In: Graumann, Günter u.a. (Hrsg.) (1996) Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 2. Hildesheim: Franzbecker, S. 1-14

Peter Bender, Paderborn

Die Geometrie des Leder-Fußballs - ein Optimierungs-Problem

1. Motivation

"Daß ich den Flächeninhalt eines Kreisrings ausrechnen können muß, akzeptiere ich; denn ich könnte ja von Beruf Installateur werden. Wofür ich mich jedoch mit der geometrischen Struktur des Fußballs befassen soll, kann ich nicht einsehen." Dieser Kommentar eines 14jährigen Hauptschülers (auf dem Land; vor 15 Jahren) zur Unterrichts-Einheit 'Geometrie des Fußballs' bringt unverfälscht das alte Vorurteil zum Ausdruck, das in der Gesellschaft, sowie von vielen Lehrern und Schülern gehegt wird: Der Mathematik-, und ganz besonders der Geometrie-Unterricht, kann höchstens damit gerechtfertigt werden, daß er Formeln bereitstellt, die man 'später' einmal im Beruf (keineswegs aktuell, etwa im Alltag) braucht. Bezieht man in dieses Vorurteil die Möglichkeiten moderner Elektronen-Rechner ein und denkt es vordergründig zu Ende, dann kann der Mathematik-Unterricht an der allgemeinbildenden Schule heute gar nicht mehr gerechtfertigt werden. Diese Meinung wurde vor etwa zehn Jahren, auch auf andere Fächer und auf die Schule insgesamt bezogen, durchaus hin und wieder vertreten.

Diesem naiv-utilitaristischen, oft plutokratisch unterfütterten Denken setzt die Pädagogik seit einigen Jahren einen renovierten Allgemeinbildungs-Auftrag für die Schule entgegen (übrigens auch in der alten DDR). Eine typische Ausprägung liefert die anwendungs-orientierte Mathematik-Didaktik. Der Bildungsgehalt wird nicht mehr aus der Mathematik allein geschöpft, sondern verstärkt aus deren Anwendungen. Das *Anwenden*, sowie die *Einsicht in die* umfassende *Bedeutung* der Mathematik und des Mathematisierens in vielen Bereichen menschlichen Daseins ist hierbei ein fundamentales Lernziel (vgl. Blum 1991). Erst in zweiter Linie kommt es auf die konkrete Anwendung an. Für die Mathematik-Didaktik tut sich hier ein bisher unterschätztes Arbeits-Feld auf, das zunächst nur mittelbar mit dem Unterricht zusammenhängt: Die potentiell mathematik-haltigen Bereiche sind auf eben diese Mathematik-Haltigkeit zu durchforsten, sei es mit dem Ergebnis eines konkreten Unterrichts-Vorschlags für die allgemeinbildende Schule, sei es mit einer Erweiterung des Bilds von Mathematik und ihrer Bedeutung, unmittelbar lediglich auf Didaktiker, Lehrer u.ä. gemünzt.

Als Modell für den realen Raum ist z.B. die Geometrie von vorneherein eng mit ihren Anwendungen verwoben. Gemäß dem erkenntnistheoretischen Ansatz von Bender & Schreiber (1985) sind die Anwendungen sogar Teil der geometrischen Begriffe. Diesen Ansatz haben wir in das "Prinzip der operativen Begriffsbildung" gefaßt (S.26): "Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen ... werden in Herstellungsvorschriften ... umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlagen der ihnen entsprechenden Begriffe." In der Unterrichts-Praxis können Formen i.a. nicht auf diese ideale Weise neu erfunden werden. Vielmehr ist von vorgefundenen, von Menschen hergestellten Formen auszugehen. Die möglichen Zwecke einer solchen Form sind zu rekonstruieren. Es ist zu fragen, welche Eigenart die Form hat, aufgrund deren sie zweck-entsprechend funktioniert (Symmetrie, ebene Seitenflächen, konstante Krümmung usw.). Mittels Idealisierung wird daraus der mathematische Begriff i.e.S. (Würfel, Kugel, Ebene usw.) gebildet. Anschließend werden Fragen der Herstellung diskutiert. Je nach Zweck wird dabei eine ideale Form unterschiedlich genau realisiert (z.B. ebener Sportplatz vs. ebener Spiegel). Herstell-Verfahren sind in dieser Phase der Begriffs-Bildung von Interesse. Schließlich kann durch realen Gebrauch festgestellt werden, ob die Form ihre Zwecke tatsächlich gut erfüllt.

Dieses Muster operativer Begriffsbildung kann gewiß nicht die einzige Form des Begriffs-Erwerbs im Geometrie-Unterricht sein, aber es sollte dort wenigstens immer wieder aufscheinen. Es trägt wesentlich zu dessen Verankerung in der Lebenswelt bei, von der positive Impulse auf Begriffs-Bildung, Argumentations-Fähigkeit, Anwendungs-Fähigkeit, Motivation und Allgemeinbildung ausgehen können. Allerdings stellt es auch besondere Anforderungen an die fach-übergreifende Kompetenz der Lehrer.

Das Eingangs-Zitat weist mit aller Deutlichkeit darauf hin, daß einem noch so überzeugenden Konzept der Erfolg versagt bleibt, wenn es nur in einer vereinzelten Unterrichts-Einheit realisiert wird. Es muß vielmehr in einen Unterricht eingebettet sein, in dem immer wieder gefragt wird: Warum ist ein bestimmter Sachverhalt gerade so? Wie könnte er noch sein? Was geschieht, wenn man gewisse Bedingungen, Größen o.ä. variiert? Diese Forderung nach *funktionalem, plausiblem Denken* bedeutet nicht, daß sich der ganze Unterricht um Anwendungen drehen muß. Die Mathematik entfaltet ja gerade ihre Kraft, indem sie zunächst, eventuell über längere Strecken, von der konkreten Anwendungs-Situation gelöst und danach wieder in diese eingebracht wird. Die Forderung bezieht sich auch auf diejenigen Unterrichts-Phasen, in denen reine Mathematik getrieben wird, auf Definitionen, Sätze, Formeln usw.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich zwar wesentlich auf die Ausführungen in (Bender & Schreiber 1985, S.126ff), sie sind aber insofern neu, als die Optimalität des Fußballs zunächst völlig ohne Rückgriff auf die Idee des archimedischen Körpers diskutiert wird. Diese wird erst spät ins Spiel gebracht und entfaltet dann besonders eindringlich die formale und heuristische Kraft eines mathematischen Begriffs. Die Sach-Analyse in Kap. 2 liefert nicht nur den stofflichen Hintergrund einer möglichen Unterrichts-Einheit, sondern zugleich eine ausführliche Vorlage für den Unterricht selbst. Wegen restriktiver Platz-Vorgaben durch die Herausgeber muß ich mich jedoch, vor allem in den Abschnitten 2.2 und 2.3, auf Stichworte beschränken. In Kap. 3 wird dann, basierend auf eigenen Erfahrungen (anknüpfend an Bender & Schreiber 1985, S.224ff), ein Unterrichts-Vorschlag konkretisiert.

2. Die Geometrie der Leder-Decke des modernen Fußballs

2.1 Der Zweck und die Funktionsweise der Leder-Decke

Als vor über 20 Jahren der Fußball mit der geometrischen Struktur des archimedischen Körpers (5 6 6) eingeführt wurde, geschah dies in zeitlichem Zusammenhang mit dem Einzug des Farb-Fernsehens in weite Bevölkerungs-Kreise. Die Fernseh-Zuschauer waren angetan vom satten Grün des Fußball-Rasens und von der Kontrast-Wirkung des neuen, schwarz-weiß gefärbten Fußballs. Dieser wurde deswegen auch "Fernseh-Ball" genannt. Allerdings war das wesentlich Neue nicht die Farbgebung - eine ähnliche hätte man ja auch den alten Bällen verpassen können -, sondern die geometrische Struktur der Leder-Decke des Balls. Der bis dahin übliche Zwölf-Flächner mit der Oktaeder-Gruppe als Symmetrie-Gruppe wurde abgelöst vom 32-Flächner mit der Ikosaeder-Gruppe.

Abb.1

Ein *Fu ball* ist ein Gerät, das beim Fußball-Spiel auf einem ca. 3/4 ha großen rechte igen Platz vornehmlich mit dem Fuß, durchaus auch mit anderen Körperteilen, nit der Hand aber nur in besonderen Spiel-Situationen (Einwurf, Torwart-Abspiel) bewegt werden darf. - Beim *American Football* dagegen z.B. darf der Ball auch unter dem Arm getragen und mit der Hand geworfen werden; er ist daher so geformt, daß für seine Behandlung ein größeres Geschick erforderlich und seine Flugbahn besonders stabil ist. - Die Flugbahn des *Bumerangs* soll einen geschlossenen Weg beschreiben; dies kann auf der Basis seiner raffinierten Form mit einer besonderen Wurf-Technik erreicht werden. - Der *Spiel-Würfel* soll ein Stück weit rollen, damit er wirklich ein Zufalls-Gerät ist, aber aus praktischen Gründen nicht allzu weit; und aus prinzipiellen Gründen soll er nur endlich viele, deutlich unterscheidbare Ruhe-Lagen einnehmen können.

Abb.2

Alle diese Zweck- und Funktions-Analysen führen *nicht notwendig* auf bestimmte Formen, sondern erweisen gewisse Formen als besser geeignet im Vergleich zu gewissen anderen. Neben rein geometrisch-physikalischen Aspekten spielen physiologische, ökonomische und ästhetische Gesichtspunkte eine bedeutende Rolle, und zwar nicht nur für die Auswahl und Verarbeitung des Materials oder für die optische Gestaltung, sondern sehr wohl auch für die Form-Gebung. Der Verbreitung neuer Formen zur Erfüllung alter Zwecke stehen das Vorhandensein von Maschinen, ausgebildeten Menschen, Verhaftung in der Tradition, Trägheit im Denken u.v.a. entgegen (z.B. bei der Anordnung der Schreibmaschinen-Tastatur); ihre Durchsetzung kann von offensichtlichen Vorteilen, gezielter (Des-) Information, Mode u.v.a. gefördert werden (Nase am Schiffsrumpf unter der Wasserlinie zur Stabilisierung, Fosbury Flop beim Hochsprung, Bauchlage beim Schlafen für Säuglinge). Man liegt selten falsch mit der Annahme, daß ökonomische Interessen den Ausschlag geben. *Allerdings kann man im Nachhinein häufig objektive Merkmale feststellen; und um solche geht es im folgenden.*

Ein Fußball besteht aus einer flexiblen Gummi-Blase, die von einer Decke aus Leder bzw. leder-ähnlichem Kunststoff geschützt ist. Diese Decke ist aus im Prinzip ebenen Stücken zusammengenäht. Durch Befüllen der Blase mit Luft mit hohem Druck wird der Decke eine Form verpaßt, die die ideale Kugel hinreichend gut annähert und dem Ball folgende Eigenschaften verleiht: Nicht zu weich, nicht zu hart; nicht zu elastisch, nicht zu starr; nicht zu schwer, nicht zu leicht. Immerhin ist er wuchtigen Fuß-Tritten ausgesetzt, soll hohe Geschwindigkeiten erreichen und zugleich von menschlichen Körpern schmerz-frei gestoppt werden können. Im Moment eines Aufpralls muß er erhebliche Verformungen erleiden können, aber danach wieder die ursprüngliche Form annehmen, als ob er nie verformt gewesen wäre, und das millionen-mal. Ein Voll-Körper (z.B. Vollgummi-Ball) kommt daher nicht in Frage. Anscheinend kennt man aber kein erschwingliches Material, das so stark gekrümmt werden kann, daß man die Decke unter Beachtung der o.a. Eigenschaften aus *einem* Stück anfertigen kann.

So nimmt man bei der Herstellung den zusätzlichen Arbeitsgang des Zusammen-Nähens und beim fertigen Ball die Nähte als Schwachstellen in Kauf. Je kleiner man die Stücke macht, aus denen sich die Decke zusammensetzt, desto geringeren Verformungs-Kräften wäre das einzelne Stück ausgesetzt. Der Verkleinerung der Stücke sind aber durch den Arbeits-Aufwand und durch die Forderung Grenzen gesetzt, daß die Nähte einzeln und insgesamt nicht zu lang werden dürfen, da ja dann diese die Kräfte aushalten müssen.

2.2 Kriterien für die Optimierung der geometrischen Struktur der Leder-Decke

Der gerade beschriebene Konflikt zwischen der Forderung kleiner Flächen-Stücke und der Forderung einer kurzen Gesamt-Naht ist typisch für Optimierungs-Probleme. Bei isolierter Betrachtung einer Größe müßte diese möglichst extrem (je nach dem: groß oder klein) gemacht werden, um eine relevante Wirkung in größtmöglicher Ausprägung zu erzielen. Dabei verändern sich aber häufig andere Größen mit, wodurch die gewünschte Wirkung kompensiert wird, und es gilt, die Eingangs-Größen zu optimieren, was meistens bedeutet, sie nicht zu maximieren oder zu minimieren. Dieser Konflikt konkurrierender Forderungen bzw. Größen wird uns in diesem Abschnitt laufend begegnen.

Damit sich die Oberfläche lückenlos und überlappungsfrei aus *ebenen* Teilflächen zusammensetzt (Realisierung der Idee des Passens), müssen diese Flächen *Polygone* sein, zumal ihre Ränder von den Nähten gebildet werden. *Die Leder-Decke des Fußballs ist also ein Polyeder, selbstredend ein konvexes* (d.h. der eingeschlossene Voll-Körper ist konvex), mit Polygonen, die, weil sie starke Verformungs-Kräfte aushalten müssen, günstigerweise möglichst kreis-ähnlich sind.

Bei gegebener Eckenzahl n ist das *regelmäßige n-Eck* besonders kreis-ähnlich in folgendem Sinn: Der kleinste Winkel ist besonders groß, nämlich $(n-2)*180°/n = 180°-360°/n$, und die längste Seite ist besonders kurz. Auch bezüglich anderer Kreisähnlichkeits-Kriterien ist das regelmäßige n-Eck optimal: Quotient aus minimalem Radius aller umbeschriebenen und maximalem Radius aller einbeschriebenen Kreise; Quotient aus Flächeninhalt des kleinsten umbeschriebenen Kreises und des Polygons; Größe der Symmetrie-Gruppe, u.a.

Das regelmäßige n-Eck hat die Dieder-Gruppe als räumliche Symmetrie-Gruppe, d.h. es hat $2n$ Deck-Drehungen, mindestens doppelt so viele wie jedes nicht-regelmäßige n-Eck. Diese Eigenschaft prädestiniert regelmäßige Polygone zur Verwendung für kugel-ähnliche Polyeder. - Im folgenden werden die betrachteten Polygone grundsätzlich als regelmäßig vorausgesetzt und damit durchaus denkbare Alternativen ohne weitere Begründung ausgeschlossen. - Eine unmittelbare Konsequenz dieser Einschränkung ist, daß alle Kanten des Polyeders gleiche Länge haben (die ein- für allemal 1 gesetzt wird).

Mit wachsender Eckenzahl n ist zwar das regelmäßige n-Eck immer kreis-ähnlicher, aber zur Erzeugung kugel-ähnlicher Polyeder eignen sich Polygone mit großer Eckenzahl dennoch nicht, weil sie - bei fester Seitenlänge 1 - einen großen Flächeninhalt, nämlich $n*\cot(180°/n)/4$, haben und ausgedehnte flache Stellen bilden. (Teilt man das n-Eck in n gleichschenklige Dreiecke wie in Abb.3, dann wird deren Winkel an der Spitze mit zunehmendem n immer kleiner, die Dreiecke werden wegen der festen Basislänge immer größer, und zusätzlich wird ja ihre Anzahl immer größer.)

Abb.3

Die häufig erfolgreiche Strategie, dreidimensionale Probleme auf zweidimensionale zu reduzieren, greift hier nicht. Man muß auch die gegenseitige räumliche Lage der ebenen Teilflächen des Polyeders beachten. Wenden wir uns daher dessen *räumlichen Ecken* zu: Im folgenden wird unterschieden zwischen Ecke (= Eck*punkt*) und *Eckenkranz* (= Vereinigung aller Flächen, die an eine Ecke stoßen, = 'räumliche Ecke'). Die k Polygone eines Eckenkranzes liegen in einer natürlichen zyklischen Ordnung. Wenn sie, in dieser Ordnung, die Ecken-Anzahlen n_1, n_2, ..., n_k haben, dann wird der *Eckenkranz auch mit* $(n_1\ n_2 \ldots n_k)$ bezeichnet. Ist bei einem *Polyeder* jeder Eckenkranz vom selben zyklischen Typ, dann erhält es *als Ganzes* diese Bezeichnung. Ist $k=3$, dann heißt der Eckenkranz *simpel*. Hat ein *Polyeder* lauter simple Eckenkränze, dann heißt es insgesamt *simpel*. Die Winkel eines Eckenkranzes sind gerade diejenigen Polygon-Winkel, die die zugehörige Ecke als Scheitel haben.

Abb.4

Die *Winkelmaß-Summe eines konvexen Eckenkranzes* ist $<360°$. Dies kann man sich klar machen, indem man einen simplen Eckenkranz entlang einer seiner Kanten aufschneidet und ein ebenes Netz herstellt. Durch die drei Polygone wird der Vollwinkel um die zugehörige Ecke nicht ganz ausgefüllt, sondern es entsteht eine Lücke. Diese ist nötig, damit wirklich erst nach der Erzeugung eines räumlichen, d.h. nicht-ebenen, Eckenkranzes *keine Lücke* mehr vorhanden ist. Das Argument läßt sich auf beliebige *konvexe*, nicht aber auf nicht-konvexe Eckenkränze verallgemeinern.

Abb.5

Für den Fußball kommen nur simple Polyeder in Frage, weil an keiner Stelle mehr als drei Nähte zusammenlaufen sollen. Außerdem steht dann den Winkeln eines Eckenkranzes ein größtmögliches Winkelmaß zur Verfügung. Große Winkel sind aber, wie oben ausgeführt, wünschenswert.

Enthält ein konvexer Eckenkranz lauter regelmäßige Polygone, so muß darunter eines sein, dessen Eckenzahl ≤ 5 ist; denn 3 Polygone mit Eckenzahlen $n_1, n_2, n_3 \geq 6$ liefern eine Winkelmaß-Summe $\geq_W 3*120° = 360°$. Nach dem Prinzip möglichst großer Polygon-Winkel wird im folgenden $n_1, n_2, n_3 \geq 5$ angenommen. (Die Fälle, bei denen 4- oder sogar 3-Ecke beteiligt sind, wären in prinzipiell gleicher Weise, allerdings aufwendiger und mit schlechteren Ergebnissen zu behandeln.)

Ob es ein Polyeder, dessen Polygone alle eine Eckenzahl >4 haben, überhaupt gibt, steht im Augenblick noch dahin. Die Existenz des Leder-Fußballs ist kein Beweis, denn es könnte ja sein, daß es nur dadurch gelingt, seine Flächen zusammenzufügen, daß man sie und die Kanten ein wenig verbiegt, so daß das Polyeder gar kein solches mehr wäre, da es nicht-ebene Seitenflächen enthielte. Aus der Sicht der Anwendungs-Praxis sticht dieser Einwand jedoch nicht; denn es kommt nicht auf die mathematische Existenz eines euklidischen archimedischen Polyeders (5 6 6), sondern auf die praktische, d.h. im Rahmen einer vernünftigen Genauigkeits-Forderung liegende Existenz und eigentlich nur auf die Möglichkeit der Verformung zu einer guten Kugel an. Hierfür ist das Realisat 'Fußball' dann doch ein Beleg.

Als Eckenkränze des Polyeders kommen wegen der beschränkten Winkelmaß-Summe dann nur (5 5 5), (5 5 6), (5 5 7), (5 5 8), (5 5 9), (5 6 6) und (5 6 7) in Frage, wobei allerdings gegen 7-, 8- oder gar 9-Ecke von vorneherein deren große Fläche im Vergleich zum 5-Eck spricht.

Der oben beschriebenen Herstellung eines Eckenkranzes aus einem ebenen Netz entnimmt man direkt, daß in einem simplen Eckenkranz

- durch die 3 Polygon-Winkel in der Ecke auch die 3 Neigungs-Winkel je zweier Polygone bzw.
- durch 2 Flächen-Winkel in der Ecke und den Neigungs-Winkel der beiden zugehörigen Polygone der dritte Flächen-Winkel und die Neigungs-Winkel des dritten Polygons gegen die beiden ersten

festgelegt ist.

Zur Konstruktion eines simplen konvexen Polyeders kann man mit zwei konvexen Polygonen beginnen, die nicht in ein und derselben Ebene liegen, aber eine Kante und damit zwei Ecken gemeinsam haben. Die beiden Polygone legen zwei simple Eckenkränze fest, in denen jeweils der Flächen-Winkel des dritten Polygons und dessen Neigungs-Winkel gegen die Ausgangs-Polygone eindeutig bestimmt sind. I.a. können diese dritten Polygone wegen des unpassenden Winkelmaßes nicht regelmäßig gemacht werden. Verzichtet man nun auf die Forderung der Regelmäßigkeit der Polygone, so kann man auf diese Art und Weise munter weiter bauen: Es entstehen immer wieder neue Ecken, in deren Eckenkränze bereits zwei Polygone vorhanden sind und ein drittes eingepaßt werden muß.

Dabei verhält sich die globale Krümmung des Polyeders (die man hier intuitiv-naiv mit beiden Händen veranschaulicht, die eine große Kugel formen) so, daß eine randlose konvexe Fläche, topologisch eine Kugel, entstehen müßte, jedenfalls wenn man mit den Flächenwinkel-Maßen um eine feste Größe e unter $180°$ und mit den Winkelmaß-Summen in den Eckenkränzen um e unter $360°$ bleibt.

Abb.6

Leider schafft man es aber meistens auf diese Art nicht, ein Polyeder zu bauen. Man stößt nämlich unweigerlich auf die Situation, daß *durch Anfügen eines Polygons zwei (oder mehr) Eckenkränze simultan geschlossen werden* sollen. Das klappt dann und nur dann, wenn die vorhandenen Kanten, an die das neue Polygon angeheftet werden soll, alle in einer Ebene liegen (s. Abb.6b). Dies ist i.a. nicht der Fall. Und nun zeigt sich, daß die Forderung *regelmäßiger* Polygone keine Erschwerung, sondern eine Erleichterung darstellt, wie man an den Beispielen (5 5 5) und (5 6 6) sieht:

Abb.7

Hat man drei kongruente regelmäßige Fünfecke zu einem Eckenkranz (5 5 5) zusammengefügt, dann paßt aus Kongruenz-Gründen in jede der nächsten drei Ecken wieder ein solches Fünfeck (s. Abb.6a). Von der lokalen Betrachtung gehen wir nun zur globalen Betrachtung über: Man stellt zwei Pudding-Schalen (s. Abb.7) her, die dreh-symmetrisch mit Drehwinkel $360°/5=72°$ sind. Der Rand dieser Pudding-Schalen ist eine Zickzack-Linie mit je fünf Punkten oben und unten. Die oberen Punkte liegen auf einem Kreis um die Symmetrie-Achse, die unteren ebenfalls, und die beiden Kreise sind kongruent mit Radius $1/\tan 36°$. Daher paßt die eine Schale, mit dem Boden nach oben, genau in die andere, und zusammen erzeugen sie das Polyeder (5 5 5), das sog. Dodekaeder. Dieses käme als Fußball durchaus in Frage, und tatsächlich ist es als Spielzeug für Kleinkinder verbreitet.

Abb.8

Für das Polyeder (5 6 6) sind Konstruktion und Existenz-Nachweis prinzipiell dieselben; sie sind nur etwas komplizierter. Man beginnt mit einem Fünf- und zwei Sechsecken in der Ebene um einen Punkt herum, so daß zwischen den beiden Sechsecken eine Lücke von 12o auftritt, konstruiert durch Klappen die räumliche Ecke und überzeugt sich so, daß wieder eine fünfzählig dreh-symmetrische Pudding-Schale, diesmal mit Sechsecken an den Seitenflächen, gebaut werden kann. Anders als bei (5 5 5) kann man nun nicht einfach mit einer dazu kongruenten Schale das Polyeder abschließen. Aus Kongruenz-Gründen passen in die fünf Zakken nämlich Fünfecke, und nur solche. Von den danach entstehenden zehn Ecken werden immer zwei simultan durch je ein Sechseck geschlossen, was sich auch wieder aus naheliegenden Kongruenz-Betrachtungen ergibt. Diese Schale, bestehend aus 16 Flächen, kann nun mit einer zweiten, dazu kongruenten, zu einem Polyeder ergänzt werden. Daß die beiden Schalen genau ineinander passen, sieht man nicht mehr so direkt wie den entsprechenden Sachverhalt beim Dodekaeder, und vielleicht erkennt man erst jetzt, warum dort an dieser Stelle der Konstruktion eine Beweis-Überlegung über die Anschauung hinaus erforderlich ist.

Sind p-Ecke (mit $p>6$) beteiligt, so schafft man zwar vielleicht noch eine Pudding-Schale, z.B. mit p-eckigem Boden und fünfeckigen Rand-Stücken, aber dann ist kein Weiterbau mehr möglich.

Bei den beiden Polyedern (5 5 5) und (5 6 6) hat sich automatisch die Eigenschaft eingestellt, daß ihre Eckenkränze alle kongruent sind. Aus der bisherigen Diskussion ergibt sich direkt für jedes simple Polyeder mit regelmäßigen Polygonen, daß alle seine Eckenkränze kongruent sind. Diese Kongruenz hätte man auch vorab fordern können mit dem Ziel, gleichartige 'Stellen' der Fußball-Oberfläche (also die Ecken, die inneren Punkte der Kanten und die inneren Punkte der Flächen mit ihren Umgebungen) möglichst homogen zu machen, um eine möglichst gute Kugel-Form und eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Zug-Kräfte zu erreichen.

Die nun endlich in den Blick gerückte Kongruenz der Eckenkränze stellt einen wesentlichen Zusammenhang her zwischen der lokalen und globalen Form eines Polyeders. Sie wird daher als <u>ein</u> definitorisches Element für einen besonderen Typ von regelmäßigem Polyeder herangezogen, dem <u>archimedischen Polyeder</u>.

<u>2.3 Der Nutzen des Begriffs des archimedischen Polyeders</u>

<u>Definition:</u> Ein konvexes, nicht notwendig simples, Polyeder, das nur aus regelmäßigen Polygonen besteht und dessen Eckenkränze alle kongruent sind, heißt *archimedisch*.

Der Eckenkranz eines archimedischen Polyeders enthält höchstens fünf Polygone. Das kleinste Polygon, das Dreieck, trägt nämlich schon 60° zur Winkelmaß-Summe bei, die ja unter 360° liegen muß. Wenn man sich also einen Überblick über alle archimedischen Polyeder verschaffen will, betrachtet man die drei Fälle: drei, vier oder fünf Polygone in einem Eckenkranz. In jedem dieser Fälle berechnet man bei den verschiedenen Kombinationen die Winkelmaß-Summe und schließt diejenigen aus, bei denen diese $\geq 360^\circ$ ist.

Von den verbleibenden Kombinationen scheiden zahlreiche aus kombinatorischen Gründen aus. Wenn man z.B. einen Eckenkranz (m n p) hat und eine der drei Zahlen m, n und p ungerade ist, dann müssen die beiden anderen gleich sein. Also ist (5 5 p) mit $p \neq 5$ nicht möglich, weil m=5 ungerade und $n=5 \neq p$ ist. Baut man nämlich (in diesem Beispiel) die Pudding-Schale mit dem m-Eck als Boden, dann müssen sich bei der Schalen-Wand n- und p-Ecke abwechseln, damit in jedem Eckenkranz je ein m-, n- und p-Eck enthalten ist. Da m ungerade ist, ist dieses Abwechseln nicht möglich.

Abb.9

Ähnliche Regeln gibt es auch für Eckenkränze mit vier bzw. fünf Polygonen. Daß die dann noch übrigbleibenden Kombinationen alle als Polyeder realisiert werden können, kann man konstruktiv nachweisen: Offensichtlich existieren (3 3 3) (Tetraeder) und (4 4 4) (Würfel); die Existenz von (5 5 5) (Dodekaeder) ist in 2.2 gezeigt; außerdem sind trivialerweise die Prismen (4 4 n) mit den regelmäßigen n-Ecken als Boden- und Deckflächen und Quadraten als Seitenflächen archimedische Polyeder. Von diesen vier Grundtypen, die man sich nun am besten als Voll-Modelle vorstellt, ausgehend kann man nun durch Abstumpfen von Ecken, Kanten und ähnliche Operationen (bei denen immer auf das Einhalten der Definition zu achten ist!) sämtliche archimedische Polyeder herstellen (s. Aschkinuse 1963 & 1969: 435, 443 & 445). Einige Beispiele:

Abb.10

Bereits bei bloßem Hinsehen erweist sich (5 6 6) als der Kugel am ähnlichsten. Dieses Argument ist jedoch riskant und mathematisch angreifbar. Bezüglich welcher Kriterien ist (5 6 6) der Kugel am ähnlichsten? Z.B. hat (5 5 5) den Vorzug, daß alle Seitenflächen kongruent sind; oder das Prisma (4 4 n) mit n>30 hat eine größere Symmetrie-Gruppe.

Die Größe der Symmetrie-Gruppe ist in der Tat ein Hinweis auf Kugel-Ähnlichkeit. Die vier oben genannten Polyeder haben als Symmetrie-Gruppen die

- Tetraeder-Gruppe mit 12 Elementen (bei 7 Dreh-Achsen),
- Oktaeder- " " 24 " (" 13 "),
- Ikosaeder-" " 60 " (" 31 "),
- Dieder- " " 2n " (" n+1 "),

wobei die Dreh-Achsen alle durch einen Punkt gehen, den man als Mittelpunkt des Polyeders bezeichnen kann.

Alle anderen archimedischen Polyeder haben eine dieser vier Gruppen als Symmetrie-Gruppe. Während sich aber bei den drei erstgenannten Gruppen die Richtungen der Dreh-Achsen einigermaßen im Raum verteilen, liegen bei der Dieder-Gruppe n Achsen in einer Ebene, und eine einzige steht senkrecht auf dieser Ebene. In der Tat wird das Prisma mit wachsendem n der Kugel immer unähnlicher und einer flachen Scheibe immer ähnlicher, weil Boden- und Deckfläche im Vergleich zu den Seitenflächen riesig werden. Man kann es also aus der weiteren Betrachtung ausschließen. Damit ist auch noch einmal das Argument aus 2.2 bestätigt, daß eine große Eckenzahl einer Seitenfläche zwar deren Kreis-Form förderlich, aber der Kugel-Form des ganzen Polyeders hinderlich ist.

Abb.11

Nimmt man nun die Größe der Symmetrie-Gruppe als Kriterium, dann kommen die archimedischen Polyeder in Betracht, die zur Ikosaeder-Gruppe gehören. Beachtet man noch, daß diese simpel sein sollen, dann bleiben (5 5 5), (5 6 6), (3 10 10) und (4 6 10). Bei einer ungefähr vorgegebenen Größe des Balls zeigt sich nun, daß bei (5 5 5) die Fünfecke und bei (3 10 10) sowie (4 6 10) die Zehnecke sehr große flache Bereiche darstellen und die Polyeder dort sehr stark von der Kugel abweichen (s. Abb.11).

Für (5 6 6) sprechen weitere Kriterien, für deren Verifizierung man aber stärker in konkrete, z.T. umständliche Berechnungen einsteigen muß: Das ebene Netz des Eckenkranzes hat eine besonders kleine Lücke, nämlich nur 12°. Dies bedeutet, daß die beiden Sechsecke nicht sehr weit geklappt werden müssen, bis sie sich treffen, d.h. daß die räumliche Ecke sehr flach ausfällt (vgl. Abb.5). - Die Rolle der Neigungs-Winkel müßte nun quantifiziert werden, z.B.: Rechnet man für alle simplen archimedischen Polyeder die maximale Seitenflächen-Neigung aus, dann erweist sich die von (5 6 6) als minimal. Dafür ist die kleine Lücke beim Ausbreiten eines Eckenkranzes in die Ebene ein guter Indikator, aber noch kein sicherer Nachweis. Dieser ergibt sich, unter Vermeidung umständlicher Rechnungen, erst dadurch, daß man vergleicht, wie weit bei diversen Polygon-Konfigurationen in der Ebene jeweils geklappt werden muß, bis die räumliche Ecke geschlossen ist. Da man nur endlich viele Möglichkeiten prüfen muß, genügen hier qualitative Abschätzungen.

Beim Aufpumpen geht die polyedrische Lederdecke p in eine Kugel über, die etwas größer als die Umkugel u ist (welche für ein archimedisches Polyeder eindeutig existiert). Während sich die Ecken anfangs fast nicht bewegen, legen die Mitten der Seitenflächen die weitesten Wege zurück, und zwar umso weiter, je größer die Seitenfläche ist. Dieser weiteste Weg, ungefähr die metrische Abweichung $\max_{P \in p} \min_{X \in u} d(P,X)$ des Polyeders von seiner Umkugel, normiert mit deren Radius, ist ein direktes Maß für die Verformung. Mit membran-theoretischen Methoden hat Schoop (1986) diese Verformung beim Polyeder (5 6 6) untersucht und dabei erwartungsgemäß festgestellt, daß die mittlere Zugspannung in den Sechsecks-Mitten etwas größer als in den Fünfecks-Mitten und dort wesentlich größer als in den Ecken ist.

Weitere Kriterien für Kugel-Ähnlichkeit sind z.B. das Verhältnis der Oberflächen-Inhalte und das Verhältnis der Volumina von Polyeder und Umkugel (bzw. kleinster umfassender Kugel). Alle diese Kriterien führen, unter den simplen archimedischen Polyedern, auf (5 6 6) als Optimum.

An die Beschränkung der Grundmenge muß immer wieder einmal erinnert werden. Z.B. liegt das Verhältnis der Volumina näher bei 1, wenn man man bei (5 6 6) alle Kanten zwischen je zwei Sechsecken etwas verkürzt und die Fünfecks-Kanten entsprechend verlängert, wobei das Optimum bei einer Verkürzung um etwa 10 % liegt (Pedersen 1980). Dieses Polyeder ist nicht archimedisch, weil die Sechsecke nicht regelmäßig sind, aber es hat noch die volle Ikosaeder-Gruppe als Symmetrie-Gruppe. In der Herstell-Praxis wird es dennoch nicht verwendet, da der Unterschied so gut wie nicht spürbar ist. Ein gewichtiges Argument dürfte auch darin bestehen, daß mit dem regelmäßigen Sechseck die Ebene lückenlos parkettiert werden kann, daß also beim *Ausschneiden regelmäßiger Sechsecke* aus einem flachen Stück Leder weniger Abfall entsteht als bei unregelmäßigen.

Abb.12

2.4 Die praktische Verwendung archimedischer Polyeder

In unserer vom Menschen gemachten Umwelt begegnen uns archimedische Polyeder auf Schritt und Tritt. Allerdings wird bei vielen der so geformten Gegenstände nur ein Teil der Eigenschaften gebraucht, die sich aus der Archimedizität ergeben, und diese wird dann häufig nur partiell verwirklicht. Insbesondere haben oft die Kanten unterschiedliche Längen, d.h. die Seitenflächen sind nicht alle vollkommen regelmäßig. Trotzdem ergibt sich in vielen Fällen immer noch einer der vier in 2.3 genannten Typen von Symmetrie-Gruppen.

Prisma (4 4 n): Streckt man bei einem archimedischen Prisma die quadratischen Seitenflächen, so daß diese zu länglichen Rechtecken werden, so hat die neue Form immer noch die volle Dieder-Gruppe als Symmetrie-Gruppe. In dieser abgeschwächten Form sind archimedische Polyeder, insbesondere Quader (Gebäude, Verpackungen, Möbel usw.) allgegenwärtig. Allerdings ist die hohe Symmetrie für den Gebrauch nicht wesentlich, sondern es kommt auf die Orthogonalität der Seitenflächen zueinander bzw. zum Erdboden und auf das Passen solcher Gegenstände aneinander an.

Tetraeder (3 3 3): Ähnlich verhält es sich mit *tetraeder-förmigen Getränke-Tüten*. Bei ihrer Herstellung (beschrieben in Wittmann & Müller 1977 & 1984: 127ff) ergibt sich wohl ein Tetraeder. Dessen Kanten müssen aber nicht gleichlang sein und sind es auch nicht. - Die Gerüste für Heu-Haufen (sog. *Heu-Bock*), wie man sie früher auf unseren Feldern sehen konnte, waren oft Tetraeder. Der Nutzen dieser Form liegt nicht in der räumlichen Symmetrie, sondern in der primitiven Herstellbarkeit zusammen mit ihrer Stabilität: Man braucht ja nur sechs, am einfachsten - aber nicht notwendig - gleichlange, Stangen entsprechend zusammenzubinden, und man hat ein simples Polyeder aus vier Dreiecken, die wegen des Kongruenz-Satzes 'SSS' alle starr sind.

Wie hier kommt es bei Bauwerken, die archimedisch gestaltet sind, i.a. nicht auf die räumliche Symmetrie an, sondern meistens nur auf eine ebene Dreh-Symmetrie. Trotzdem werden oft *alle* Flächen (bzw. Kanten) kongruent gewählt. Dies hat zum einen ökonomische Gründe, da die Bauteile dann einheitlich vorgefertigt werden können, und kann zum anderen rein geometrisch bedingt sein: Wir haben schon festgestellt, daß eine durch zwei Flächen vorgeformte räumliche Ecke nur durch eine ganz bestimmte dritte Fläche geschlossen werden kann und daß sich Archimedizität dabei u.U. ganz von selbst einstellt.

<u>Dodekaeder (5 5 5):</u> Brauner & Kickinger (1982:8) beschreiben ein Kohlen-Silo, das 1951 in Madrid von E. Torroja mit ökonomisch vorgefertigten fünfeckigen Platten konstruiert wurde. - In der Illustrierten 'Stern' vom 29.12.1988 ist eine von "über 140 festungsartig ausgebaute(n) ... supermodernen jüdischen Siedlung (en) im Westjordanland" abgebildet, deren Wohn-Einheiten größtenteils aus Dodekaedern bestehen. Neben der Möglichkeit, eine große Anzahl einheitlicher Platten zu verwenden, könnte ein Grund für diese Bauweise in der Stabilität, z.B. gegenüber Beschuß, solcher kugel-ähnlichen Wohn-Waben liegen.

<u>Würfel (4 4 4):</u> In der Nähe von Eindhoven hat P. Blom Baumhäuser mit würfelförmigen, auf der Spitze stehenden Kronen gebaut (nach Schoemaker u.a. 1981:149ff). Hier kommt es auf die drei-zählige Dreh-Symmetrie bezüglich einer Ecken-Achse an. Zunächst stellt man sich den unteren Teil als eine Tüte vor, die aus drei quadratischen Platten zusammengesetzt ist und deren oberer Rand ein gezackter Streckenzug mit drei Ecken oben und drei unten ist. Daß nun eine dazu kongruente Tüte mit der Spitze nach oben genau auf die erste Tüte paßt und mit dieser einen Würfel erzeugt, erscheint nun gar nicht mehr so trivial, wie wenn ein Würfel in kanonischer Lage, d.h. mit einer Fläche auf dem Boden, gebaut wird (vgl. den Existenz-Beweis für das Dodekaeder). Interessant sind hier auch die Grundrisse der einzelnen Stockwerke.

Abb.13

<u>Ikosaeder (3 3 3 3 3):</u> Seit einigen Jahren sind Bausätze für ikosaeder-förmige Garten-Häuschen auf dem Markt. Das Ikosaeder ist nicht komplett realisiert; sondern ein Eckenkranz ist entfernt und durch ein (virtuelles) Fünfeck ersetzt, auf dem der Bau auf dem Erdboden aufsitzt. Dies ist bei den wenigsten Polyedern so, daß die Entfernung eines Eckenkranzes eine ebene Schnittlinie ergibt. Der Bausatz besteht i.w. aus 25 Balken, mit denen das Kanten-Modell des Rest-Ikosaeders zu konstruieren ist. Das Konstruktions-Prinzip beruht auf der Stabilität von Dreiecken (Kongruenz-Satz SSS) und der Starrheit der Ikosaeder-Eckenkränze. Diese besteht zwar nicht für einen einzelnen Eckenkranz, aber für das Polyeder insgesamt (nach einem tiefliegenden geometrischen Satz, daß *konvexe* Polyeder starr sind). Die Seitenwand steht nicht lotrecht, sondern die Dreiecke mit der Spitze nach oben sind nach außen, die anderen sind nach innen geneigt. Die Seitenwand kann also nicht gemauert, sondern nur ausgekleidet werden.

<u>Fußball (5 6 6):</u> Bei dem Haus in Abb. 14 ist die Außenwand aus dreieckigen Platten zusammengesetzt und die Form einer Halbkugel besonders genau angenähert:

Abb.14

Bei geeigneter Zusammenfassung der Dreiecke entdeckt man, daß diesem Dreiecks-Flächner (Deltoid) die Struktur (5 6 6) unterliegt. Auf jedes der Fünf- und jedes der Sechsecke ist eine kleine Pyramide gesetzt, deren Spitze der Umkugel näher ist als die ursprüngliche Flächen-Mitte. Das Deltoid ist nicht archimedisch: Seine Dreiecke sind nicht gleichseitig, sondern nur noch gleichschenklig; außerdem hat es Eckenkränze mit sechs und solche mit fünf Dreiecken. Aber es ist ein Beispiel dafür, daß die Realisierung einer großen endlichen Symmetrie-Gruppe im Raum immer in engem Zusammenhang mit einem der in 2.2 genannten vier Typen von archimedischen Polyedern steht.

Seit einigen Jahren haben sich auch die Chemiker der geometrischen Struktur des Leder-Fußballs bemächtigt und ein reines *Kohlenstoff-Molekül* C_{60} als Polyeder (5 6 6) mit 60 C-Atomen zunächst theoretisch beschrieben und 1985 hergestellt. Die Atome sind die Ecken. An jedes C-Atom sind genau drei Nachbarn gebunden, und diese $60*3/2=90$ Bindungen werden durch Kanten repräsentiert. Jeweils fünf bzw. sechs Atome sind mittels dieser Kanten zu einem Polygon zusammengefaßt, und jedes Atom gehört dabei zu einem Fünfeck und zu zwei Sechsecken. Diese Modellierung des Moleküls C60 hat einen realistischen geometrischen, chemischen und physikalischen Hintergrund. Sämtliche 60 Atome reagieren auf chemische und physikalische Einwirkungen gleichartig; man hat schon andere Substanzen in den Hohlraum des Moleküls praktiziert; und die gute Kugel-Form korrespondiert mit einer außerordentlichen Härte und zugleich einer ebensolchen Elastizität (nach Curl & Smalley 1991).

<u>(3 4 3 4):</u> Wir haben bereits einige Spiel-Geräte kennengelernt zwischen den beiden Extremen 'Kugel' und 'Würfel'. Abgesehen von den in 2.1 angesprochenen Ausnahmen ist räumliche Symmetrie durchweg ein wichtiges Merkmal, es sei denn, man beschränkt sich wie beim Glücksrad auf ebene Symmetrie. Auch wenn das Gerät eine besonders gute Kugel sein soll, werden auch Formen gewählt, die

15

nicht die Ikosaeder-Gruppe mit 60, sondern nur die Hexaeder-Gruppe mit 24 Elementen als Symmetrie-Gruppe hat, z.B. bei der früheren Form des Fußballs (s. Abb.1a).

Anstelle von Würfeln mit 6 Ausfällen kommen als Zufalls-Generatoren auch die anderen platonischen Körper mit 4, 8, 12 oder 20 Ausfällen in Frage. Während das Tetraeder aber zu schlecht rollt und nach dem Wurf die einzige ausgezeichnete Fläche nicht sichtbar ist, rollt das Ikosaeder zu gut und die Fläche, auf der es nach dem Wurf liegen bleibt, ist zu klein. Außerdem ist kein platonisches Polyeder als Vollkörper so leicht herstellbar wie der Würfel. Allerdings rundet man dessen Ecken zum Zwecke des besseren Rollens ab (vgl. Abb.2c). Diese Abrundung könnte man zum archimedischen Polyeder (3 8 8) idealisieren; jedoch kommt es auf eine einheitliche Kantenlänge beim abgerundeten Würfel nicht an. Wenn man von den Ecken des Würfels noch größere Stücke abschneidet, nämlich die Schnitte durch die Kanten-Mitten führt, entsteht (3 4 3 4). Dies ist der Kompromiß, den die Erfinder des Tipp-Kick-Spiels für ihren Ball gefunden haben. Auf dem begrenzten Spielfeld soll der Ball nicht so gut wie eine Kugel, aber besser als ein Würfel rollen. Da er ein Vollkörper ist, brauchen Stabilitäts- und Verformungs-Fragen nicht beachtet zu werden. Die nach der Bewegung oben liegende Fläche gibt mit ihrer Färbung immer genau an, welcher Spieler an der Reihe ist (s. Abb.15c).

<u>3. Zur unterrichtlichen Realisierung</u>

<u>3.1 Allgemeine Bemerkungen</u>

Vom gewöhnlichen Geometrie-Unterricht unterscheidet sich eine Einheit 'Geometrie des Leder-Fußballs' nicht nur im Inhalt (genuine Raum-Geometrie, zentraler Anwendungs-Bezug), sondern auch darin, daß das abwägende Argumentieren (Zwecke, Funktionsweise, Optimierung) eine tragende Rolle bei der Entfaltung dieses Inhalts und bei der Ausbildung der Begrifflichkeit spielt. Dies macht sich weniger im zeitlichen Anteil solcher Diskussionen bemerkbar. Über weite Strecken besteht auch dieser Unterricht aus 'reiner' Polyeder-Lehre, eventuell mit praktischer Herstellung von Polyedern, jedoch ohne direkten Anwendungs-Bezug und, je nach Ziel-Gruppe, mit mehr oder weniger Theorie. Aber diese Polyeder-Lehre steht letztlich im Dienste der Lösung eines realen, echten, interessanten Problems. Insofern ist die Einheit *typisch für den anwendungs-orientierten Mathematik-Unterricht*. Ist in einer Sach-Situation wirklich anspruchsvolle Mathematik enthalten, so muß der Unterricht sich längere Zeit von der Ausgangs-Situation entfernen und sich auf das Gebiet der idealen Mathematik begeben, sei es *vor* der Darbietung der Sach-Situation oder *anläßlich* dieser Darbietung. Dabei zeigt sich die Potenz einer von der konkreten Situation losgelösten Mathematik. Man empfindet es förmlich als Befreiung, wenn man ein Gebiet wie die archimedischen Polyeder, durchaus angeregt von realen Körpern, ganz allein nach den mathematischen Möglichkeiten in Ruhe aufbauen und strukturieren kann und die Ergebnisse erst *danach* wieder auf die Realität anzuwenden hat.

Die folgende Beschreibung beruht auf einer eigenen Erprobung im 9. Schuljahr einer Hauptschule, der allerdings nur mäßiger Erfolg beschieden war. Die Schüler waren schon zu lange im Alltags-Trott der Schule gefangen. Sie ließen den Unterricht, durchaus gutwillig, über sich ergehen und freuten sich auf die Wieder-Aufnahme des gewohnten Stils durch ihren bewährten Mathematik-Lehrer. In der Tat kann Anwendungs-Orientierung und Operative Genese der Geometrie nicht Sache von 14 Tagen sein, sondern muß langfristig angelegt werden.

Die Einheit umfaßte acht Unterrichts-Stunden zuzüglich einer Stunde für den Abschluß-Test und der Zeit für Schüler-Aktivitäten außerhalb der Schule (sog. Haus-Aufgaben). Wesentliche Kürzungs-Möglichkeiten sehe ich nicht, auch wenn die darin enthaltene Diskussion der archimedischen Parkette scheinbar nicht so eng zum Thema gehört. Diese sind als ebene Objekte manuell und kognitiv leichter handhabbar als die Polyeder, und sie fungieren als systematischer und didaktischer Zugang zu diesen. Da es bei ihnen weniger Varianten gibt, ist es leichter, die vollständige Menge aller Typen zu bestimmen. Dies können 'die' Schüler - mit Hilfe - selbst leisten, und man kann es sich dann erlauben, ihnen eine fertige Sammlung der archimedischen Polyeder vorzulegen, die allerdings noch strukturiert werden muß.

Die Ermittlung aller archimedischen Parkette, in Verbindung mit dem Nachweis, daß es keine weiteren gibt, ist das Muster-Beispiel eines *sinnvollen* Beweises im Geometrie-Unterricht. Da werden keine den Schülern anschaulich klare Sachverhalte verdunkelt, sondern echte Fragen konstruktiv beantwortet.

Anders als in der Stoff-Analyse in Kap. 2 entsteht der Begriff des archimedische Polyeders nicht fast zwangsweise aus der Analyse der Kriterien für die Leder-

Decke des Fußballs, sondern er wird von der Lehrperson eingebracht. Das Vorgehen hierbei ist also analytisch und nicht synthetisch, und damit - global gesprochen - schüler-gemäßer. Hierin eine Einengung selbständiger Schüler-Aktivitäten zu sehen, halte ich für einen realitäts-fremden und spitzfindigen Einwand.

Eine Fortsetzung der Einheit innerhalb der Mathematik ist dagegen in viele Richtungen in beliebigem Umfang möglich:

- Gruppen, insbesondere Symmetrie-Gruppen;
- topologische und kombinatorische Betrachtungen im Umfeld der Euler-Charakteristik;
- Trigonometrie, insbesondere zur Berechnung von Flächen-Neigungen;
- nicht-archimedische Polyeder, z.B. Deltoide oder nicht-konvexe Polyeder, auch die archimedischen Sterne;
- archimedische Polyeder ausführlicher, u.a. die dualen.

3.2 Ein möglicher Verlauf

An Materialien werden eingesetzt: Papier, Bleistift, Pappe, Scheren, Klebstoff, Schablonen von Polygonen, Lineale, Winkelmesser, Taschenrechner, Arbeitsblätter mit Definitionen, Ergebnissen oder Aufgaben, Drucke aller archimedischen Parkette, Baupläne für die platonischen Polyeder, Abbildungen aller archimedischen Körper, Tageslicht-Projektor mit Folien des gesamten Materials für die Schüler, Wandtafel mit Kreide und nicht zuletzt zahlreiche Bälle und ähnliche Körper mit verschiedenen geometrischen Oberflächen-Strukturen.

Die Schüler beschreiben die anfangs vorliegenden *Bälle* und ähnlichen Körper. Ihre Aufmerksamkeit wird auf die geometrische Oberflächen-Struktur gelenkt. Insbesondere für den Fußball wird die Zweckmäßigkeit genauer analysiert und die Eignung anderer Bälle für denselben *Zweck* geprüft. Diese Unterrichts-Phase darf nicht zu lange dauern. In einer *halben Stunde* sollten aber einige wesentliche Gesichtspunkte angesprochen sein. Die Problem-Stellung, die die Aktivitäten der nächsten Stunde leitet, muß wohl von der Lehrperson kommen: Gibt es vielleicht eine noch günstigere Oberflächen-Struktur? Welche Möglichkeiten kommen denn überhaupt sonst in Frage?

Dieses Problem wird im Rest der ersten und *in den nächsten Stunden* von *ebenen Parketten* aus angegangen. Ausgehend von Parketten der Umwelt (Bürgersteige, Fußböden, Mauern usw.) wird der Parkett-Begriff zunehmend spezialisiert bis zu dem des archimedischen Parketts. Auch hier werden, allerdings nur knapp, Zweck-Analysen durchgeführt. Nach bestimmten Vorgaben zeichnen, legen, beschreiben die Schüler Parkette. Wir zeigen, daß die Ebene mit jedem Dreieck und mit jedem (auch nicht-konvexen) Viereck parkettiert werden kann. Mit anderen n-Ecken ist das i.a. nicht möglich. Die Schüler erkennen die Bedeutung der inneren Winkel der Polygone und entwickeln ein Verfahren zur Ermittlung der Winkelmaße bei regelmäßigen Polygonen. Es wird eine Tabelle erstellt für dieses Winkelmaß in Abhängigkeit von der Ecken-Anzahl, die im weiteren Verlauf dauernd verwendet wird.

Die archimedischen Parkette werden mit Hilfe ihrer Eckenkränze symbolisiert, z.B. $4^{3}_{33}4$ (hier im Aufsatz aus satz-technischen Gründen (3 4 3 4 3)). Es entsteht die Aufgabe, alle archimedischen Parkette zu finden. Nach mehr zufälligen Versuchen wird gemeinsam eine Systematisierung entwickelt. Man kann vier Fälle unterscheiden, je nach dem, wie viele Polygone in einer Ecke zusammenstoßen. Diese Fälle werden in Gruppen bearbeitet, und die Ergebnisse der einzelnen Gruppen dann zusammengetragen. Es kommt weniger darauf an, daß jeder Schüler jedes Parkett selbst findet, sondern auf die Einsicht, daß es nur endlich viele gibt, und auf die prinzipielle Verfügbarkeit einer Methode, mit der man alle finden kann. Der Einsatz des *Computers* hierbei wäre *unangemessen.*

Der Übergang zu *räumlichen Parketten* (= Polyeder) wird über Fünfecke geleistet. Mit regelmäßigen Fünfecken läßt sich die Ebene nicht pflastern; denn legt man drei Fünfecke um einen Punkt, bleibt eine Lücke von 36°. Klappt man zwei davon hoch, so entsteht plötzlich ein ausgefüllter Eckenkranz, jetzt ein räumliches Gebilde. Baut man entsprechend weiter, dann entsteht ein geschlossener Körper. Die Schüler erhalten den Bauplan des Dodekaeders, stellen es als Flächen-Modell her und bilden in Analogie zum Begriff des archimedischen Parketts den des archimedischen Körpers (Polyeders), wobei sie Definition und Symbolik ohne Änderungen übernehmen können, also hier (5 5 5).

Zunächst werden dann die *platonischen Körper* studiert und mit Hilfe fertiger Netze als Flächen-Modelle hergestellt. Beim Vergleich dieser fünf Körper fällt auf: Die Kugel-Form wird umso besser angenähert, je kleiner die Lücke ist, die ein Ekkenkranz läßt, wenn er in die Ebene ausgebreitet ist. Die Lücke kann noch kleiner gemacht werden, wenn man in einem Eckenkranz auch verschiedenartige Polygone zuläßt. Die Schüler schlagen Möglichkeiten mit kleinen Lücken vor und realisieren in Team-Arbeit die entsprechenden archimedischen Körper in Teilen.

Die Frage, welche *archimedischen Körper* es gibt und wie sie alle zu finden sind, wird durch ein Übersichts-Blatt mit der Abbildung aller Typen und den Hinweis beantwortet, daß man den Nachweis genau wie bei den Parketten führen kann. Damit sich die Schüler wenigstens einmal mit *allen* archimedischen Körpern beschäftigen und sie dabei bewußt wahrnehmen und auf ihre Kugel-Ähnlichkeit prüfen, erhalten sie aber die Aufgabe, an jeden seine Charakteristik zu schreiben. Rein optisch erweist sich das Polyeder (5 6 6) als allen anderen klar überlegen. Dieses Kriterium, möglichst gut wie eine Kugel *auszusehen*, gibt im Unterricht den Ausschlag.

Ein bißchen sollte man sich in der Menge der archimedischen Körper noch umsehen und z.B. darauf eingehen, wie bei Voll-Modellen durch Abschneiden von Ecken gewisse Typen aus anderen, insbesondere den platonischen, erzeugt werden können, z.B. (5 6 6) aus dem Ikosaeder oder nacheinander (3 8 8), (3 4 3 4), (4 6 6) und (3 3 3 3) aus dem Würfel.

Abb.15

Erst jetzt kehrt der Unterricht zu realistischen *Anwendungen* zurück: Es werden bekannte Gegenstände aus der Umwelt genannt, die die Form archimedischer Körper haben, und diese Formen begründet.

3.3 Aufgaben für einen Test

1.Beschreibe die Oberfläche des heutzutage üblichen Fußballs, und gib 4 Gründe für diese Oberflächen-Gestaltung an.

2.Vervollständige die Tabelle:

Ecken-Zahl	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Winkel-Summe	180	360		720	900	1080		1440	1620	1800
Einzel-Winkel	60	90		120	128,6		140	144	147,3	150

3.Zeichne das archimedische Parkett mit dem Eckenkranz (3 6 3 6).

4.Setze für x eine Zahl ein, so daß (3 x 6 4) der Eckenkranz für ein archimedisches Parkett wird.

5.Gib einen gebräuchlichen Namen für den archimedischen Körper (4 4 4) an.

6.Nenne 3 Gegenstände, die dir in deiner Umwelt schon begegnet sind und die die Form von archimedischen Körpern haben; nenne jeweils einen Grund für die Form-Gebung; und schreibe den Eckenkranz dazu.

7.Prüfe bei den folgenden Parketten, ob sie archimedisch sind. Wenn du ein Parkett nicht für archimedisch hältst, gib eine Begründung an. Wenn du es für archimedisch hältst, schreibe den Eckenkranz auf. (Zeichnungen von einigen Parketten)

8.Wie kann man ohne Zeichnung erkennen, daß (3 12 12) ein ebenes archimedisches Parkett und (3 10 10) ein archimedischer Körper ist?

9.Welches Winkelmaß hat die Lücke, die bleibt, wenn man je ein regelmäßiges Drei-, Sechs- und Neuneck in der Ebene um einen Punkt herum aneinanderlegt?

Literatur

Aschkinuse, W.G. (1963 & 1969): Vielecke und Vielflache. In: P.S. Alexandroff, A.I. Markuschewitsch & A.J. Chintschin (Hrsg.): Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band 4. Moskau 1963. Dt.: Berlin: Verlag der Wissenschaften 1969, 393-456

Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner

Blum, Werner (1991): Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and Instructional Aspects. In: Mogens Niss, Werner Blum & Ian Huntley (Hrsg.): Teaching of Mathematical Modelling and Application. Chichester: Ellis Horwood, 10-29

Brauner, Heinrich & Walter Kickinger (1982): Gebaute Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 28, Heft 2, 5-28

Curl, Robert F. & Richard E. Smalley (1991): Fullerene. In: Spektrum der Wissenschaft 1991, Heft 12, 88-98

Müller, Gerhard & Erich Wittmann (1977 & 1984): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg 1977, 3. Aufl. 1984

Pedersen, J.J. (1980): Geometry is Alive and Well: The Coxeter Symposion in Toronto. In: Two-Year College Mathematics Journal 11, 19-25

Schoemaker, George, Aad Goddijn, Jan de Lange & Martin Kindt (1981): Neuer Geometrie-Unterricht auf der Sekundarstufe. In: Hans-Georg Steiner & Bernard Winkelmann (Hrsg.): Fragen des Geometrieunterrichts. Köln: Aulis, 99-155

Schoop, Heinrich (1986): Wie rund ist ein Fußball? In: Didaktik der Mathematik 14, 1-11

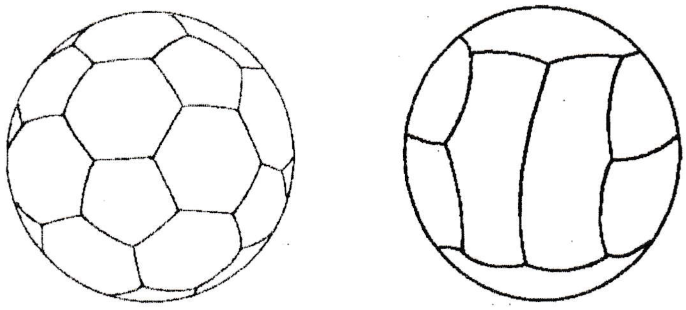
Abb. 1

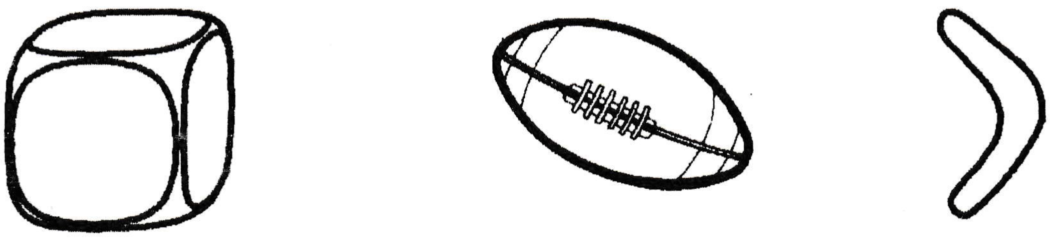
Abb. 2

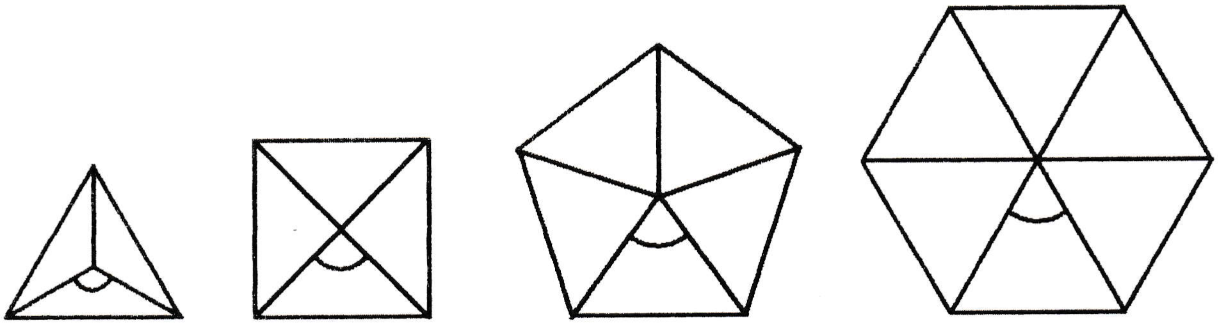
Abb. 3

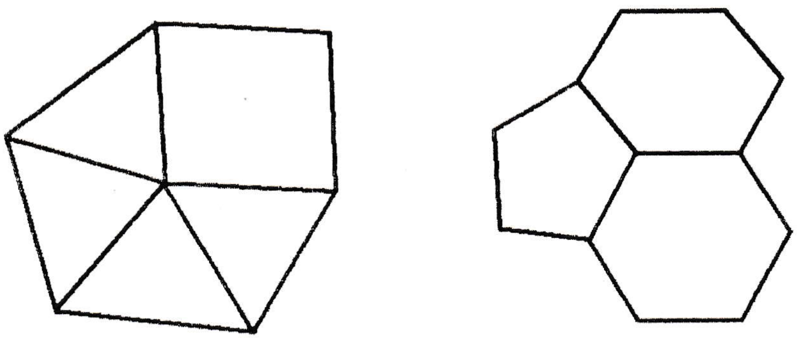
Abb. 4

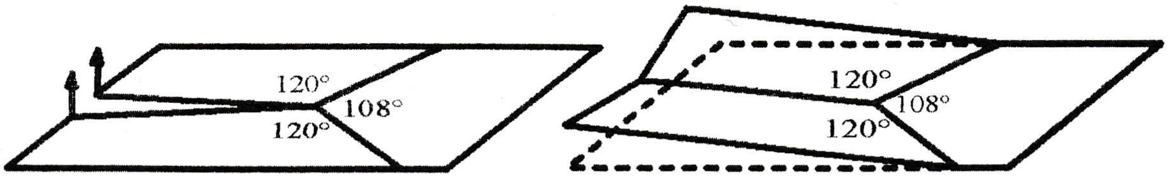

Abb. 5

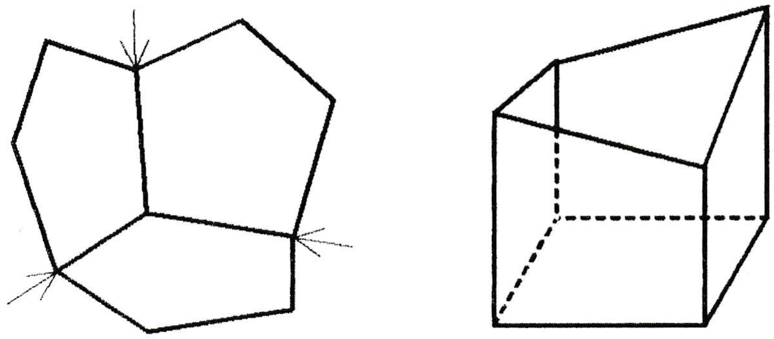

Abb. 6 a) b)

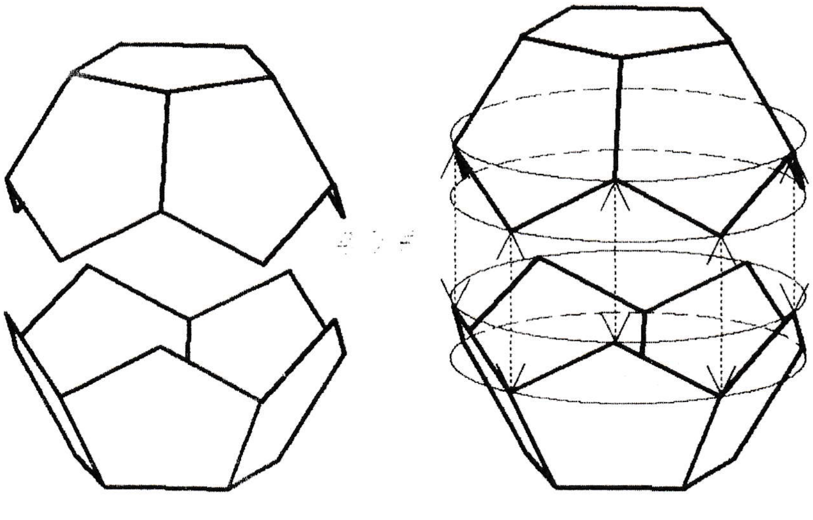

Abb. 7 a) b)

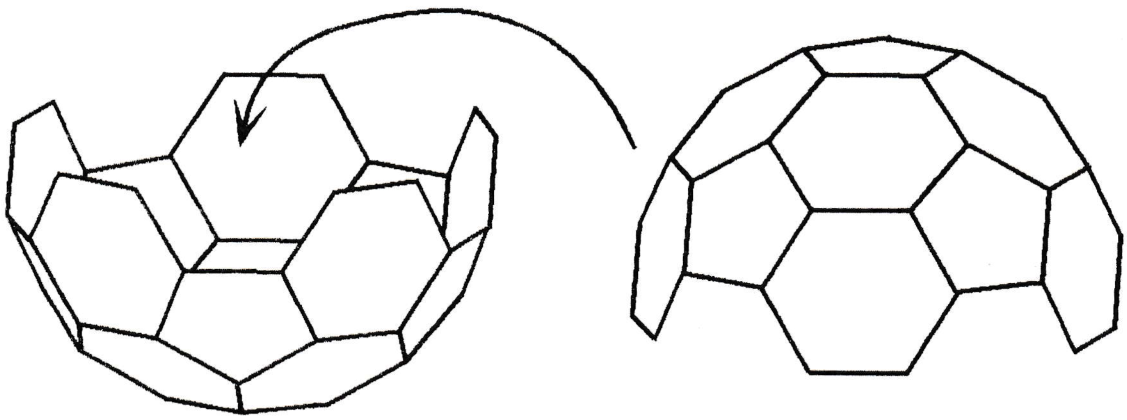

Abb. 8

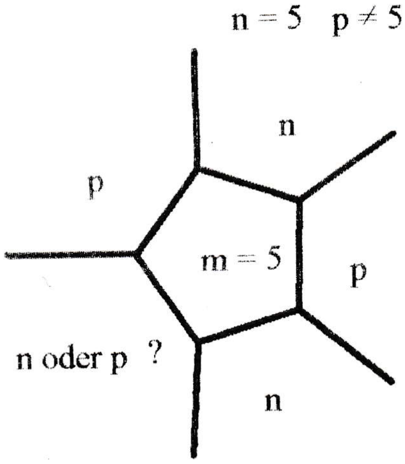

Abb. 9

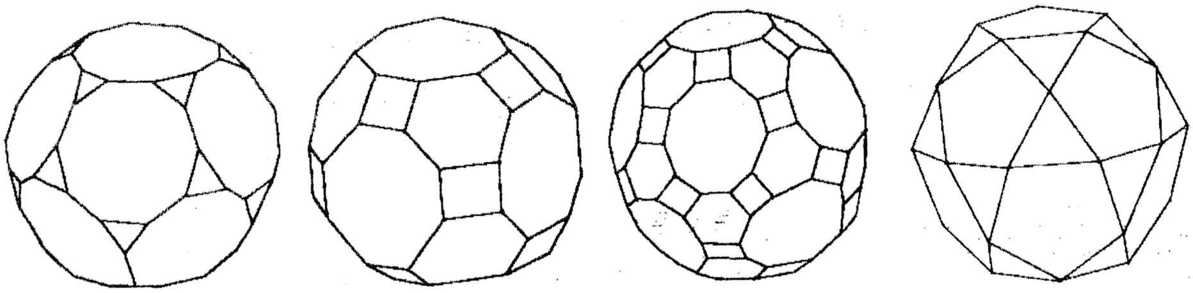

Abb. 10

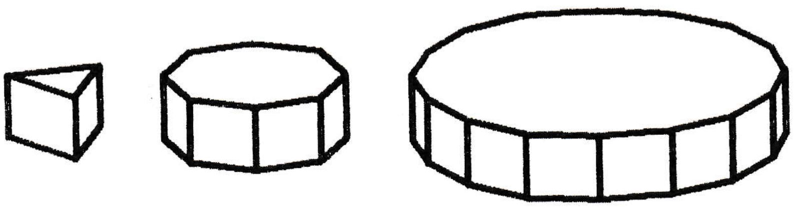

Abb. 11

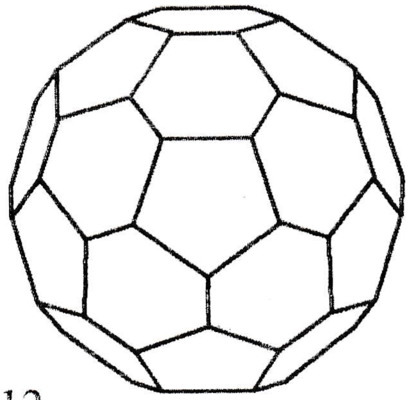

Abb. 12

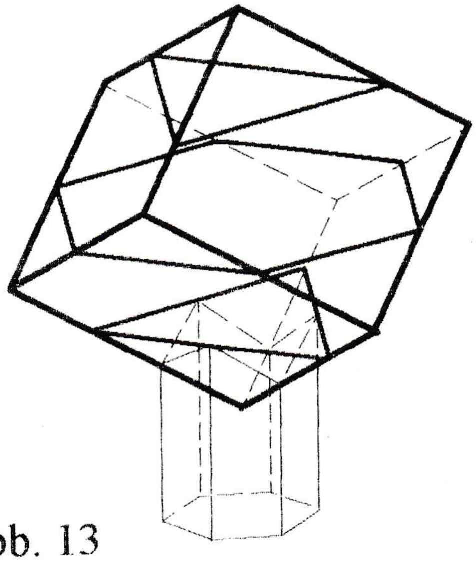

Abb. 13

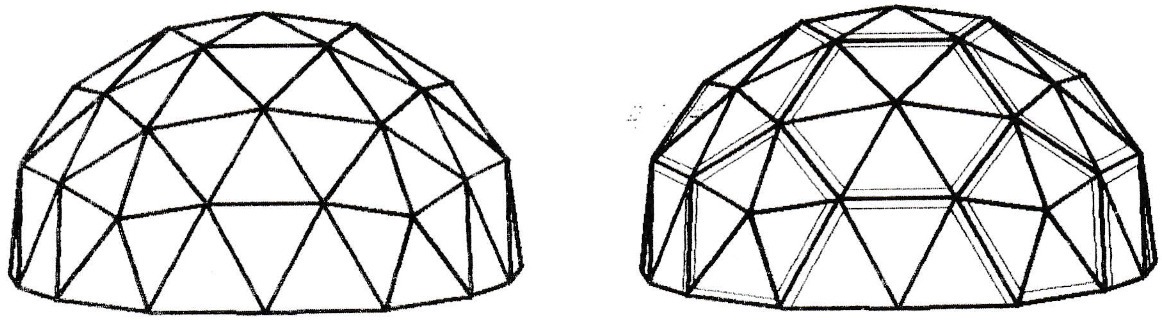

Abb. 14

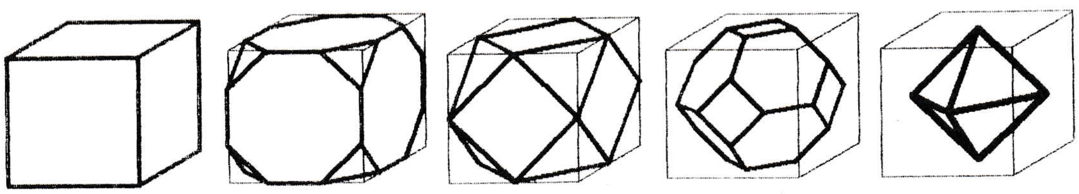

Abb. 15 a) b) c) d) e)