In: Peter Bardy (Hrsg.): Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen/-lehrern. Weinheim: Deutscher Studienverlag 1997

Peter Bender, Dieter Beyer, Ute Brück–Binninger, Rainer Kowallek, Siegbert Schmidt, Peter Sorger, Hans Wielpütz, Erich Ch. Wittmann

Empfehlungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Primarstufen-Lehrerinnen und -Lehrer

Das wichtigste Curriculum des Lehrers ist seine Person.

Hartmut von Hentig (1981, S.110)

0. Vorbemerkungen

In der jüngsten Kontroverse über den Umfang des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen in Deutschland hat eigentlich niemand in Frage gestellt, daß Mathematik ein Unterrichtsfach in der Grundschule sein soll. Allerdings denkt so mancher Teilnehmer am Diskurs dabei womöglich nur an die Vermittlung einschlägiger Kulturtechniken als Legitimation. Auch unter den Studierenden des Lehramts für die Primarstufe in Nordrhein–Westfalen (NW), die Mathematik im Umfang von 21 Semesterwochenstunden (SWS) belegen 'müssen', findet man diese reduzierte Sichtweise von Mathematik und ihrem Unterricht.

Die Autoren des vorliegenden Beitrags (eine Gruppe von universitären Mathematik-Didaktikern sowie Grundschullehrer-Bildnern der zweiten und dritten Phase, zusammengeführt vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NW) empfinden diesen Zwang zum Mathematik-Studium für die Primarstufenlehramts-Studierenden als Chance, das Fach und seine Didaktik so gut kennenzulernen, daß es sinn- und verantwortungsvoll unterrichtet werden kann. Vor dem Hintergrund, daß die meisten Lehrpersonen in der Grundschule Klassenlehrer sein sollen, möchten und auch werden und daß das Aussparen eines fundamentalen Faches wie der Mathematik dabei auf verschiedenen Ebenen nicht gerechtfertigt werden kann, fassen wir diese Chance allerdings auch als Notwendigkeit auf.

Es ist uns wohl bewußt, daß in vielen Bundesländern diese Notwendigkeit anscheinend nicht gesehen wird. Nach der Zusammenstellung von *B. Hartmann* in diesem Band ist Mathematik außer in NW lediglich noch in Sachsen-Anhalt und in Thüringen eigenständiges Pflichtfach im Studium für das Primarstufen-Lehramt und muß in mehreren Bundesländern wenigstens im

Rahmen eines allgemeinen Faches 'Grundschulpädagogik' studiert werden. Allerdings ist dabei der Umfang häufig sehr gering, und das Studium erstreckt sich dann lediglich auf die Fachdidaktik, oft in recht naiver Form, während fachinhaltliche Veranstaltungen nur von denjenigen Studierenden besucht werden (müssen), die Mathematik als Schwerpunktfach gewählt haben. — Von diesen ist hier und im folgenden nicht die Rede, sondern von den Studierenden, die sich mit Mathematik gar nicht oder nur 'zwangsweise' auseinandersetzen.

Natürlich ist für alle in der Primarstufe tätigen Lehrpersonen eine gediegene Ausbildung in der Muttersprache und ihrem Unterricht unabdingbar. Daneben sollten, entsprechend dem vorherrschenden Klassenlehrer-Prinzip in der Grundschule, auch sachunterrichtliche, künstlerische, musische und sportliche Studien verpflichtend sein, selbstredend nicht reduziert auf methodische Handreichungen wie in der alten Akademie-Ausbildung, die in der Diskussion über die Übersiedlung des Primarstufenlehramts-Studiums an Fachhochschulen wieder fröhliche Urstände zu feiern scheint (vgl. dazu *Garlichs* 1993). — Darüber hinaus würde den Aufgaben der Lehrpersonen an Grundschulen ein achtsemestriges Studium wohl anstehen.

Wenn wir aber nur sechs Semester zur Verfügung haben und an der Anzahl der zu studierenden Bereiche Abstriche gemacht werden müssen, dann sollte neben Deutsch wenigstens Mathematik in gewissem Umfang verbindlich sein. Damit meinen wir nicht nur fachdidaktische, sondern dezidiert auch fachinhaltliche Studien. — Warum dies so sein sollte und wie wir uns eine solche *fachmathematische* Ausbildung vorstellen, wollen wir im folgenden zur Diskussion stellen.

Wir haben unsere Überlegungen mit zahlreichen Kolleginnen und Kollegen erörtert und viel von *Spiegels* Konzeption (1996) profitiert.

1. Einige Prämissen

— Die Grundschule in NW umfaßt derzeit vier Jahrgänge.

- Die Mathematik hat einen wichtigen Anteil an Bildung und Ausbildung, Förderung und Erziehung der Grundschul-Kinder, dadurch daß sie

- einen unersetzbaren Beitrag zur Welterschließung leisten,
- eine emanzipatorische Denkschule sein,
- einen essentiellen Beitrag zur kognitiven Förderung leisten,
- positive Einstellungen und Haltungen (zu individuellen und sozialen Herausforderungen) ausbilden und fördern
- und die Kinder mit einer spezifischen Errungenschaft der menschlichen Kultur begegnen lassen soll und kann.

Dieser Katalog von Zielen setzt nicht voraus, daß man von der Legitimation des Mathematikunterrichts bereits überzeugt ist. Er macht vielmehr diese Legitimation aus. Die Mathematik steht für einen Teil unserer Kultur, der mit Merkmalen wie Autonomie des eigenen Verstandes, Schärfe des Denkens, Nüchternheit assoziiert ist. Allerdings hat Schul-Mathematik eine eigene Qualität, die nicht einfach durch Elementarisierung aus der spezialisierten Mathematik als Universitäts-Wissenschaft gewonnen werden kann (s. Kap.2).

— Im Mathematikunterricht sind die Kinder so zu fördern, daß sie

- elementare mathematische Fertigkeiten verständig erwerben,
- Grundkenntnisse über Zahlen, Formen und Größen gewinnen,
- Fähigkeiten zur Lösung mathematischer Probleme entwickeln,
- positive Einstellungen zum mathematischen Arbeiten aufbauen,
- dabei lernen, (nicht nur in der Mathematik) kreativ zu sein, zu argumentieren und zu mathematisieren (*Kultusminister NW* 1985, S.21).

Dadurch leistet der Mathematikunterricht seinen spezifischen Beitrag zu den in den Richtlinien für die Grundschule in NW (ebd. 1985) genannten Aufgaben und Zielen.

— Sowohl bei einer mehr traditionellen Organisation unter Einschluß des Klassenlehrer-Prinzips, als auch bei offeneren, eher qualifikations- statt inhaltsorientierten, fächerübergreifenden Formen des Lehrens und Lernens muß jede Grundschul-Lehrperson in der Lage sein, Mathematik sinnvoll zu unterrichten. Das heißt zum einen ganz pragmatisch: Sie muß u.a. in der Lage sein zur

- sachgerechten didaktisch-methodischen Aufbereitung der Lerninhalte,
- selbständigen Erarbeitung geeigneter Lernkonzeptionen und -materialien,
- kritischen Beurteilung pädagogisch-didaktischer Modeerscheinungen,
- kompetenten Schulbuch-Beurteilung und -Nutzung.

Zum anderen bedeutet dies auch, daß die Lehrperson selbst intellektuell vorleben muß, wozu sie die Kinder bilden, ausbilden, erziehen und fördern möchte. Dabei kann der mathematische Bereich nicht ausgespart sein.

Eine inhaltlich-zielgerichtete Arbeit mit mathematischen Inhalten, aber auch mit solchen aus anderen Fächern, soll zwar durch pädagogische Prinzipien und Maßnahmen unterstützt und verbessert werden, sie kann aber nicht inhaltsfrei erfolgen und mithin *nicht* durch pädagogische Prinzipien und Maßnahmen *ersetzt* werden.

Aus diesem Grund begrüßen wir die stofflich breite Ausbildung, die das Land NW seinen angehenden Grundschul-Lehrpersonen angedeihen läßt, und wünschen uns, daß auch die anderen Bundesländer Deutsch und Mathematik zu Pflichtfächern für das Grundschullehrer-Studium erheben bzw. ihren Pflichtcharakter beibehalten. Wir wenden uns nachdrücklich gegen Versuche, diesen bildungspolitischen Fortschritt in NW wieder zu beseitigen.

Daher lehnen wir die neue Vorschrift des § 61 Abs. 3 der Lehramtsprüfungsordnung des Landes NW von 1994 (abgedruckt z.B. in: *Ministerium für Schule und Weiterbildung* usw. 1995) ab, nach der Grundschullehrer-Studierenden das Unterrichtsfach Mathematik erlassen werden kann, wenn sie Musik als Unterrichtsfach wählen. — Als ob Musik-Studierende später guten Mathematikunterricht auch ohne Mathematik-Studium erteilen könnten, während alle anderen ein Mathematik-Studium nötig haben.

Wir kritisieren gleichermaßen auch die Praxis, daß Absolventen aus anderen Bundesländern in NW in das Referendariat und in den Schuldienst der Grundschule übernommen werden, obwohl sie — aus nordrhein-westfälischer Sicht — unzureichend ausgebildet sind, wie die Erfahrungen der Seminar- und Fachleiterinnen und -leiter bestätigen.

Um jedoch den mathematikdistanzierten Leser nicht zu ängstigen, sei betont, daß wir hier auf eine Mathematik-Ausbildung abheben, in der

- jeder Inhalt vor dem Ziel, fähige Grundschul-Lehrpersonen auszubilden, direkt gerechtfertigt werden muß und kann, und
- junge Erwachsene, häufig mit schlechten Erfahrungen mit Mathematik aus der eigenen Schulzeit, mit einem gleichgültigen, distanzierten oder gar ablehnenden Verhältnis zur Mathematik, mit mittelmäßigen (oder schwachen) mathematischen Fähigkeiten und Kenntnissen, selbst Freude am mathematischen Tun gewinnen oder wenigstens ihre Distanz aufgeben und, soweit eben an der Universität möglich, gute Grundlagen für ihren später zu erteilenden Mathematikunterricht erwerben können, und zwar unbedingt unter Einbezug kindlicher Eigenproduktionen und Intuitionen zur Mathematik.

Aus unserer Sicht sollten dabei eine redliche Ausbildung und redliche Anforderungen im Fach 'Mathematik' so angelegt werden, daß jede und jeder Grundschullehrer-Studierende intellektuell zu erreichen ist und eine Chance zum Erfolg hat, und nach unseren Erfahrungen kann dies durchaus erreicht werden. Wenn allerdings bei einzelnen Studierenden etwaige Blockaden unüberwindlich sind, muß man in Frage stellen, ob diese Menschen wirklich für den Grundschullehrer-Beruf geeignet sind. Die begnadete Grundschul-Lehrperson, die "lediglich" in Mathematik ein absoluter Ausfall ist, hat unseres Wissens noch niemand erlebt.

2. Einige grundlegende Gedanken zur Mathematik-Ausbildung im Studiengang 'Lehramt für die Primarstufe'

Damit das Mathematik-Studium seine Funktion im Rahmen der Lehrer-Ausbildung erfüllen und (u.a.) den notwendigen fachinhaltlichen Hintergrund sicherstellen kann, muß es in spezifischer Weise auf das Tätigkeitsfeld 'Schule' bezogen sein. — Die Rolle der Lehrperson besteht im Grundsatz darin, zwischen "Fach" und "Kind" zu vermitteln. Dafür wird ein *genetisches Wissenschaftsverständnis* benötigt. Der Erfolg des Unterrichts steht und fällt mit der Fähigkeit der Lehrperson, die *Entwickelbarkeit* des

Faches Mathematik mit der *Entwicklungsfähigkeit* des Kindes in fruchtbare Wechselwirkung zu bringen.

In der Vergangenheit wurde die Lehrer-Bildung *für alle Stufen* viel zu stark an der Mathematik-Ausbildung für die Spezialisten ausgerichtet, in der statt eines genetischen ein *statisches* Wissenschaftsverständnis vorherrscht: Mathematik wird dabei als fertig gegebene, von allen Beziehungen nach außen gereinigte systematische Struktur gelehrt und von den Studierenden reproduktiv nachvollzogen. — Noch heute sehen es viele Mathematiker und von der Fachwissenschaft 'Mathematik' stark beeinflußte Fachdidaktiker als selbstverständlich an, daß die Ausbildung für die mathematischen Spezialisten das universelle Modell für Mathematik-Lernen schlechthin sein müsse ("Mathematik ist Mathematik"). Skrupel- und phantasielos leiten sie die Inhalte der Lehrer-Ausbildung aus denen für das Mathematik - Diplom durch stufenweises Weglassen und Ausdünnen her und stülpen der Lehrer-Bildung auch ihre Vermittlungsformen über.

Dieses Denken "von oben nach unten" wird darüber hinaus von den Anhängern dieser Position ebenso skrupel- und phantasielos auf die Didaktik übertragen, deren Aufgabe auf die "didaktische Transposition" oder "Elementarisierung" gegebener fachinhaltlicher Strukturen auf untere Niveaus reduziert wird.

Eine tiefere Analyse des Mathematik-Treibens, des Mathematik-Lernens, der Epistemologie und der Geschichte der Wissenschaft 'Mathematik' sowie die vorliegenden Erfahrungen in der Lehrer-Bildung selbst zeigen die Schwächen dieses Denkens "von oben nach unten". *Freudenthal* (1986, S.326f) hat dies überzeugend zum Ausdruck gebracht (Übers. *P.B.* u.a.):

"Die Idee einer didaktischen Transposition der Wissenschaft der Spezialisten (savoir savant) in die Schulmathematik (savoir enseigné) ist bereits vom Ansatz her falsch, weil von oben nach unten und nicht umgekehrt von unten nach oben gedacht wird. Die Mathematik, die von der großen Mehrheit unserer künftigen Bürger in der Schule gelernt werden muß, korrespondiert überhaupt nicht mit der Wissenschaft der Spezialisten, von der sie (didaktisch oder nicht) heruntertransformiert werden müßte. Allenfalls entspricht sie der Mathematik der Gelehrten vor mehreren Jahrhunderten. Der Großteil unserer Jugend muß nicht auf das mathematische Spezialwissen unserer Zeit vorbereitet werden, sondern auf ein technologisches

Knowhow (auf unterschiedlichen Niveaus). Die Rolle der Universitätsmathematik in dieser technologischen Kultur ist bescheidener, als man sich seit einem Vierteljahrhundert vorstellt."

Für die Mathematiklehrer-Ausbildung — und dies gilt nicht nur für das Lehramt 'Primarstufe' — ist es dringend erforderlich, anstelle des Denkens "von oben nach unten" ein Denken "von unten nach oben" als durchgehendes Konzept zu realisieren: Lehramts-Studierende müssen die elementare Mathematik nicht als ein Fertigprodukt, sondern als eine Tätigkeit erfahren, die vom experimentierenden Handeln innerhalb sinnvoller mathematischer und realer Problemkontexte bis hin zum lokalen (und später auch globalen) Ordnen der dabei gewonnenen Erkenntnisse fortschreitet. Wichtiger als die Abarbeitung eines möglichst umfangreichen Stoffes ist daher in der Lehrer-Bildung die Entwicklung von *Verständnis und Selbständigkeit* im selbsttätigen Umgang mit elementarer Mathematik: Die Studierenden müssen im Studium möglichst viel selber *aktiv* werden und *Mathematik-Lernen an sich selbst als "konstruktiven und zugleich entdeckenden Prozeß"* erleben. Ohne solche eigenen Erfahrungen ist die entsprechende Forderung des Lehrplans nicht umzusetzen. *Hier liegt der Schlüssel für die gesamte Ausbildung.*

Von großer Bedeutung sind die Verwendung und Ausbildung einer *problemorientierten Sprache.* Die Mathematik hat sich mehrere tausend Jahre ohne eine ausgefeilte Begrifflichkeit und ohne einen entsprechenden Formalismus prächtig entwickelt. Es gilt, hieran anzuknüpfen. Wie *R. Thom* in einem berühmten Vortrag gesagt hat, besteht das wirkliche Problem des Unterrichts nicht in der "Strenge", sondern in der *"Bedeutungsgebung"*. Anstelle des Formalismus, der in der Zeit der "Neuen Mathematik" auch in die Grundschullehrer-Ausbildung Einzug gehalten hat, ist der Gebrauch schlichter Ausdrucksmittel viel hilfreicher und sinnvoller sowohl für das eigene Studium als auch für die spätere Unterrichtstätigkeit.

Problemfelder der elementaren Mathematik können so bearbeitet werden, daß aus ihnen sowohl Aktivitäten für Kinder als auch — auf einer höheren Ebene — Aktivitäten für Studierende erwachsen, die reichhaltig genug sind, um Ausschnitte arithmetischer oder geometrischer Theorien zu tragen. Dieser Ansatz muß gezielt ausgebaut werden. Wo immer möglich,

sollten auch in der fachinhaltlichen Ausbildung Bezüge zu den Inhalten des Mathematikunterrichts der Grundschule hergestellt werden.

3. Wie könnte eine solche Mathematik-Ausbildung aussehen?

Wir schließen uns der landläufigen Unterteilung in fachinhaltliche und fachdidaktische Aspekte an und befassen uns mit der fachinhaltlichen Ausbildung, und zwar vornehmlich für die Studierenden des Lehramts 'Primarstufe' mit Mathematik als weiterem Unterrichtsfach (im Umfang von 21 SWS).

Einer der Haupt-Kritikpunkte von Grundschullehrer-Studierenden an gewissen Inhalten ihrer Mathematik-Ausbildung bzw. an dieser insgesamt besteht darin, in Abrede zu stellen, daß sie diese für ihren späteren Beruf "brauchen" würden. In dieser Kritik zeigen sich u.a.

- ein gewisser 'fachinhaltlicher Materialismus' in Form von Überschätzung der inhaltlichen Seite des Lernens bei gleichzeitiger Unterschätzung der durch das Lernen zu gewinnenden formalen Bildung;
- das Mißverständnis, daß der Ausbildungsstoff ein Muster, eine Vorlage für den Schulstoff sei (wobei viele Studierende nicht erkennen, daß sie auch fachinhaltliche Kenntnisse brauchen, um das Verhalten von Grundschul-Kindern in mathematikhaltigen Situationen einschätzen zu können);
- die Spaltung unserer Kultur in einen natur- und einen geisteswissenschaftlich orientierten Bereich, die unser Schulsystem offenbar nicht nur nicht überwindet, sondern eher pflegt. Ein Ergebnis dieses Versagens ist, daß Exponenten des öffentlichen Lebens immer wieder damit kokettieren, daß sie in der Schule in Mathematik "nichts verstanden" haben. Keiner würde wohl vergleichbare Schwächen etwa im Fach Deutsch zugeben. Entsprechend käme niemand auf die Idee, das Grundschullehrer-Studium im Fach Deutsch auf die Lektüre von Schulbuchtexten für das 1. bis 4. Schuljahr zu beschränken.

Dieses Infragestellen des Sinns der fachmathematischen Ausbildung tritt nach aller Erfahrung (deutlich bestätigt durch gezielte Befragungen, z.B. durch *Stein* und *Mosel-Göbel* in Münster seit einigen Semestern; siehe *Stein* 1996) bei Inhalten auf, die sich dem Verstehen hartnäckiger als andere widersetzen, und bei Studierenden, die mit dem mathematischen Stoff mehr Verstehensprobleme als andere haben.

Es wäre interessant, die Mechanismen im einzelnen zu untersuchen, die zwischen Verstehens- und Akzeptanzproblematik bestehen. Für unsere weiteren Überlegungen ist jedoch vor allem von Bedeutung, daß diese beiden Problembereiche im Mathematik-Studium unserer angehenden Grundschul-Lehrpersonen überhaupt stark ausgeprägt sind und stark korrelieren, — als Ergebnis von deren schulmathematischen Sozialisation. — Beide Problembereiche müssen angegangen werden, und zwar gemeinsam.

Für die Grundschullehrer-Studierenden sind in einem angemessenen Umfang Lernsituationen zu schaffen, die gemäß den allgemeinen Zielen und Prinzipien des Grundschul-Mathematikunterrichts konzipiert sind. D.h. insbesondere, daß sie Gelegenheiten zu eigenem problemlösenden, schöpferischen Tun bekommen und ihnen Chancen geboten werden, Freude an mathematischer Betätigung zu entwickeln.

Wichtige Ziele, die mit den fachinhaltlichen Veranstaltungen erreicht werden sollen:

Im affektiven Bereich:

- etwa vorhandene negative Einstellungen zur Mathematik abbauen;
- Freude an der Beschäftigung mit Mathematik entwickeln;
- Selbstvertrauen in die Kraft der eigenen Vernunft gewinnen;
- die Befriedigung spüren, die aus dem Entdecken von Sachverhalten und Zusammenhängen kommt oder allein aus dem Gefühl, etwas verstanden zu haben;
- Mut zum Nachdenken haben, auch wenn zunächst kein Lösungsweg in Sicht ist;
- zum Probieren bereit sein; Neues zu denken wagen; sich durch Fehler und Irrwege nicht entmutigen lassen.

Und im Bereich didaktischer Einsichten:

- erfahren, daß mathematische Einsicht nicht vermittelt werden kann, indem das Individuum weitgehend passiv bleibt, sondern daß sie durch intensive eigene Aktivität erarbeitet werden muß;

- erfahren, daß Fehler zum Alltag fruchtbarer Lernprozesse gehören, bei ihrem Zustandekommen ein Anteil richtiger Gedanken beteiligt sein kann und man aus ihnen lernen kann — jedenfalls wenn man Klarheit über die Fehlerursache gewinnt;
- erfahren, daß man im Bereich mathematischen Denkens zu sicheren Aussagen kommen kann, ohne sich auf fremde Autoritäten stützen zu müssen, daß man sich also bei hinreichender Sorgfalt weitgehend auf das eigene Denken verlassen kann und die Mathematik daher wie kein anderes Fach geeignet ist, das Selbstvertrauen in die eigene Vernunft zu stärken;
- bis hin zu: durch aufmerksame Beobachtung des eigenen Lernprozesses Erfahrungen machen, die einem helfen, die Lernprozesse von Kindern besser zu verstehen.

Realistischerweise darf man nicht außer acht lassen (und das gilt für Mathematik-Studierende aller Provenienz), daß die Eigentätigkeit der Lernenden auch einer Strukturierung und einer mehr oder weniger starken Anleitung durch die Lehrenden bedarf: Ein roter Faden muß geliefert werden; Grundlagen müssen gelegt werden; Grundbegriffe und Schließweisen müssen *erklärt* werden; beispielhafte Problemlösungen müssen vorgeführt werden.

Bewährt haben sich Lehrveranstaltungen im Umfang von 4–6 SWS, passend aufgeteilt in sog. Vorlesungen und sog. Übungen. Zwar ist das eigenständige Mathematik-Handeln, -Denken und -Verstehen eine notwendige Voraussetzung zum "Erwerb" von mathematischen Inhalten, und eine Vorlesung kann hierfür letztlich "nur" Anregungen geben. Aber diese Anregungen können mehr oder weniger gut sein, d.h. diesen "Erwerb" mehr oder weniger gut fördern. Eine entscheidende Voraussetzung ist, daß die Lehrenden nicht nur wissen, "wohin" sie fachlich möchten, sondern sich auf die Voraussetzungen, Einstellungen und (Berufs-) Ziele ihrer Klientel wirklich einstellen. Das Abitur läßt zwar darauf schließen, daß bestimmte mathematische Inhalte im Laufe von 12 – 13 Jahren "dran waren", aber nicht auf wirkliches *mathematisches Wissen* oder gar *Fähigkeiten* wie

- Probleme erkennen, formulieren, mathematisch modellieren, lösen;

- Zusammenhänge und Muster erkennen sowie plausibel begründen, nichts anderes als: beweisen (ein Wort, das man nicht auszusprechen wagt, weil man regelmäßig damit Horror hervorruft);
- Raumanschauung;
- geeignete Grundvorstellungen und Grundverständnisse elementarer arithmetischer und geometrischer Begriffe und Zusammenhänge.

Diese Fähigkeiten sind wenigstens im Studium auszubilden. Dabei halten wir folgendes "mathematisches Niveau" für angemessen: Die *Grundvorstellungen und Grundverständnisse* (einschließlich "Beweisen") sind

PB

- beispielgebunden,
- in konkreten (durchaus auch erfundenen) Situationen,
- mit Menschen, die in diesen Situationen Überlegungen anstellen, Zwecke und Ziele verfolgen, handeln,
- wann immer möglich, in geometrischen Veranschaulichungen

zu entwickeln. Die Studierenden müssen diese Handlungen nicht unbedingt selbst durchführen, sondern sich wenigstens das Ganze möglichst plastisch vorstellen.

Am Ende steht möglicherweise eine Formel oder ein Algorithmus (mit Variablen), aber nicht als Ziel der ganzen Bemühungen, sondern als Zusammenfassung bzw. Verallgemeinerung und zur Sichtbarmachung weiterer Zusammenhänge, als Produkt des lokalen Ordnens.

Es ist nicht zu leugnen, daß der Erfolg einer Lehrveranstaltung von vielen Bedingungen abhängt, die kaum steuerbar sind, insbesondere auch von der Persönlichkeit und dem Talent der Dozentin bzw. des Dozenten.

4. Zur Stoffauswahl

Gemäß dem Lehrplan NW (*Kultusminister* 1985) sind in der Grundschule die drei Stoffbereiche *Arithmetik, Geometrie* und *Größen* unter den beiden Prinzipien der *Anwendungs-* und der *Struktur-Orientierung* zu entfalten. — Als Inhalte für eigenständige kanonische fachinhaltliche Lehrveranstaltungen in der Grundschullehrer-Ausbildung erweisen sich nach der Diskussion in Kap.2 und Kap.3 (auch angesichts des gesamten Studienvolumens von 21 SWS) vor allem Arithmetik und Geometrie als hinreichend tragfähig.

— Der Bereich der Größen ist in beiden zusammen gut aufgehoben, und die beiden Orientierungsprinzipien lassen sich in ihnen gehaltvoll realisieren. — Die Konzentration auf die großen Bereiche Arithmetik und Geometrie allein genügt jedoch nicht; auch die ausgewählten Einzelthemen müssen unseren bisherigen Überlegungen gerecht werden.

Die sich aus diesen Überlegungen ergebenden Kriterien zur Stoffauswahl wollen wir noch einmal zusammenfassen:

- die Organisation von Lernsituationen der oben genannten Art soll erleichtert werden;
- selbst große Lücken im Schulwissen sollen einen Zugang nicht verhindern;
- eine möglichst hohe Motivation zur Beschäftigung damit soll erwartet werden können;
- ein Bezug zu den Themen der Grundschul-Mathematik soll möglichst leicht herstellbar sein;
- die Studierenden sollen ein vertieftes Verständnis der für die Grundschul-Mathematik grundlegenden Begriffe und Verfahren erwerben können.

4.1 Arithmetik und Geometrie

Wir schlagen folgende Inhalte vor, die man sowohl im Grundstudium als auch (eventuell mit einer gewissen Vertiefung) im Hauptstudium ansiedeln kann. Sie sind einerseits durchaus nützlich für das Studium der Mathematik-Didaktik mit ihren verschiedenen Themen, andererseits stellen sie nicht immer unmittelbare, unerläßliche Voraussetzungen für diese dar und können ihre (oben beschriebenen) Wirkungen ebenso in Ergänzung zu den Didaktik-Veranstaltungen entfalten und sogar nachträglich diese noch unterstützen.

Arithmetik

- Struktur von Stellenwertsystemen,
- Begründung der natürlichen Zahlen (einschließlich vollständiger Induktion),
- Zahlenmuster und -strukturen (spezielle Folgen und Summenformeln),

- Elementare Zahlentheorie (Teilbarkeit, Teilbarkeitsregeln, Primzahlen, PFZ, euklidischer Algorithmus, Restklassen, ...),
- Elementare Kombinatorik (Produktregel, Anzahl von Möglichkeiten mit oder ohne Anordnung, mit oder ohne Wiederholung, ...),
- Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeits-Verständnis.

Geometrie

- Grundformen (in Ebene und Raum),
- Symmetrie (in Ebene und Raum),
- Abbildungen (in Ebene und Raum),
- Flächeninhalt und Volumen,
- Karten und Risse,
- Gitterpunkt-Geometrie,
- Netze.

4.2 Anwendungen (Größen, Sachrechnen, Sachmathematik)

Der Bereich 'Anwendungen' bietet sich weniger gut für eine eigene fachinhaltliche Veranstaltung an. Um über fachliche Banalitäten hinauszukommen, sind erhebliche mathematische sowie nicht-mathematische Voraussetzungen erforderlich, die in diesem Studiengang nicht bereitgestellt und nach aller Erfahrung auch nicht entlang der Anwendungen entwickelt werden können. Dennoch müssen die Anwendungen gemäß dem im Lehrplan aufgestellten Prinzip der Anwendungs-Orientierung und der Kongruenz zwischen Schul- und Lehramts-Mathematikausbildung das ganze Hochschul-Mathematikcurriculum durchziehen, auch wenn dazwischen immer wieder durchaus längere mathematische anwendungsferne Passagen liegen. Mathematik wird dabei weniger als angewandt und eher als *anwendbar* erfahren.

Es ist die mathematik*didaktische* Ausbildung der Ort, wo Fragen des *Weltbezugs* bis hin zu den *Größenbereichen* explizit ausführlicher zu diskutieren sind.

Mit diesen Fragen ist selbstverständlich auch die *fachinhaltliche* Mathematik-Veranstaltung gefordert. Sie unterscheidet sich u.a. darin von der klassischen Universitäts-Vorlesung, daß sie eben immer wieder erkennbare Bezüge zum Beruf der Studierenden herstellt, sei es, daß der Stoff selbst in

Anlehnung an die Möglichkeiten der Grundschule entwickelt wird, sei es, daß Übungs- und Anwendungsaufgaben auf die Grundschule weisen, sei es, daß didaktische Bemerkungen i.w.S. gemacht werden (wohlgemerkt: als Meta-Bemerkungen).

4.3 Mathematische Logik, Mengenlehre, Algebra

Vollständige Induktion: Die Erzeugung der natürlichen Zahlen aus der Eins durch fortgesetzte Nachfolgerbildung ist ein strukturelles Charakteristikum des für die Grundschule relevanten Bereichs der natürlichen Zahlen. Induktive Definitionen und Beweise widerspiegeln diese Nachfolgerbildung und sind daher in allen auf den natürlichen Zahlen beruhenden Theorien (Arithmetik, Zahlentheorie, Kombinatorik) *völlig natürliche Werkzeuge.* Sie erhalten ihre Bedeutung keineswegs erst in der "Höheren Mathematik". Im Grundschullehrer-Studium verbietet sich ein formaler Zugang als "antididaktische Inversion" (*Freudenthal*) von selbst. In Frage kommt nur ein *genetischer Zugang*, der sich an der Geschichte der Mathematik und an der Nutzung der Induktion als heuristische Strategie beim Problemlösen orientiert. — Für die Lehrer-Ausbildung empfiehlt sich folgender Ansatz: Die vollständige Induktion wird im Rahmen sinnvoller Problemkontexte thematisiert, und dabei wird stets der Nachdruck auf die konkrete Erarbeitung der ersten 3, 4, 5 Spezialfälle gelegt, bis das allgemeine Schema deutlich wird. Später kann man zusätzlich die formale Fassung als Kurzfassung der Überlegungen an den Spezialfällen hinzunehmen, wobei ein Vergleich zwischen induktiven Definitionen und der vollständigen Induktion als Beweisprinzip sehr lehrreich ist.

Schreib-, Sprechweisen und Begriffe aus mathematischer Logik, Mengenlehre und Algebra: Sie sollten im Zuge der Arithmetik- und Geometrie-Veranstaltungen ohne größere Problematisierung benutzt werden, wobei der ökonomische Nutzen von Formalisierungen bei den gewählten Beispielen stets belegbar sein sollte. — Hier wie an anderen Stellen geht es zwar auch darum, den Grundschullehrer-Studierenden nicht zu viel "Abstraktes zuzumuten, dessen Darstellung nur sehr formal möglich ist" (ein Grundsatz, dem sich vielleicht nicht jede Grundschullehrer-Ausbilderin bzw. jeder Grundschullehrer-Ausbilder anschließen kann). Es ist jedoch immer auch an die beschränkte SWS-Zahl zu denken, innerhalb deren Arithmetik und Geometrie genügend viel Interessantes und Relevantes zu bieten haben, das die Studierenden (u.E. mit Recht!) eher als sinnvoll akzeptieren. Diese Dialektik von Verstehen und Sinn durchzieht alle weiteren Ausführungen, und wir erwähnen sie nicht jedesmal gesondert.

Wohl ist das im Lehrplan aufgestellte Prinzip der Struktur-Orientierung nicht an mathematischen Formalismus gebunden (an diese Bindung zu glauben, ist ein fundamentaler Irrtum von vielen Mathematik-Ausbildern zu allen Zeiten). — Dennoch muß im Hochschul-Curriculum immer wieder auch die Kraft einer mathematisch-logisch-algebraischen Sprache zur prägnanten Formulierung, zur übersichtlichen Strukturierung, zum Verallgemeinern und zur Gewinnung weitergehender Erkenntnisse aufscheinen. Eine eigene Veranstaltung 'Algebra' o.ä. halten wir jedoch für weniger gut geeignet — wegen der Gefahr des "Strickens ohne Wolle" (zumindest aus der Sicht vieler Studierenden). Dasselbe trifft auch auf längere Algebra- oder Logik-Passagen innerhalb anderer Veranstaltungen zu.

4.4 Stochastik

Eine Sonderrolle spielt die Stochastik. Hier ist trotz aller Vorstellungen der Mathematik-Didaktiker eine weitgehende faktische Abstinenz auf allen Schulstufen zu konstatieren, und bei den Grundschullehrer-Studierenden sind insgesamt so gut wie keine Voraussetzungen vorhanden. Insoweit Stochastik zu den genuinen Anwendungen gerechnet wird, gilt das in 4.2 Gesagte. Aber stochastisches Denken ist auch Teil der Allgemeinbildung, und seine Grundlagen sind in der Primarstufe zu legen bzw. zu pflegen. Daher benötigen Grundschul-Studierende ein Mindestmaß an fachinhaltlichen (und fachdidaktischen) Kenntnissen in diesem Bereich.

Eine fachinhaltliche Lehrveranstaltung müßte direkt an den unmittelbaren Wahrscheinlichkeits-Intuitionen von Grundschul-Kindern und -Studierenden anknüpfen. — Denkbar ist auch ein Vorgehen, bei dem zunächst ein ausführlicher Kombinatorik-Lehrgang durchgeführt und darauf eine naive Wahrscheinlichkeits-Lehre aufgebaut wird. — Mit beiden Alternativen hat man an nordrhein–westfälischen Hochschulen gute Erfahrungen gemacht.

4.5 Analysis u.ä.

Ein Inhalt, der sich u.E. als eigenständige Veranstaltung von selbst verbietet, ist die Infinitesimalrechnung (von Folgenkonvergenz bis hin zur Chaostheorie), so gewichtig ihr Anteil an einem ausgewogenen Bild von Mathematik auch wäre. Mit der Analysis im "traditionellen Sinn" ist der Grad dessen, was Grundschul-Lehrpersonen *mehr* als Grundschüler kennen und können sollten, eindeutig überschritten. Die Bezüge zur Grundschule sind allzu schwach, und die Erfolgsaussichten einer Analysis-Veranstaltung für Grundschullehrer-Studierende kann man nur mit fast "null" schätzen, jedenfalls wenn man sich nichts über die dürftigen Ergebnisse des doch intensiveren Analysis-Unterrichts in der gymnasialen Oberstufe in die Tasche lügt.

4.6 Mathematik und Computer

Da die Studierenden mehr und mehr wenigstens durch die Nutzung von Textverarbeitung flächendeckend Zugang zum Computer finden, hat sich das Argument der Überwindung der Distanz zum Computer i.w. erledigt. Für eigene Lehrgänge fehlt die Zeit, zumindest innerhalb der fachinhaltlichen Mathematik-Ausbildung. Im Rahmen der Arithmetik und der Geometrie, vor allem der Raumgeometrie, aber auch des Sachrechnens ("Mathematisches Modellieren") bieten sich jedoch Ansatzpunkte. Allerdings sind die entsprechenden Computersysteme noch lange nicht ausgereift genug.

Wenn denn die Nutzung des Computers in Form von Multimedia einmal tendenziell so ausgearbeitet wie die klassischer Medien (Schulbuch u.ä.) sein sollte, stellt sich die Frage, ob primär die Erziehungswissenschaft mit der allgemeinen Medien-Didaktik und -Pädagogik und erst in zweiter Linie die Didaktik der einzelnen Fächer (auch der Mathematik) zuständig ist.

5. Ein Beispiel (aus der Raumgeometrie)

Im Bereich der Geometrie plädieren wir für einen viel stärkeren Akzent auf der Raumgeometrie, und zwar über die Betrachtung von Standardkörpern hinaus, die durch Verschiebung (Prismenartige) oder Streckung (Kegelartige) aus einer ebenen Fläche erzeugt werden können, allzu trivial in unsere Rechte-Winkel-Welt eingepaßt sind und die ebene Geometrie nicht genügend überschreiten. — Hier bieten sich die archimedischen (inklusive: die platonischen) Körper an.

Dabei geht es in erster Linie um die raumgeometrische Behandlung und erst in zweiter Linie um kombinatorische Betrachtungen im Umfeld des Eulerschen Polyedersatzes:

Auftreten von archimedischen Körpern in der Umwelt. Diskussion ihrer Zwecke und ihrer Funktionalität. Zusammensetzung aus ebenen Stücken (hier wie an vielen anderen Stellen: Übergang zwischen ebener und Raumgeometrie, der hier weniger trivial ist als bei den o.a. Prismen und Spitzkörpern).

Vorgabe einer Liste von Bildern *aller* archimedischen Körper. Beweis, daß dies alle sind. Einer der wenigen Beweise, wo das zu Beweisende wirklich in Frage steht. Fallunterscheidung und dann durchweg Betrachtung von Polygonwinkeln (wieder: Zusammenhang zwischen Ebene und Raum). Am Schluß ein vollbrachtes Werk: Übersicht über alle archimedischen Körper. Übung: Dasselbe für die archimedischen *Parkette*. Prinzipiell gleichartig, jedoch mit einigen Besonderheiten.

Beziehungen zwischen den Körpern durch Abstumpfen von Ecken bzw. Kanten oder durch andere Operationen. 4 Grundtypen, die auch genau durch 4 Symmetriegruppen gekennzeichnet sind. Zusammenhang zwischen eigentlichen (Drehungen) und uneigentlichen (Spiegelungen) räumlichen Symmetrieabbildungen. Duale Körper. Besonderheiten der platonischen Körper.

Das Thema ist insgesamt sehr beziehungshaltig (Anwendungen, ebene / räumliche Geometrie, Symmetrie, Ästhetik, konkrete Herstellhandlungen, auch Kombinatorik und Beweisen). Nach allen Erfahrungen fördert es das Raumvorstellungs-Vermögen ungemein und wirkt aus ästhetischer Sicht reizvoll. Zentrale Ideen der Geometrie werden angesprochen (Symmetrie, Passen, Optimierung usw.). Es ist unumgänglich genaues Arbeiten (etwa bei der Herstellung konkreter Körper) und genaues Vorstellen (Wie sieht die Rückseite der Körper aus? Wo werden sie dort von den Symmetrieachsen durchstoßen? usw.) erforderlich.

Zumindest die platonischen Körper und überhaupt Parkette lassen sich mit einigen Eigenschaften in der Grundschule sinnvoll behandeln.

Literatur

Freudenthal, H.: Rezension von: Yves Chevallard: La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné. In: *Educational Studies in Mathematics* 17 (1986), S. 323–327.

Garlichs, A.: Teile und Spare. In: *Grundschulzeitschrift* 7 (1993), H. 68, S. 4.

Hartmann, B.: Ein Überblick über Modelle für die erste Phase der Ausbildung von Grundschullehrerinnen und -lehrern in der Bundesrepublik Deutschland. In diesem Band.

Hentig, H. von: Vom Verkäufer zum Darsteller. Absagen an die Lehrerbildung. Teil 1. In: *Neue Sammlung* 21 (1981), S. 100–114.

Kultusminister des Landes NW (Hrsg.): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein–Westfalen. Mathematik. Frechen 1985.

Ministerium für Schule und Weiterbildung & Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes NW (Hrsg.): Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer in Nordrhein–Westfalen. Frechen 1995.

Spiegel, H.: Mathematik im Studium des Lehramts Primarstufe. Eine Informationsveranstaltung für Studienanfänger. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 17 (1996), H. 2, S. 151–160.

Stein, M.: Vorlesungs-Psychogramme. Eine Methode zur Evaluation großer Vorlesungen. In: *Forschung und Lehre* 1996, S. 256–257.