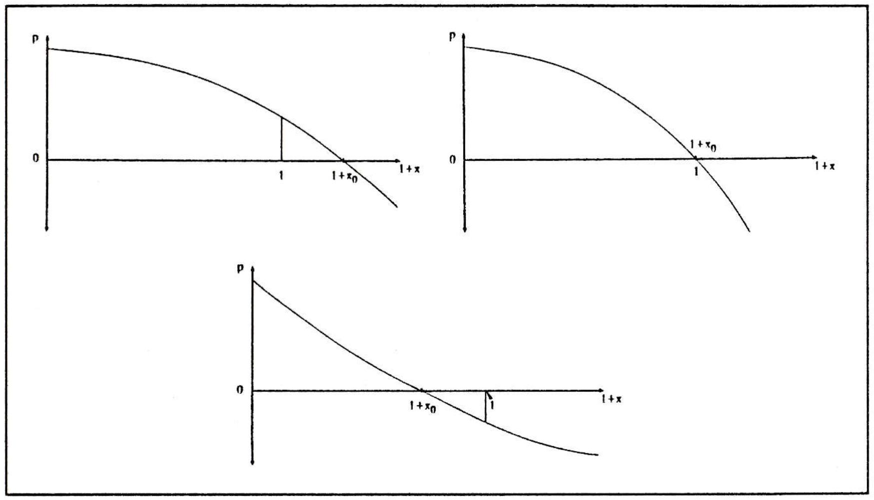

Abbildung 2

3.1. Die Anzahl der Vorzeichenwechsel im transformierten Zahlungsstrom

Das Polynom (7), $p(1+x)$, kann man als endliche Potenzreihe in x, entwickelt um den Punkt -1, auffassen. Zwecks Entwicklung um den Punkt 0 multipliziert man die binomischen Produkte $(1+x)^k$ einfach aus und erhält nach Zusammenfassung der Summanden das Polynom (6), $p''(x)=a''_0 \cdot x^n + a''_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a''_{n-1} \cdot x + a''_n$, wobei die Beziehungen (3), $a''_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j} \cdot a_j$, bestehen. Die Rücktransformation wird über die Beziehungen

$$(10) \quad a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j} \cdot (-1)^{k-j} \cdot a''_j \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

bewerkstelligt. Die Transformation von $(a_k)_k$ in $(a''_k)_k$ läßt sich numerisch sparsam mit dem erweiterten Horner-Schema[34] durchführen, wobei folgende Schar von Koeffizientenfolgen entsteht:[35]

[34] Alle Zeilen nach der 1. Zeile ergeben sich durch Kumulierung (Partialsummenbildung) aus ihrer jeweiligen Vorgängerzeile und werden nach der 2. Zeile jeweils ein Glied kürzer; also $a^{(i)}_k := \sum_{j=0}^{k} a^{(i-1)}_j$ (für $i=0,1,\dots,n$ und $k=0,1,\dots,n-1$). Siehe auch Henrici, P., Complex Analysis, S. 433 ff.

[35] Eine Variante dieses Tableaus wurde bereits von Pratt, J. W., Hammond, J. S. III., Evaluating Projects, S. 1234 ff., analysiert.

$$(11) \quad \begin{array}{lll}
(a^{(-1)}_0 ; a^{(-1)}_1 ; \dots ; & & a^{(-1)}_n) \,, \\
(a^{(0)}_0 ; a^{(0)}_1 ; \dots ; & & a^{(0)}_n) \,, \\
(a^{(1)}_0 ; a^{(1)}_1 ; \dots ; & a^{(1)}_{n-1}) \,, & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
(a^{(n-1)}_0 ; a^{(n-1)}_1) \,, & & \\
(a^{(n)}_0) \,. & &
\end{array}$$

In der 1. Zeile, die die Nummer -1 trägt, ist $a^{(-1)}_k := a_k$ (für $k=0,1,\dots,n$) gesetzt, d. h., sie besteht gerade aus den Einträgen des ursprünglichen Zahlungsstroms. Die 2. Zeile (mit der Nr. 0) liefert die Einträge des kumulierten Zahlungsstroms, d. h., es ist $a'_k = a^{(0)}_k$ (für $k=0,1,\dots,n$). Die transformierte Folge $(a''_k)_k$ schließlich wird von den letzten Gliedern der Zeilen Nr. n bis 0 gebildet, nämlich $a''_k = a^{(n-k)}_k$ (für $k=0,1,\dots,n$). Man zeigt mittels Induktion nach i, daß $a^{(i)}_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k-j+i}{k-j} \cdot a_j$ ist, und erhält so die Beziehungen (3).

Von oben nach unten nimmt die Anzahl der Vorzeichenwechsel ab, oder genauer: sie nimmt nicht zu. Liegen nämlich in der Zeile Nr. i $(-1 \le i < n)$ die Vorzeichenwechsel an den Stellen $j_1, j_2, \dots, j_{v_i}$ $(0 \le v_i < n$ bei $i=-1$ und $0 \le v_i < n-i$ sonst), dann kann sich in der nächsten Zeile höchstens je ein Vorzeichenwechsel an den Stellen von j_1 bis j_2-1, von j_2 bis j_3-1 usw. und von j_{v_i} bis $n-1$ bzw. $n-1-i$ befinden. Ist allgemein v_i die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Zeile Nr. i, dann gilt also

$$(12) \quad n \ge v_{-1} \ge v_0 \ge \dots \ge v_n \ge 0 \;,$$

womit gerade die glättende Wirkung der Kumulierung, und zwar unabhängig von der Zeilenverkürzung, zum Ausdruck kommt. Insbesondere ist $v' \le v$, weil $v' = v_0$ und $v = v_{-1}$ gilt.

Darüber hinaus folgt $v'' \le v'$, denn wenn die Folge $(a''_k)_k$ an der Stelle j einen Vorzeichenwechsel aufweist, d. h. $a''_j \ne 0$, eventuell $a''_{j+1} = a''_{j+2} = \dots = a''_{j+r-1} = 0$, $a''_{j+r} \ne 0$ und $a''_j \cdot a''_{j+r} < 0$ (für ein $r \in N$) ist, dann gilt für die Vorzeichenwechsel-Anzahlen v_{n-j} und v_{n-j-r} der beiden Zeilen Nr. $n-j$ und $n-j-r$, daß die eine eine gerade, und die andere eine ungerade Zahl ist; d. h. insbesondere, daß sie verschieden sind. Dies folgt, weil beide Zeilen als erstes von 0 verschiedenes Glied $a^{(n-j)}_s = a_s = a^{(n-j-r)}_s$ aufweisen, wobei a_s das erste von 0 verschiedene Glied in $(a_k)_k$ ist.[36] Am Ende besitzen diese beiden Zeilen aber zwei Glieder mit verschiedenen Vorzeichen, nämlich a''_j und a''_{j+r}. Weil $v_{n-j-r} \ge v_{n-j}$ ist, gilt also sogar $v_{n-j-r} > v_{n-j}$.

[36] Ein solches existiert, da $(a''_k)_k$ voraussetzungsgemäß einen Vorzeichenwechsel aufweist.

2.5. Neutrale und ungünstige Investitionen (Sätze 3A und 3B)

Definition 4: Für eine **neutrale Investition** a ist der **interne Zinssatz** $x_0 := 0$.

Die Übertragung des Begriffs des internen Zinssatzes auf ungünstige Investitionen ist prinzipiell in zwei Varianten möglich, die im folgenden mit A und B bezeichnet werden.

Definition 5A: Für eine **ungünstige Investition** $(a_k)_k$ ist der **interne Zinssatz** derjenige, der nach Definition 3 der Investition $(-a_k)_k$ zukommt, wobei die **Rollen** von Investor und Investitionsobjekt **vertauscht** sind.

Definition 5B: Für eine **ungünstige Investition** a ist der **interne Zinssatz**

$$x_0 := \begin{cases} -1, & \text{falls sie keine Nullstelle im Intervall }]-1;0[\text{ aufweist,} \\ x_1, & \text{falls dies die größte Nullstelle im Intervall }]-1;0[\text{ ist.} \end{cases}$$

In Variante B übernimmt bei ungünstigen Investitionen der Wert -1 die Rolle, die der 'Wert' ∞ bei günstigen spielt. -1 ist das Infimum[31] aller möglichen negativen Zinssätze; der zugehörige Zinsfaktor ist 0, der 'Kehrwert' von ∞.

Die Definitionen 5A und 5B liegen den entsprechenden Varianten A und B zugrunde. Diese schließen sich gegenseitig aus, d. h. bei der Bewertung von Investitionen muß man entweder ausschließlich nach Variante A oder ausschließlich nach Variante B vorgehen.

Satz 3A: Auf der Menge aller **nicht neutralen Investitionen mit höchstens zwei**[32] **positiven Nullstellen** und **aller neutralen Investitionen** ist der interne Zinssatz aus den Definitionen 3, 4 und 5A im Sinne von Definition 2 **brauchbar.**

Satz 3B: Auf der Menge aller **günstigen Investitionen mit höchstens zwei positiven Nullstellen, aller neutralen Investitionen** und aller **ungünstigen Investitionen mit höchstens zwei Nullstellen im Intervall** $]-1;0[$ ist der interne Zinssatz aus den Definitionen 3, 4 und 5B im Sinne von Definition 2 **brauchbar.**

Der interne Zinssatz nach den Definitionen 3, 4 und 5 ist also weder in Variante A noch in Variante B in brauchbarer Weise auf die Menge **aller** Investitionen übertragbar, da er nach Aussage (b) von Satz 2 schon auf die Menge der **günstigen** Investitionen nicht entsprechend übertragbar ist.

31 Das Infimum ist die Untergrenze, die jedoch selbst nicht angenommen wird.
32 Hier müssen wiederum die Vielfachheiten der Nullstellen mitgezählt werden. Gleiches gilt für die entsprechenden Passagen in Satz 3B.

3. Definitionen, Hilfssätze, Beweise der Sätze und Erläuterungen

Während Gleichung (4) eine Beziehung zwischen den **Endwerten** der Einträge eines Zahlungsstroms $(a_k)_k$ mit Laufzeit n ist, wird in der Finanzmathematik üblicherweise die im wesentlichen äquivalente Gleichung $p(1+x)/(1+x)^n=0$ zwischen den **Barwerten** betrachtet. Gleichung (4) hat jedoch den Vorteil, eine **Polynom**gleichung zu sein.

Der **herkömmliche** Fall ist dadurch charakterisiert, daß $a_0<0$ ist und der Zahlungsstrom genau einen Vorzeichenwechsel aufweist $(v=1)$. Es ist also mindestens eine echte Aus- und mindestens eine echte Einzahlung vorhanden, und sämtliche echten Auszahlungen liegen vor sämtlichen echten Einzahlungen. Es ist plausibel und auch mathematisch leicht zu zeigen, daß bei herkömmlichen Investitionen Gleichung (4) genau eine reelle Lösung $x_0>-1$ liefert. Zum Beweis benutzt man die Tatsache, daß, wenn die letzte echte **Aus**zahlung in der Periode m $(0\le m<n$; oft $m=0)$ stattfindet, die Funktion $p(1+x)/(1+x)^{n-m}$, die in $\mathbf{R}^{>-1}$ dieselbe Nullstellenmenge wie $p(1+x)$ besitzt, in diesem Bereich streng monoton fallend ist, für x gegen -1 positiv und für x gegen ∞ negativ wird. Diese Nullstelle ist im Sinne von Definition 1 zulässig, und für sie gilt, weil $p(1)=a'_n$ ist, außerdem

$$(9) \qquad x_0 \gtreqless 0\,, \text{ falls } a'_n \gtreqless 0 \;,$$

wie man sich anhand von Abbildung 2 leicht verdeutlichen kann. Das Vorzeichen der Nullstelle bei herkömmlichen Investitionen paßt also zum Typ 'günstig', 'neutral' bzw. 'ungünstig', und die Nullstelle ist daher automatisch der interne Zinssatz.[33]

33 Lediglich bei ungünstigen Investitionen in Variante A, wo die Einträge mit -1 zu multiplizieren sind und man dann keine herkömmliche Investition mehr hat, ist der interne Zinssatz nicht diese Nullstelle, sondern ∞.

- Als **zweites** kann man den internen Zinssatz als die Menge sämtlicher zulässiger Lösungen oder als das Intervall von der kleinsten bis zur größten zulässigen Lösung definieren. Für die in den Sätzen 2, 3A und 3B erfaßten Investitionen ist der interne Zinssatz dann nach wie vor eine Zahl, und man kann mit ihm dort wie gewohnt umgehen. Als letztlich mengenwertige Funktion würde der interne Zinssatz sogar eine verallgemeinerte Ordenbarkeit, Isotonie und Stetigkeit besitzen, die man aber kaum noch inhaltlich interpretieren könnte. Die Mengenwertigkeit ist nämlich ein mathematischer 'Kniff', mit dem lediglich **formale** Eindeutigkeit erzwungen wird. Die Informationen über die jeweilige Investition wären in diesem Fall sehr vage, und verschiedene Investitionen ließen sich nur in Ausnahmefällen zwingend vergleichen - wohlgemerkt, dieses Problem entsteht nur, wenn die Investitionen nicht die Voraussetzungen der genannten Sätze erfüllen.

- Die **dritte** Möglichkeit ist die, daß man als internen Zinssatz die **kleinste** aller positiven Nullstellen bzw. gegebenenfalls ∞ wählt, wenn die Investition günstig ist, und die größte aller Nullstellen im Intervall $]-1;0[$ bzw. -1 wählt, wenn die Investition ungünstig ist, womit man direkt die Forderungen I bis III aus Definition 2 erfüllt.[23]

  Diese Wahl ist plausibel, denn bei der Suche nach dem internen Zinssatz einer günstigen Investition[24] als Nullstelle des Polynoms p'' fängt man natürlicherweise mit dem Wert $x=0$ an und erhält dabei als Endwert der Investition die Gesamtsumme $p(1)=p''(0)=a''_n$. Dann läßt man x kontinuierlich wachsen, bis man **erstmals** einen Wert x_0 erreicht, für den $p(1+x_0)=p''(x_0)=0$ ist. Dieser Wert ist zulässig, wie sich in Abschnitt 3.5. zeigen wird; daher besteht kein Anlaß, nach weiteren Nullstellen zu suchen. Wie schon die nicht-reellen komplexen, die negativen und die falsch auf Veränderungen reagierenden[25] Nullstellen als Kandidaten für den internen Zinssatz eliminiert wurden, werden nun auch diejenigen zulässigen Nullstellen ausgeschlossen, die größer sind als diese kleinste positive Nullstelle, und die Regel lautet: Zwei günstige Investitionen werden verglichen, indem man ihre kleinsten positiven Nullstellen vergleicht.

  Neben diesem formalen Prinzip kann man für die Wahl der kleinsten positiven Nullstelle folgendes inhaltliche Argument ins Feld führen: Die im Falle der Uneindeutigkeit sowieso schon ausgeprägten Schwankungen zwischen den Zahlungen sollten nicht noch durch eine hohe, wenn auch nur fiktiv angesetzte, Verzinsung verstärkt werden; die (fiktiven) Reaktionen auf Änderungen im Zahlungsstrom sollten nicht zu kräftig sein.

  Der 'Pferdefuß' befindet sich an anderer Stelle. Auf der Menge **aller** günstigen Investitionen (mit bestimmter maximaler Laufzeit n) ist die kleinste positive Nullstelle **nicht stetig**, d. h. es existieren Investitionen, bei denen marginale Änderungen im Zahlungsstrom sprunghafte Änderungen der kleinsten positiven Nullstelle mit sich bringen. Zwar sind deswegen immer noch konsistente **qualitative** Vergleiche verschiedener Investitionen möglich, aber **nicht** mehr **quantitative** Einschätzungen, wodurch der Wert des internen Zinssatzes erheblich geschmälert wird. Er ist im Sinne von Definition 2 nämlich nicht mehr brauchbar.

23 Siehe Abschnitt 3.5.
24 Bei einer ungünstigen Investition geht man analog vor.
25 Siehe Definition 1.

Da jedoch auch andere Alternativen auf der Basis von Gleichung (4) nicht die Stetigkeit mit sich bringen, wird im folgenden der interne Zinssatz bei günstigen Investitionen als kleinste positive Nullstelle bzw. ∞ definiert. Bei Vorliegen mehrerer zulässiger Nullstellen sollte man sie jedoch alle, insbesondere die **größte**, mit notieren, weil bei kontinuierlichen Änderungen des Zahlungsstroms **möglicherweise** eine von diesen stetig zum internen Zinssatz wird.[26] Für das Intervall von der kleinsten bis zur größten zulässigen Nullstelle gilt wenigstens noch eine sehr schwache Form von Stetigkeit.[27]

Definition 3: Für eine **günstige Investition** a ist der **interne Zinssatz**

$$x_0 := \begin{cases} \infty, & \text{falls sie keine positive Nullstelle besitzt,} \\ x_1, & \text{falls dies die kleinste positive Nullstelle ist.} \end{cases}$$

Satz 2:

(a) Auf der Menge aller **günstigen Investitionen mit höchstens zwei**[28] **positiven Nullstellen** ist der interne Zinssatz aus Definition 3 im Sinne von Definition 2 **brauchbar**.

(b) Auf der Menge **aller günstigen Investitionen** erfüllt der interne Zinssatz zwar die Forderungen I, II und III, nicht aber die Forderung IV aus Definition 2; er ist in diesem Sinne also **nicht brauchbar**.

Es ist wohlbekannt, daß die Zahl m der positiven reellen Nullstellen einer Investition nicht größer ist als die Zahl v'' der Vorzeichenwechsel ihres transformierten Zahlungsstroms und sich von dieser um eine gerade Zahl unterscheidet.[29] Insgesamt gilt die Ungleichungskette

$$(8) \qquad 0 \leq m \leq v'' \leq v' \leq v \leq n \quad ,$$

und auch v' und v'' unterscheiden sich bei nicht neutralen Investitionen um eine gerade Zahl.[30] In Satz 2 ist die Behauptung für günstige Investitionen mit höchstens zwei positiven Nullstellen formuliert. Sie gilt auch in der schwächeren Form, nämlich mit den stärkeren Voraussetzungen, daß der transformierte, der kumulierte oder bereits der ursprüngliche Zahlungsstrom höchstens zwei Vorzeichenwechsel aufweisen. - Analoges gilt für die Sätze 3A und 3B.

26 Siehe die Beispiele 5 und 15.
27 Siehe Abschnitt 3.6.
28 Dabei müssen die Vielfachheiten der Nullstellen mitgezählt werden.
29 Dies ist die Kartesische Vorzeichenregel. Siehe beispielsweise Henrici, P., Complex Analysis, S. 439 ff.
30 Siehe Abschnitt 3.1.

Definition 2: Eine Abbildung von einer Menge von Investitionen in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ ist **als interner Zinssatz brauchbar**, wenn sie

I. jeder Investition dieser Menge genau eine reelle Zahl ≥ -1 oder den Wert ∞ zuordnet (**Existenz, Eindeutigkeit, Ordenbarkeit**);

II. auch auf der Menge der günstigen herkömmlichen Investitionen definiert ist und dort mit dem üblichen internen Zinssatz, der positiven reellen Lösung von Gleichung (4), übereinstimmt (**Permanenz**);

III. einer Investition, die offensichtlich günstiger ist als eine andere,[16] einen höheren Wert als jener zuordnet (**Isotonie**) (wobei die Möglichkeit eingeschlossen ist, daß beide den Wert ∞ oder beide den Wert -1 erhalten);

IV. für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ als Funktion von $\mathbf{R}^{n+1}$ nach $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ [17] mindestens in denjenigen Bereichen stetig ist, wo sie nicht ∞, nicht 0 und nicht -1 ist (**eingeschränkte Stetigkeit**).

Will man Mehrdeutigkeiten durch die Verwendung von Zahlen-Tupeln, Intervallen oder ähnlichen Konstrukten auffangen, so muß man diesen zum Zwecke der Ordenbarkeit doch wieder eine einzelne reelle Zahl zuordnen (o. ä.). Die Forderung der Permanenz legt nahe, auch für beliebige Investitionen den internen Zinssatz mit Hilfe der Lösungen von Gleichung (4) zu definieren. Ist keine positive reelle Lösung vorhanden, muß man bei günstigen Investitionen ∞ verwenden; ist keine Lösung im Intervall $]-1;0[$ vorhanden, muß man bei ungünstigen Investitionen -1 verwenden.[18] Zwei Investitionen können beide den Wert ∞ oder beide den Wert -1 erhalten, auch wenn eine im Sinne der Definitionen 6, 8A oder 8B günstiger ist als die andere.

Dehnt man den Definitionsbereich für den internen Zinssatz (innerhalb $\mathbf{R}^{n+1}$ für ein festes $n \in \mathbf{N}$) weit genug aus, treten Unstetigkeitsstellen auf. Zur Erhaltung der Brauchbarkeit sind aber nur Unstetigkeitsstellen mit einem der Werte ∞, 0 oder -1 in jeder ihrer Umgebungen zugelassen. Diese Werte sind nämlich nur als qualitative Charakterisierungen zu verstehen, wie für die Werte ∞ und -1 in Abschnitt 2.2. ausgeführt wurde und wie dies auch für neutrale Investitionen, mit dem internen Zinssatz 0, gilt. Denn neutrale Investitionen stellen die Grenze zwischen günstigen und ungünstigen Investitionen dar, die ja recht unterschiedlich zu behandeln sind. Unstetigkeit ist an den genannten Stellen unvermeidlich; sie ist aber akzeptabel, weil sie dort jeweils einen Übergang zwischen qualitativen und quantitativen Betrachtungen markiert und durch die besonderen Werte deutlich gekennzeichnet ist.

Man könnte den Begriff 'Brauchbarkeit' noch enger definieren und keinerlei Unstetigkeitsstellen zulassen, also von der Anwendung des internen Zinssatzes z. B. solche Investitionen ausschließen, die nur aus Auszahlungen bestehen. Zwar wird i. d. R. wohl kaum eine derartige Investition geplant, aber auftreten kann sie durchaus; und es ist offensichtlich, daß sie ungünstiger ist als Investitionen, die Einzahlungen enthalten. Dieser qualitative Vergleich wird durch die Setzung -1 für den internen Zinssatz zum Ausdruck gebracht.

16 Siehe die Definitionen 6, 7, 8A und 8B.
17 Wobei eine Investition mit Laufzeit n als reelles (n+1)-Tupel aufgefaßt wird.
18 Siehe die Definitionen 3 und 5B.

Verständlicherweise ist die Brauchbarkeits-Definition (Definition 2) im Hinblick darauf gewählt, daß der in diesen Ausführungen verwendete Begriff des internen Zinssatzes sie auf einer möglichst großen Klasse von Investitionen erfüllt. Auch wenn man sich dieser Definition nicht anschließen will, so liefert die folgende Analyse dennoch Gesichtspunkte für eine Evaluation bzw. für eine eigene Definition.

2.4. Günstige Investitionen (Sätze 1 und 2)

Satz 1: Für eine **günstige Investition**[19] $(a_k)_k$ mit

(a) $v_{a'} = 1$ (der kumulierte Zahlungsstrom hat genau einen Vorzeichenwechsel)

oder sogar nur

(b) $v_{a''} = 1$ (der transformierte Zahlungsstrom hat genau einen Vorzeichenwechsel)

hat Gleichung (4) genau eine positive Lösung x_0, die darüber hinaus im Sinne von Definition 1 zulässig ist; d. h., der interne Zinssatz ist ohne weiteren Zusatz eindeutig definiert.[20]

Mit der Aussage (a) wird ein Ergebnis von Witten & Zimmermann[21] bei wesentlich einfacherem Beweis verschärft und vereinfacht; Aussage (b) ist noch weitgehender. Insbesondere folgt: Auf der Menge der günstigen Investitionen mit genau einem Vorzeichenwechsel im transformierten Zahlungsstrom ist der interne Zinssatz als positive reelle Lösung von Gleichung (4) wohldefiniert, isoton und stetig.

Lockert man die Bedingungen in Satz 1, indem man günstige Investitionen mit $v'' \neq 1$ betrachtet, so kann es passieren, daß Gleichung (4) keine, genau eine oder mehrere zulässige Lösungen hat. Es treten Investitionen auf, die bei **mehreren** verschiedenen zulässigen Zinssätzen den Endwert 0 besitzen.[22] Es bestehen unterschiedliche Möglichkeiten, diese Mehrdeutigkeit zu berücksichtigen:

- **Erstens** kann man sich darauf beschränken, daß man den internen Zinssatz nur für solche Investitionen definiert, für die höchstens eine zulässige Lösung existiert, nämlich diejenigen, die in den Sätzen 2, 3A und 3B erfaßt sind. Dann ist der interne Zinssatz eben nur noch praktisch, aber nicht mehr theoretisch universell zur Bewertung von Investitionen heranziehbar.

19 Die Investition braucht keine herkömmliche zu sein, d. h., sie kann durchaus mehr als einen Vorzeichenwechsel enthalten.
20 Der Gehalt dieses Satzes findet sich bereits in de Faro, C., A Sufficient Condition; in Bernhard, R. H., A More General Sufficient Condition; sowie in Pratt, J. W., Hammond, J. S. III, Evaluating Projects.
21 Siehe Witten, P., Zimmermann, H.-G., Eindeutigkeit, S. 105.
22 In Beispiel 1 etwa bei $x_1 = 0{,}1$; $x_3 = 0{,}3$ und $x_4 = 0{,}4$.

Beispiel 1: Der Zahlungsstrom (100.000.000; -1.410.000.000; 8.932.000.000; -33.475.000.000; 82.193.170.000; -138.151.549.000; 160.976.515.800; -128.395.279.600; 67.085.492.352; -20.733.613.056; 2.878.267.392) hat die Nullstellen $x_1=0{,}1$; $x_2=0{,}2$; $x_3=0{,}3$; $x_4=0{,}4$; $x_5=0{,}5$ und $x_6=0{,}6$; wobei x_3 und x_5 doppelte, x_6 dreifache Nullstelle ist. Als Werte für den internen Zinssatz kommen nur x_1; x_3 und x_4 in Betracht.

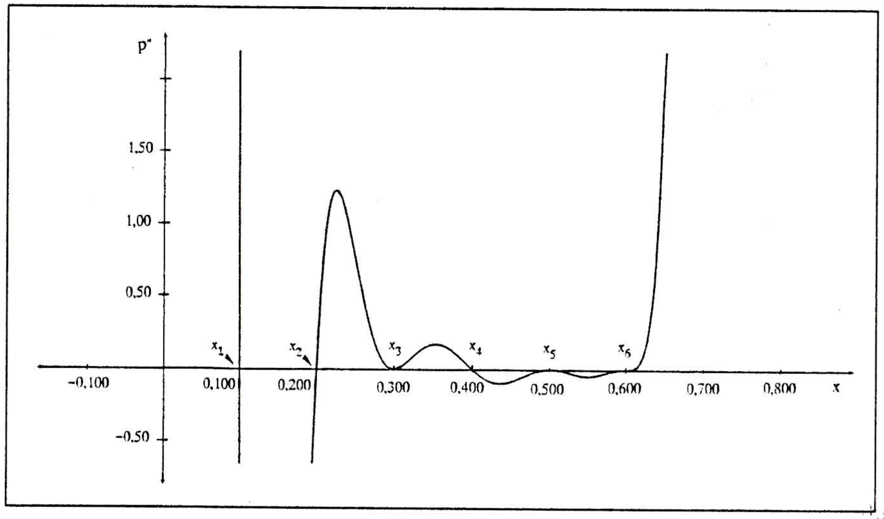

Abbildung 1

Definition 1: Für eine Investition a heißen folgende Nullstellen x_0 **zulässig**, und nur sie kommen als interner Zinssatz in Frage:

(a) Ist a günstig, dann muß x_0 in $\mathbf{R}^+$ liegen, und p" muß (für ein x_1 mit $0 < x_1 < x_0$) in $[x_1;x_0]$ streng monoton fallen.

(b) Ist a neutral, dann muß $x_0=0$ sein.

(c) Ist a ungünstig, dann muß x_0 in $]-1;0[$ liegen, und p" muß (für ein x_1 mit $x_0 < x_1 < 0$) in $[x_0;x_1]$ streng monoton fallen.

Dadurch, daß die strenge Monotonie nur in einer halben und nicht in einer ganzen Umgebung von x_0 verlangt wird, sind bei günstigen Investitionen noch mehrfache Nullstellen vom Typ wie x_3 in Beispiel 1 und bei ungünstigen Investitionen solche vom Typ wie x_5 in Beispiel 1 zulässig. Solche Nullstellen werden beim kontinuierlichen Übergang zu günstigeren (bzw. ungünstigeren) Investitionen nicht-reell komplex, d. h. als reelle Nullstellen verschwinden sie, und der interne Zinssatz geht dann u. U. in ∞ (bzw. -1) über. Insgesamt ergibt sich: Besitzt eine Investition die Laufzeit n, dann weist sie höchstens $(n+1)/2$ zulässige Nullstellen auf.

Wenn nun der Zinssatz -1 in den folgenden Ausführungen dennoch vorkommt, dann nur zur Charakterisierung solcher ungünstigen Investitionen, bei denen kein noch so kleiner positiver Zinsfaktor $1+x$ bzw. Zinssatz $x>-1$ existiert, mit dem Gleichung (4) erfüllt werden könnte. Analog werden mit dem Wert ∞ solche günstigen Investitionen charakterisiert, bei denen kein noch so großer Zinssatz ausreicht, damit die Endwerte der Auszahlungen den Endwerten der Einzahlungen das Gleichgewicht halten können, d. h. Gleichung (4) erfüllt werden kann.

Investitionen mit einem internen Zinssatz ∞ sind durchaus realistisch; z. B. wenn die Auszahlungen, wie beim Bausparen, erst nach einer ganzen Reihe von relativ hohen Einzahlungen erfolgen. Auch negative Renditen können von vornherein geplant sein; etwa als bestmögliche unter mehreren Alternativen zur Leistung eines Deckungsbeitrags.

2.3. Eigenschaften des internen Zinssatzes

Als Funktion auf der Menge der **herkömmlichen** Investitionen mit Wertebereich $\mathbf{R}^{>-1}$ besitzt der interne Zinssatz folgende Eigenschaften, die ihn **formal** zu einem **brauchbaren** Instrument zur Bewertung dieser Investitionen machen. Er liefert für jede herkömmliche Investition eindeutig eine reelle Zahl: positiv für günstige, null für neutrale und negativ (>-1) für ungünstige Investitionen (**Existenz, Eindeutigkeit, Ordenbarkeit**). Ist eine Investition offensichtlich günstiger als eine andere,[14] dann hat sie auch einen höheren internen Zinssatz (**Isotonie**). Kleine Änderungen eines Zahlungsstroms bewirken kleine Änderungen des internen Zinssatzes (**Stetigkeit**).

Von diesen Eigenschaften wird üblicherweise nur unbewußt Gebrauch gemacht. **Ein Ansatz zur Thematisierung** ist in einer Note von Cuninghame-Green[15] zu finden. Allerdings fehlt dort, wie überhaupt weithin, der Sinn für die Bedeutung der Stetigkeit. - Daß der interne Zinssatz auf der Menge der herkömmlichen Investitionen tatsächlich die genannten Eigenschaften hat, wird im folgenden bei einigen weitergehenden Sätzen mit bewiesen.

Im Falle einer Fortsetzung des internen Zinssatzes auf nicht herkömmliche Investitionen ist zu prüfen, inwieweit diese Eigenschaften noch gemeinsam erfüllbar sind bzw. welche Abstriche zu machen sind, um die Brauchbarkeit möglichst optimal zu erhalten. Es sind also Grenzen anzugeben, über die hinaus die Begriffserweiterung nicht mehr brauchbar erscheint. Dazu folgende Meta-Definition:

---

14 Darunter ist im wesentlichen zu verstehen, daß sie höhere Einträge im Zahlungsstrom aufweist bzw. daß sie, falls sie günstig ist, wenigstens im kumulierten Zahlungsstrom höhere Einträge hat. Dies ist genauer in den Definitionen 6, 7, 8A und 8B ausgeführt.

15 Siehe Cuninghame-Green, R. A., Discounted Cash Flow.

die **Gesamtsumme**, a'_n ($=a''_n$), und daneben auch das **Volumen**, $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$, der Investition.

Eine Investition heißt **günstig**, falls die Gesamtsumme positiv ist, **neutral**, falls sie null ist, und **ungünstig**, falls sie negativ ist.[9]

Jedem ursprünglichen bzw. kumulierten bzw. transformierten Zahlungsstrom ist die **Zahl** $v := v_a$ bzw. $v' := v_{a'}$ bzw. $v'' := v_{a''}$ **seiner Vorzeichenwechsel** zugeordnet. An der Stelle i liegt ein Vorzeichenwechsel vor, wenn eine Nummer j mit $0 \le i < j \le n$, $a_i \cdot a_j < 0$ und $a_k = 0$ für $i < k < j$ existiert. Es ist $0 \le v_{a''} \le v_{a'} \le v_a \le n$.[10] Eine **herkömmliche Investition** a ist eine solche mit $a_0 < 0$ und $v = 1$, d. h., bei ihr erfolgen zunächst lauter Auszahlungen und dann lauter Einzahlungen.

2.2. Der interne Zinssatz als Nullstelle des Bestimmungspolynoms

Für eine beliebige Investition $(a_k)_k$ wird der **interne Zinssatz** üblicherweise[11] als **'die'** positive reelle Lösung x_0 folgender Gleichung in x definiert, die das Gleichgewicht zwischen allen auf einen bestimmten Zeitpunkt[12] aufgezinsten Aus- und Einzahlungen repräsentiert und durch Nachvollzug der Kapitalentwicklung über die Laufzeit entstanden gedacht werden kann.

$$(4) \qquad a_0 \cdot (1+x)^n + a_1 \cdot (1+x)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (1+x) + a_n = 0$$

Scheinbar wird also so getan, als ob jedes frei werdende Kapital zu jeder Zeit zum selben Zinssatz wieder angelegt und jedes zu bindende Kapital zu jeder Zeit zu genau diesem Zinssatz finanziert würde. Dies ist die sog. **Wiederanlage-Prämisse**. Die offensichtliche Realitätswidrigkeit dieser Fiktion ist aber kein Argument gegen die Sinnhaftigkeit des Begriffs des internen Zinssatzes. Wie sein Name schon sagt, soll der interne Zinssatz einen Zahlungsstrom allein aus dessen innerer Struktur heraus charakterisieren, und zwar genau aufgrund der Problemstellung im vorigen Absatz, die zu Gleichung (4) führte. Dagegen sind reale Möglichkeiten der Wiederanlage und der Refinanzierung, wie überhaupt exogene Einflußgrößen, definitionsgemäß irrelevant.

Daß der interne Zinssatz **einer** Investition kaum Aussagekraft für die Rentabilität des gesamten Unternehmens besitzt, ist trivial. Wenn aber die Bedingungen für frei werdendes oder zu bindendes Kapital an den jeweiligen Zeitpunkten bekannt sind, dann sind die aus dieser Kenntnis resultierenden Zahlungsströme selbstredend in die Investition einzubeziehen. Fest steht zumindest, daß in die Entscheidung über die Realisierung einer Investition nicht nur der interne Zinssatz einfließen kann, sondern unter vielen anderen Gesichtspunkten auch die Möglichkeiten der Wiederanlage und der Refinanzierung berücksichtigt werden müssen.

9 Diese Bestimmung entspricht der Prüfung einer Investition auf Rentabilität mit der Kapitalwertmethode bezüglich eines Kalkulationszinssatzes von 0.

10 Siehe Abschnitt 3.1.

11 Im Sinne Bouldings; vgl. Boulding, K. E., Time and Investment.

12 Hier: das Laufzeitende.

Durch Ausmultiplizieren wird Gleichung (4) zu

$$(5) \qquad a''_0 \cdot x^n + a''_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a''_{n-1} \cdot x + a''_n = 0 .$$

Mit Induktion nach n zeigt man leicht, daß es sich bei den Koeffizienten a''_k gerade um die Einträge des transformierten Zahlungsstroms handelt. Es geht also um die Nullstellen des Polynoms

$$(6) \qquad p''(x) := p_{a''}(x) := a''_0 \cdot x^n + a''_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a''_{n-1} \cdot x + a''_n$$

bzw.

$$(7) \qquad p(1+x) := p_a(1+x) := a_0 \cdot (1+x)^n + a_1 \cdot (1+x)^{n-1} + \dots + a_n \quad ,$$

wobei $p(1+x) = p''(x)$ gilt. Die Nullstellen von p" bzw. p werden auch als die Nullstellen des Zahlungsstroms $(a_k)_k$ bzw. der Investition bezeichnet.

Das Polynom p bzw. p" ist folgendermaßen zu interpretieren: Für jeden Zins**faktor** $1+x$, bzw. Zinssatz x, gibt es den **Endwert** der Investition bzw. des Zahlungsstroms als Summe der Endwerte aller Zahlungen an. Durch Abzinsen auf den Zeitpunkt 0, d. h. durch Division durch $(1+x)^n$ bzw. x^n, erhält man den Barwert, auch Kapitalwert genannt, in Abhängigkeit vom Zinssatz. Anders als bei der Kapitalwertmethode ist hier aber nicht die Höhe des Barwerts von Interesse, sondern lediglich, ob er positiv, null oder negativ ist, was für den Endwert jeweils gleichermaßen erfüllt ist. Der interne Zinssatz ist dann dadurch bestimmt, daß mit ihm der Kapitalwert der Investition gerade 0 ist.

Selbstverständlich hat Gleichung (4) immer n (komplexe) Lösungen; erst mit der Beschränkung auf positive reelle Zahlen wird z. B. im herkömmlichen Fall die **Eindeutigkeit** erreichbar. Die **Existenz** ist dann aber nicht garantiert; bei neutralen oder ungünstigen herkömmlichen Investitionen hat Gleichung (4) überhaupt keine positive reelle Lösung. Für diesen Typ von Investitionen existiert aber jeweils genau eine Lösung im Intervall $]-1;0]$, und man muß die Grundmenge für Gleichung (4) entsprechend wählen.

Nicht-reelle Werte, aber auch reelle Werte < -1 kommen als interne Zinssätze nicht in Betracht, weil sie nicht bzw. nicht sinnvoll interpretierbar sind. Ein reeller Zinssatz $x < -1$ ergibt einen negativen Zinsfaktor $1+x$, und dieser würde bei jedem Kapital in jeder Periode das Vorzeichen verkehren. Auch ein Zinssatz $x = -1$, der jedes Kapital nach einer Periode auf 0 bringen würde, ist eigentlich absurd und wird bei den folgenden Erörterungen - jedenfalls zunächst - ausgeschlossen.

Eine weitere Sorte von Lösungen der Gleichung (4) kommt aus sachlichen Gründen von vornherein **nicht** in Frage,[13] auch wenn deren Absurdität nicht direkt ins Auge springt. Hierbei handelt es sich um solche Lösungen x_0, die beim kontinuierlichen Übergang zu **günstigeren Investitionen**, etwa durch Erhöhung der Einzahlungen, stetig kleiner werden. Das sind solche Stellen x_0, in denen das Polynom p mit $1+x$ bzw. p" mit x wächst, bei denen also mit steigendem Zinssatz der Endwert der Investition wächst. In Beispiel 1, das in Abbildung 1 veranschaulicht ist, sind dies die Stellen x_2 und x_6.

13 Siehe z. B. Hosterbach, E., Seifert, O., Zur Mehrdeutigkeit, S. 868 und S. 876.

1. Einleitung - Problemaufriß

Der Wert des **internen Zinssatzes**, der **Rendite**, für die Investitions- oder Finanzplanung wird immer wieder in Frage gestellt.[1] Er kann gewiß nicht die einzige Entscheidungs**grundlage**, aber doch eine Entscheidungs**hilfe** sein. Ein Teil der Bedenken resultiert daraus, daß unter bestimmten Umständen **Existenz** und **Eindeutigkeit** des internen Zinssatzes bei der auf Boulding[2] zurückgehenden Definition nicht gesichert sind.

Durch eine leichte Modifikation und Verschärfung dieser Definition kann man erreichen, daß der interne Zinssatz für alle denkbaren Investitionen eindeutig existiert, und zwar so, daß er **isoton** ist, d. h., daß zu offensichtlich günstigeren Investitionen - z. B. mit höheren oder früheren Einzahlungen - auch höhere Zinssätze gehören. Allerdings erhält man dabei **nicht** zugleich auch noch die **Stetigkeit** des internen Zinssatzes als Funktion auf der Menge aller Investitionen; man stößt vielmehr auf Investitionen, bei denen selbst marginale Änderungen im Zahlungsstrom jeweils zu großen Änderungen beim internen Zinssatz führen. Für solche Investitionen (Unstetigkeitsstellen) ist der Begriff des internen Zinssatzes nicht mehr aussagekräftig. Sie treten in einem bestimmten Teilbereich der Menge aller Investitionen verbreitet und dabei nicht leicht erkennbar auf. Dieser Teilbereich läßt sich jedoch - auch formal - recht einfach beschreiben; er besteht aus Investitionen, in denen sich Ein- und Auszahlungen zu häufig und mit zu großen Beträgen abwechseln.

Nach Meyer[3] und anderen kommen Investitionen mit mehreren Vorzeichenwechseln in der Praxis zwar dauernd vor, aber so gut wie nie mit solchen Zahlenwerten, die diese Uneindeutigkeits- bzw. Unstetigkeits-Phänomene nach sich ziehen. Daher liefern diese Phänomene kein Argument gegen die **praktische** Brauchbarkeit des internen Zinssatzes. Dennoch sind die folgenden Untersuchungen nicht nur von theoretischem Interesse, da es u. a. darum geht, die Grenzen, innerhalb derer diese Phänomene nicht auftreten, möglichst weit zu ziehen und einfache Kriterien dafür anzugeben, wann eine Investition innerhalb dieser Grenzen liegt. Darüber hinaus werden Investitionen mit negativen Renditen einbezogen.

Wichtig ist vor allem die Diskussion der Eigenschaften, die ein Wirtschaftlichkeitsmaß, wie der interne Zinssatz, erfüllen sollte, nämlich insbesondere Eindeutigkeit, Isotonie und Stetigkeit.[4] Bei der Prüfung verschiedener Modifikationen zeigt sich, daß nie alle drei Eigenschaften zugleich erfüllbar sind, wenn man die Klasse der untersuchten Investitionen nur groß genug wählt.

---

1 Siehe beispielsweise: Die Diskussion in Kilger, W., Kritik; die Auseinandersetzung zwischen L. Haberstock einerseits und E. Hosterbach, dem sich im wesentlichen anzuschließen ist, andererseits - siehe Hosterbach, E., Kapitalwert; Meyer, H., Fragwürdigkeit; Norstrøm, C. J., Kritische Würdigung, mit der jeweils genannten Literatur.

2 Vergleiche Boulding, K. E., Time and Investment. Diese Definition wird in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 2.2. eingeführt und ab dann verwendet.

3 Vergleiche Meyer, H., Die interne Verzinsung, Heft 8, S. 59.

4 Siehe Definition 2.

Für diese Analyse ist der dezidierte Einsatz mathematischer Methoden erforderlich, und einige der Beispiele und Gegenbeispiele sind im Hinblick auf eine möglichst klare Illustrierung des jeweiligen mathematischen Sachverhalts und nicht auf praktische Realisierbarkeit ausgewählt. - Man erhält folgende Ergebnisse:

Mit Hilfe einfacher arithmetischer Beziehungen läßt sich eine noch umfangreichere Menge von Investitionen angeben als in der Literatur bisher beschrieben, für die Bouldings Definition ohne weiteres eindeutig einen isotonen und stetigen internen Zinssatz liefert.[5] Durch eine geringfügige Erweiterung jener Definition wird die Menge der Investitionen mit eindeutig definiertem isotonen und - eingeschränkt - stetigen internen Zinssatz nochmals erheblich vergrößert.[6]

2. Grundlegende Begriffe und wesentliche Ergebnisse

2.1. Der Zahlungsstrom

Aus finanzmathematischer Sicht ist die **Investition** eines **Investors X** in ein **Investitionsobjekt Y**[7] vollständig durch den **Zahlungsstrom**

$$(1) \qquad (a_0; a_1; \ldots; a_n) =: (a_k)_k =: a\ , \quad n \in \mathbf{N},\ a_k \in \mathbf{R},$$

charakterisiert und wird im folgenden mit diesem identifiziert. Zur Unterscheidung von den Definitionen (2) und (3) wird er auch '**ursprünglicher** Zahlungsstrom' genannt. Die Zeitabstände zwischen den Zahlungen a_k und a_{k-1} sind gleichlang (>0) und stellen die Zinsperioden dar; n ist die **Laufzeit** in Periodenlängen. Die Zahlung a_k findet am Ende der Periode k statt.[8] Zahlungen a_k mit $a_k \geq 0$ sind **Einzahlungen**, also Beträge, die in den Verfügungsbereich des Investors fließen. **Echte** Einzahlungen liegen vor, falls $a_k > 0$ gilt. Zahlungen, für die $a_k \leq 0$ gilt, sind **Auszahlungen**, also Beträge, die aus dem Verfügungsbereich des Investors fließen. Sie sind **echte** Auszahlungen, falls $a_k < 0$ gilt. Schließlich heißen Zahlungen, für die $a_k = 0$ ist, Nullzahlungen. - Die übliche Einschränkung $a_0 \neq 0 \neq a_n$ wird aus systematischen Gründen zunächst nicht vorgenommen; auch über die Vorzeichen der a_k werden vorläufig keine Annahmen getroffen.

Eine wichtige Rolle für die weiteren Überlegungen spielen der **kumulierte Zahlungsstrom,**

$$(2) \qquad (a'_0; a'_1; \ldots; a'_n) =: (a'_k)_k =: a' \quad \text{mit} \quad a'_k := \sum_{j=0}^{k} a_j \ ,$$

der **transformierte Zahlungsstrom,**

$$(3) \qquad (a''_0; a''_1; \ldots; a''_n) =: (a''_k)_k =: a'' \quad \text{mit} \quad a''_k := \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j} \cdot a_j \ ,$$

---

5 Siehe Satz 1 in Abschnitt 2.4.

6 Siehe Satz 2 in Abschnitt 2.4. sowie die Sätze 3A und 3B in Abschnitt 2.5.

7 Diese kann zugleich als Finanzierung von Y durch X aufgefaßt werden.

8 Zur Behandlung innerperiodischer Zahlungen siehe Abschnitt 4.3.

Der interne Zinssatz bei beliebigen Investitionen

Prof. Dr. Peter Bender

Fachbereich Mathematik-Informatik,
Universität-Gesamthochschule Paderborn

In: Wolfgang Lücke & Klaus Schulz (Hrsg.): Umweltschutz und Investitionen. Wiesbaden: Gabler, 9-63
(die Seitenzahlen dieser pdf-Datei sind alle um 8 zu niedrig)

Inhaltsverzeichnis