Diskussionsbeiträge

Peter Bender, Dieter Beyer, Ute Brück-Binninger, Rainer Kowallek, Siegbert Schmidt, Peter Sorger, Hans Wielpütz, Erich Ch. Wittmann

Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer

(Gekürzte Fassung eines für das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (NW) 1996 entwickelten und in Bardy (1997) abgedruckten Papiers)

Zusammenfassung: Viele angehende Grundschullehrerinnen und -lehrer bringen aus ihrer eigenen Schulzeit ein reduziertes Bild von der Mathematik mit und haben, wenn überhaupt, oberflächliche Vorstellungen von deren Vermittlung. Aus Sicht der Autoren ist der Mathematikunterricht, auch und gerade in der Grundschule, eine wichtige und anspruchsvolle Aufgabe, und sie halten eine niveauvolle, an den Belangen der (Grund-) Schule ausgerichtete Ausbildung im Fach Mathematik als eine Grundlage und Ergänzung für Didaktik und Praxis im Grundschullehramts-Studium für unverzichtbar. Es werden einige grundlegenden Ideen für eine solche Ausbildung beschrieben.

Abstract: Many prospective primary school teachers have a reduced image of mathematics and have, if any, rather superficial ideas about the teaching of mathematics. The authors think mathematics teaching, in particular in primary school, to be an important and ambitious task. Therefore the teacher students should study mathematics on a correspondingly ambitious level, of course, on the background of the needs of primary school, as a subject matter foundation and completion of didactics and school practice. In the article is given an outline of the contents and ideas which should be included in such a mathematics curriculum.

0. Vorbemerkungen

Wohl unterrichten in Deutschland die meisten Grundschullehrerinnen und -lehrer aus guten Gründen gemäß dem Klassenlehrerinnen- und -lehrerprinzip das Fach Mathematik; in vielen Bundesländern werden sie jedoch im Studium zu wenig auf diese Aufgabe vorbereitet. Nach einer Zusammenstellung von Hartmann (1997) ist Mathematik lediglich in NW, Sachsen-Anhalt und Thüringen ein eigenständiges Pflichtfach für alle Grundschullehramts-Studierenden. Verbreitet ist die Meinung, daß man für das "Beibringen der Grundrechenarten und des Sachrechnens" schon deshalb qualifiziert sei, weil man diese Fertigkeiten in der eigenen Schulzeit gelernt habe. Wenn dennoch ein paar Semesterwochenstunden (SWS) für Mathematik zur Verfügung stehen, werden diese (mit Recht) vornehmlich auf Didaktik i.e.S. verwendet, und das Mathematik-Bild der Studierenden bleibt i.w. das (unzulängliche) aus ihrer Schulzeit.
In unserem Bildungswesen, bis in die Fachdidaktiken hinein, gewinnt in den letzten Jahrzehnten eine inhaltsabstinente Pädagogik an Boden, nach der auf allen Bildungsstufen die Beschäftigung mit Fachinhalten zugunsten der Betonung von sog. Schlüsselqualifikationen, von Sozialformen, von (fächerunabhängigen) Projekten u.ä. zurückzunehmen sei. Die Wurzeln dieser Pädagogik sind u.a. in der antiautoritären Bewegung, in der Überschätzung von Medien für das Lernen, in schlechten Erfahrungen mit schulischer und universitärer Fachausbildung, in einer Distanz zur mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen (rationalen) Kultur (im Sinne von C.P. Snow) zu finden.
Die Autorinnen und Autoren des vorliegenden Papiers (eine Gruppe von universitären Mathematikdidaktikern sowie Grundschullehramts-Ausbilderinnen und -Ausbildern der zweiten und dritten Phase) setzen gegen diese Tendenz die Forderung nach einem gedie-

genen Mathematikunterricht auf allen Schulstufen, nicht zuletzt weil die Mathematik das Rückgrat jener rationalen Hälfte unserer Kultur ist, mit der Konsequenz einer *fachinhaltlichen* (neben einer fachdidaktischen) Mathematik-Ausbildung in einem nennenswerten Umfang für *alle* Grundschullehramts-Studierenden.
Dabei kommt es uns nicht auf einzelne Regelungen an, sondern auf den Geist des Unternehmens. Dieser würde auch Studierenden mit Mathematik als *Schwerpunktfach* bis in die Sekundarstufe II gut anstehen. Deren viel intensivere fachmathematische Ausbildung erschöpft sich nämlich häufig in einem verdünnten Aufguß von sinnferner formalistischer Mathematiker-Mathematik.
Insofern sind unsere Überlegungen keineswegs auf NW beschränkt, auch wenn wir von den dortigen nun einmal seit längerem vorhandenen Bedingungen ausgehen. Außerdem sprechen wir uns dafür aus, daß auch in den anderen Bundesländern das Fach Mathematik in der Grundschullehramts-Ausbildung Pflichtfach im Umfang von mindestens etwa 20 SWS wird.
Um Mißverständnissen vorzubeugen, stellen wir fest, daß neben Deutsch und Mathematik in diese Ausbildung eigentlich auch sachunterrichtliche, künstlerische, musische, sportliche und fächerübergreifende Elemente verbindlich gehörten und sie deswegen auf acht Semester erweitert werden sollte. Unser Thema ist jedoch die *Mathematik*, und zwar die fach*inhaltliche* Ausbildung. Auch wenn wir uns zur *Didaktik* kaum äußern, sind unsere Überlegungen selbstredend in der Wolle fach*didaktisch* gefärbt.
Wir haben sie mit zahlreichen Kolleginnen und Kollegen erörtert und viel von Spiegels Konzeption (1996) profitiert.

1. Einige Prämissen

— Wir gehen von einer 4jährigen Grundschule wie z.Z. in NW aus.
— Die Mathematik hat einen wichtigen Anteil an Bildung und Ausbildung, Förderung und Erziehung der Grundschulkinder, dadurch daß sie
  * einen unersetzbaren Beitrag zur Welterschließung leisten,
  * eine emanzipatorische Denkschule sein,
  * einen essentiellen Beitrag zur kognitiven Förderung leisten,
  * positive Einstellungen und Haltungen (zu individuellen und sozialen Herausforderungen) ausbilden und fördern,
  * und die Kinder mit einer spezifischen Errungenschaft der menschlichen Kultur begegnen lassen *soll und kann*.
— Im Mathematikunterricht sind die Kinder so zu fördern, daß sie
  * elementare mathematische Fertigkeiten verständig erwerben,
  * Grundkenntnisse über Zahlen, Formen und Größen gewinnen,
  * Fähigkeiten zur Lösung mathematischer Probleme entwickeln,
  * positive Einstellungen zum mathematischen Arbeiten aufbauen,
  * dabei lernen, (nicht nur in der Mathematik) kreativ zu sein, zu argumentieren und zu mathematisieren.
— Sowohl bei einer mehr traditionellen Organisation unter Einschluß des Klassenlehrerprinzips, als auch bei offeneren, eher qualifikations- statt inhaltsorientierten, fächerübergreifenden Formen des Lehrens und Lernens muß jede Grundschullehrerin und jeder Grundschullehrer in der Lage sein, Mathematik sinnvoll zu unterrichten, d.h. zunächst ganz pragmatisch: Sie bzw. er muß u.a. in der Lage sein zur

* sachgerechten didaktisch-methodischen Aufbereitung der Lerninhalte,
* selbständigen Erarbeitung geeigneter Lernkonzeptionen und -materialien,
* kritischen Beurteilung pädagogisch-didaktischer Modeerscheinungen,
* kompetenten Schulbuch-Beurteilung und -Nutzung.

Zugleich bedeutet dies auch, daß die Lehrerin bzw. der Lehrer selbst intellektuell vorleben muß, wozu sie bzw. er die Kinder bilden, ausbilden, erziehen und fördern möchte. Dabei kann der mathematische Bereich nicht ausgespart sein.

Eine inhaltlich-zielgerichtete Arbeit mit mathematischen Inhalten, aber auch mit solchen aus anderen Fächern, soll zwar durch pädagogische Prinzipien und Maßnahmen unterstützt und verbessert werden, sie kann aber nicht inhaltsfrei erfolgen und mithin *nicht* durch pädagogische Prinzipien und Maßnahmen *ersetzt* werden. — Allerdings reden wir nur einer solchen Mathematik-Ausbildung das Wort, in der

— jeder Inhalt vor dem Ziel, fähige Grundschullehrerinnen und -lehrer auszubilden, direkt gerechtfertigt werden muß und kann, und
— junge Erwachsene, häufig mit schlechten Erfahrungen mit Mathematik aus der eigenen Schulzeit, mit einem gleichgültigen oder gar ablehnenden Verhältnis zur Mathematik, mit mittelmäßigen (oder schwachen) mathematischen Fähigkeiten und Kenntnissen, selbst Freude am mathematischen Tun gewinnen oder wenigstens ihre Distanz aufgeben und, soweit eben an der Universität möglich, gute Grundlagen für ihren später zu erteilenden Mathematikunterricht erwerben können, und zwar unter Einbezug kindlicher Eigenproduktionen und Intuitionen zur Mathematik.

Ausbildung und Anforderungen sind auf jeden Fall fachlich redlich zu gestalten. Zugleich solllten sie so angelegt werden, daß jede und jeder Grundschullehramts-Studierende intellektuell zu erreichen ist und eine Chance zum Erfolg hat. — Nach unseren Erfahrungen ist dies bei der überwiegenden Mehrzahl sehr wohl möglich. — Wenn allerdings bei Einzelnen etwaige Blockaden unüberwindlich sind, muß man in Frage stellen, ob diese Menschen wirklich für das Grundschullehramt geeignet sind. Die begnadete Grundschullehrerin, den begnadeten Grundschullehrer, die bzw. der "lediglich" in Mathematik ein absoluter Ausfall ist, hat unseres Wissens noch niemand erlebt.

2. Einige grundlegende Gedanken zur Mathematik-Ausbildung im Studiengang 'Lehramt für die Primarstufe'

Damit das Mathematik-Studium seine Funktion im Rahmen der Lehramts-Ausbildung erfüllen und (u.a.) den notwendigen fachinhaltlichen Hintergrund sicherstellen kann, muß es in spezifischer Weise auf das Tätigkeitsfeld 'Schule' bezogen sein. — Die Rolle der Lehrerin bzw. des Lehrers besteht im Grundsatz darin, zwischen "Fach" und "Kind" zu vermitteln. Dafür wird ein *genetisches Wissenschaftsverständnis* benötigt. Der Erfolg des Unterrichts steht und fällt mit der Fähigkeit der Lehrerin bzw. des Lehrers, die *Entwikkelbarkeit* des Faches Mathematik mit der *Entwicklungsfähigkeit* des Kindes in fruchtbare Wechselwirkung zu bringen.

In der Vergangenheit wurde das Lehramts-Studium *für alle Stufen* viel zu stark an der Mathematik-Ausbildung für die Spezialistinnen und Spezialisten ausgerichtet, in der statt eines genetischen ein *statisches* Wissenschaftsverständnis vorherrscht: Mathematik wird dabei als fertig gegebene, von allen Beziehungen nach außen gereinigte systematische Struktur gelehrt und von den Studierenden reproduktiv nachvollzogen. — Noch heute meinen viele Mathematikerinnen und Mathematiker und von der Fachwissenschaft 'Mathematik' stark beeinflußte Fachdidaktikerinnen und -didaktiker, daß dies in Inhalten und Vermittlungsformen das universelle Modell für Mathematik-Lernen schlechthin sein müsse ("Mathematik ist Mathematik"). Die Aufgabe der Mathematikdidaktik wird hierbei auf die "didaktische Transposition" oder "Elementarisierung" gegebener fachinhaltlicher Strukturen auf untere Niveaus reduziert. — Eine tiefere Analyse des Mathematik-Treibens, des Mathematik-Lernens, der Epistemologie und der Geschichte der Wissenschaft 'Mathematik' sowie die vorliegenden Erfahrungen in der Lehramts-Ausbildung selbst zeigen die Schwächen dieses Denkens "von oben nach unten", wie es schon Freudenthal (1986) überzeugend zum Ausdruck gebracht hat.

Für die Mathematiklehramts-Ausbildung ist es dringend erforderlich, anstelle des Denkens "von oben nach unten" ein Denken "von unten nach oben" als durchgehendes Konzept zu realisieren: Lehramts-Studierende müssen die elementare Mathematik nicht als ein Fertigprodukt, sondern als eine Tätigkeit erfahren, die vom experimentierenden Handeln innerhalb sinnvoller mathematischer und realer Problemkontexte bis hin zum lokalen (und später auch globalen) Ordnen der dabei gewonnenen Erkenntnisse fortschreitet. Wichtiger als die Abarbeitung eines möglichst umfangreichen Stoffes ist daher in der Lehramts-Ausbildung die Entwicklung von *Verständnis und Selbständigkeit* im selbsttätigen Umgang mit elementarer Mathematik: Die Studierenden müssen im Studium möglichst viel selber *aktiv* werden und *Mathematik-Lernen an sich selbst als "konstruktiven und zugleich entdeckenden Prozeß"* erleben. *Hier liegt der Schlüssel für die gesamte Ausbildung.*

Von großer Bedeutung sind die Verwendung und Ausbildung einer *problemorientierten Sprache*. Die Mathematik hat sich mehrere tausend Jahre ohne eine ausgefeilte Begrifflichkeit und ohne einen entsprechenden Formalismus prächtig entwickelt. Es gilt, hieran anzuknüpfen. Wie René Thom in einem berühmten Vortrag gesagt hat, besteht das wirkliche Problem des Unterrichts nicht in der "Strenge", sondern in der *"Bedeutungsgebung"*. Anstelle des Formalismus, der in der Zeit der "Neuen Mathematik" auch in die Grundschullehramts-Ausbildung Einzug gehalten hat, ist der Gebrauch schlichter Ausdrucksmittel viel hilfreicher und sinnvoller sowohl für das eigene Studium als auch für die spätere Unterrichtstätigkeit.

Problemfelder der elementaren Mathematik können so bearbeitet werden, daß aus ihnen sowohl Aktivitäten für Kinder als auch — auf einer höheren Ebene — Aktivitäten für Studierende erwachsen, die reichhaltig genug sind, um Ausschnitte vor allem arithmetischer und geometrischer Theorien zu tragen. Dieser Ansatz muß gezielt ausgebaut werden. Wo immer möglich, sollten auch in der fachinhaltlichen Ausbildung Bezüge zu den Inhalten des Mathematikunterrichts der Grundschule hergestellt werden.

3. Wie könnte eine solche Mathematik-Ausbildung aussehen?

Grundschullehramts-Studierende bringen die Kritik an ihrer Mathematik-Ausbildung insgesamt oder an gewissen Inhalten gern in der Form zum Ausdruck, daß sie bestreiten, diese für ihren späteren Beruf zu "brauchen". Hier zeigen sich u.a.

- ein gewisser "fachinhaltlicher Materialismus" in Form von Überschätzung der inhaltlichen Seite des Lernens bei gleichzeitiger Unterschätzung der durch das Lernen zu gewinnenden formalen Bildung;

— das Mißverständnis, daß der Ausbildungsstoff ein Muster, eine Vorlage für den Schulstoff zu sein hätte (wobei viele Studierende verkennen, daß sie auch fachinhaltliche Kenntnisse brauchen, um das Verhalten von Grundschulkindern in mathematikhaltigen Situationen einschätzen zu können);
— eine gewisse Geringschätzung der naturwissenschaftlichen Hälfte der Kultur, wie sie in unserer Gesellschaft durchaus verbreitet ist und ja solche Auswüchse mit sich bringt, daß immer wieder Exponentinnen und Exponenten des öffentlichen Lebens mit ihrem Versagen im Schulfach Mathematik kokettieren. Keiner würde wohl vergleichbare Schwächen im Fach Deutsch zugeben, und niemand käme auf die Idee, das Studium im Fach Deutsch auf die Lektüre von Schulbuchtexten für das 1. bis 4. Schuljahr zu beschränken.

Gezielte Befragungen (systematisch z.B. durch Stein und Mosel-Göbel in Münster seit einigen Semestern; s. Stein 1996) zeigen, daß diese Kritik vor allem bei solchen Inhalten und bei solchen Studierenden virulent wird, wo verstärkt Verstehensprobleme auftreten.
Es wäre interessant, die Mechanismen im einzelnen zu untersuchen, die zwischen Verstehens- und Akzeptanzschwierigkeiten bestehen. Für unsere Überlegungen ist jedenfalls von Bedeutung, daß diese beiden Problembereiche im Mathematikstudium unserer angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer überhaupt vorhanden sind und zudem stark korrelieren.
Sowohl um das Verstehen, als auch um die Akzeptanz zu fördern, sind im *Studium* in einem angemessenen Umfang Lernsituationen zu schaffen, die gemäß den allgemeinen Zielen und Prinzipien des Grundschul-Mathematikunterrichts konzipiert sind. D.h. insbesondere, daß die Studierenden Gelegenheiten zu eigenem problemlösenden, schöpferischen Tun bekommen und ihnen Chancen geboten werden, Freude an mathematischer Betätigung zu entwickeln.

Konkrete Ziele, die mit den fachinhaltlichen Veranstaltungen erreicht werden sollen:

Im affektiven Bereich:
— etwa vorhandene negative Einstellungen zur Mathematik abbauen;
— Freude an der Beschäftigung mit Mathematik entwickeln;
— Selbstvertrauen in die Kraft der eigenen Vernunft gewinnen;
— die Befriedigung spüren, die aus dem Entdecken von Sachverhalten und Zusammenhängen kommt oder allein aus dem Gefühl, etwas verstanden zu haben;
— Mut zum Nachdenken haben, auch wenn zunächst kein Lösungsweg in Sicht ist;
— zum Probieren bereit sein; Neues zu denken wagen; sich durch Fehler und Irrwege nicht entmutigen lassen.

Und im Bereich didaktischer Einsichten:
— erfahren, daß mathematisches Verstehen nicht vermittelt werden kann, indem das Individuum weitgehend passiv bleibt, sondern daß es durch intensive eigene Aktivität erarbeitet werden muß;
— erfahren, daß Fehler zum Alltag fruchtbarer Lernprozesse gehören, bei ihrem Zustandekommen ein Anteil richtiger Gedanken beteiligt sein kann und man aus ihnen lernen kann — jedenfalls wenn man Klarheit über die Fehlerursache gewinnt;

- erfahren, daß man im Bereich mathematischen Denkens zu sicheren Aussagen kommen kann, ohne sich auf fremde Autoritäten stützen zu müssen, daß man sich also bei hinreichender Sorgfalt weitgehend auf das eigenen Denken verlassen kann und die Mathematik daher wie kein anderes Fach geeignet ist, das Selbstvertrauen in die eigene Vernunft zu stärken;
- bis hin zu: durch aufmerksame Beobachtung der eigenen Lernprozesse Erfahrungen machen, die einem helfen, die Lernprozesse von Kindern besser zu verstehen.

Realistischerweise darf man nicht außer acht lassen (und das gilt für Mathematik-Studierende aller Provenienz), daß die Eigentätigkeit der Lernenden auch einer Strukturierung und einer mehr oder weniger starken Anleitung durch die Lehrenden bedarf: Ein roter Faden muß geliefert werden; Grundlagen müssen gelegt werden; Grundbegriffe und Schließweisen müssen *erklärt* werden; beispielhafte Problemlösungen müssen vorgeführt werden.

Bewährt haben sich Lehrveranstaltungen im Umfang von 4 bis 6 SWS, passend aufgeteilt in sog. Vorlesungen und sog. Übungen. Zwar ist das eigenständige Mathematik-Handeln, -Denken und -Verstehen eine notwendige Voraussetzung zum "Erwerb" von mathematischen Inhalten, und eine Vorlesung kann hierfür letztlich "nur" Anregungen geben. Wesentlich ist natürlich, daß die Lehrenden nicht nur wissen, "wohin" sie fachlich möchten, sondern sich auf die Voraussetzungen, Einstellungen und (Berufs-) Ziele ihrer Klientel wirklich einlassen. Zwar haben diese zahlreiche Inhalte im Laufe von 12 bis 13 Schuljahren "gehabt", aber man kann nicht auf wirkliches *mathematisches Wissen* oder gar *Fähigkeiten* schließen wie
- Probleme erkennen, formulieren, mathematisch modellieren, lösen können;
- Muster und Zusammenhänge erkennen sowie plausibel begründen, d.h. letztlich: beweisen (ein Wort, mit dem man regelmäßig Schrecken hervorruft) können;
- Raumanschauung;
- geeignete Grundvorstellungen und Grundverständnisse elementarer arithmetischer und geometrischer Begriffe und Zusammenhänge.

Diese Fähigkeiten sind wenigstens im Studium auszubilden. Dabei halten wir folgendes "mathematische Niveau" für angemessen: Die *Grundvorstellungen und Grundverständnisse* (einschließlich "Beweisen") sind
- beispielgebunden,
- in konkreten (durchaus auch erfundenen) Situationen,
- mit Menschen, die in diesen Situationen Überlegungen anstellen, Zwecke und Ziele verfolgen, handeln,
- wann immer möglich, in geometrischen Veranschaulichungen

zu entwickeln. Die Studierenden müssen diese Handlungen nicht immer konkret selbst ausführen, sie müssen sich aber wenigstens das Ganze möglichst plastisch vorstellen.

Am jeweiligen Ende steht möglicherweise eine Formel oder ein Algorithmus (mit Variablen), aber nicht als Ziel der ganzen Bemühungen, sondern als Zusammenfassung bzw. Verallgemeinerung und zur Sichtbarmachung weiterer Zusammenhänge, als Produkt des lokalen Ordnens.

Allerdings hängt der Erfolg einer jeglichen Lehrveranstaltung von zahlreichen Bedingungen ab, die kaum kontrollierbar sind, insbesondere auch von der Persönlichkeit und dem Talent der Dozentin bzw. des Dozenten.

4. Zur Stoffauswahl

Der von Heinrich Winter geprägte Lehrplan des Landes NW (1985) hat von seiner Aktualität noch nichts verloren, wenn er fordert, die drei Stoffbereiche *Arithmetik, Geometrie* und *Größen* unter den beiden Prinzipien der *Anwendungs-* und der *Strukturorientierung* zu entfalten. — Als Inhalte für eigenständige kanonische fachinhaltliche Lehrveranstaltungen erweisen sich vor allem Arithmetik und Geometrie als hinreichend tragfähig. — Der Bereich der Größen ist in beiden zusammen gut aufgehoben, und die beiden Orientierungsprinzipien lassen sich in ihnen gehaltvoll realisieren.

Aus unseren obigen Überlegungen ergeben sich als Kriterien für die Stoffauswahl:
- die Organisation von Lernsituationen der genannten Art soll erleichtert werden;
- selbst große Lücken im Schulwissen sollen einen Zugang nicht verhindern;
- von den Inhalten soll eine möglichst hohe Motivation ausgehen;
- ein Bezug zu den Themen der Grundschul-Mathematik soll einfach herstellbar sein;
- die Studierenden sollen ein vertieftes Verständnis der für die Grundschul-Mathematik grundlegenden Begriffe und Verfahren erwerben können.

4.1 Arithmetik und Geometrie: Die folgenden Inhalte kann man sowohl im Grundstudium, als auch (vertieft) im Hauptstudium ansiedeln. Z.T. sind sie unerläßlich für das Studium der Mathematikdidaktik mit ihren verschiedenen Themen, z.T. stellen sie Abrundungen zu den Didaktik-Veranstaltungen dar und können diese bereichern.

Arithmetik
- Struktur von Stellenwertsystemen,
- Prinzip der vollständigen Induktion,
- Zahlenmuster und -strukturen (spezielle Folgen und Summenformeln),
- Elementare Zahlentheorie (Teilbarkeit, Teilbarkeitsregeln, Primzahlen, PFZ, euklidischer Algorithmus, Restklassen, ...),
- Elementare Kombinatorik (Produktregel, Anzahl von Möglichkeiten mit oder ohne Anordnung, mit oder ohne Wiederholung, ...),
- Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeits-Verständnis.

Geometrie
- Grundformen (in Ebene und Raum),
- Symmetrie (in Ebene und Raum),
- Abbildungen (in Ebene und Raum),
- Flächeninhalt und Volumen,
- Karten und Risse,
- Gitterpunkt-Geometrie,
- Netze.

4.2 Anwendungen (Größen, Sachrechnen, Sachmathematik): Der Bereich 'Anwendungen' bietet sich weniger gut für eine eigene fachinhaltliche Veranstaltung an. Um über fachliche Banalitäten hinauszukommen, sind erhebliche mathematische sowie nicht-mathematische Voraussetzungen erforderlich, die in diesem Studiengang kaum bereitgestellt und nach aller Erfahrung auch nicht entlang der Anwendungen entwickelt werden können. Dennoch müssen Anwendungen gemäß dem Prinzip der Anwendungsorientierung und der Kongruenz zwischen Schule und Hochschule die Lehramts-Ausbildung in Mathematik durchdringen, wobei diese weniger als angewandt und eher als *anwendbar* erfahren werden soll. Es ist eher die mathematik*didaktische* Ausbildung der Ort, wo Fragen des *Weltbezugs* bis hin zu den *Größenbereichen* ausführlicher zu diskutieren sind.

4.3 Mathematische Logik, Mengenlehre, Algebra:

Vollständige Induktion: Die Erzeugung der natürlichen Zahlen aus der Eins durch fortgesetzte Nachfolgerbildung ist ein strukturelles Charakteristikum des für die Grundschule relevanten Bereichs der natürlichen Zahlen. Induktive Definitionen und Beweise widerspiegeln diese Nachfolgerbildung und sind daher in allen auf den natürlichen Zahlen beruhenden Theorien (Arithmetik, Zahlentheorie, Kombinatorik) *völlig natürliche Werkzeuge*. Sie erhalten ihre Bedeutung keineswegs erst in der "Höheren Mathematik". Im Grundschullehramts-Studium verbietet sich ein formaler Zugang als "antididaktische Inversion" (Freudenthal) von selbst. In Frage kommt nur ein *genetischer Zugang*, der sich an der Geschichte der Mathematik und an der Nutzung der Induktion als heuristische Strategie beim Problemlösen orientiert. — Hierbei empfiehlt sich folgender Ansatz: Die vollständige Induktion wird im Rahmen sinnvoller Problemkontexte thematisiert, und dabei wird stets der Nachdruck auf die konkrete Erarbeitung der ersten 3, 4, 5 Spezialfälle gelegt, bis das allgemeine Schema deutlich wird. Später kann man zusätzlich die formale Fassung als Kurzfassung der Überlegungen an den Spezialfällen hinzunehmen, wobei ein Vergleich zwischen induktiven Definitionen und der vollständigen Induktion als Beweisprinzip sehr lehrreich ist.

Schreib-, Sprechweisen und Begriffe aus mathematischer Logik, Mengenlehre und Algebra: Sie sollten im Zuge der Arithmetik- und Geometrie-Veranstaltungen ohne größere Problematisierung verwendet werden, wobei der Nutzen — etwa zur prägnanten Formulierung, zur übersichtlichen Strukturierung, zum Verallgemeinern und zur Gewinnung weitergehender Erkenntnisse — solcher Formalisierungen bei den gewählten Beispielen stets deutlich werden sollte. — Das Prinzip der *Strukturorientierung* ist übrigens weder an mathematischen Formalismus gebunden (an diese Bindung zu glauben, ist ein fundamentaler Irrtum von vielen Mathematik-Ausbilderinnen und -Ausbildern zu allen Zeiten), noch erfordert es eigenständige Algebra- oder Logik-Passagen im Grundschullehramts-Studium.

4.4 Stochastik: Eine Sonderrolle spielt die Stochastik. Hier ist trotz aller Vorstellungen der Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker eine weitgehende faktische Abstinenz auf allen Schulstufen zu konstatieren, und bei den Studierenden sind insgesamt so gut wie keine Voraussetzungen vorhanden. Insoweit Stochastik zu den genuinen Anwendungen gerechnet wird, gilt das in 4.2 Gesagte. — Aber stochastisches Denken ist auch Teil der Allgemeinbildung, und seine Grundlagen sind in der Primarstufe zu legen bzw. zu pfle-

gen. Daher benötigen Grundschullehramts-Studierende ein Mindestmaß an fachinhaltlichen (und fachdidaktischen) Kenntnissen in diesem Bereich.
Eine fachinhaltliche Lehrveranstaltung müßte direkt an den unmittelbaren Wahrscheinlichkeits-Intuitionen von Grundschulkindern und Grundschullehramts-Studierenden anknüpfen. — Denkbar ist auch ein Vorgehen, bei dem zunächst ein ausführlicher Kombinatorik-Lehrgang durchgeführt und darauf eine naive Wahrscheinlichkeitslehre aufgebaut wird. — Mit beiden Alternativen hat man in NW gute Erfahrungen gemacht.

4.5 Analysis u.ä.: So wesentlich die Infinitesimalrechnung (von Folgenkonvergenz bis hin zur Chaostheorie) für ein "ausgewogenes" Bild von Mathematik auch ist, so ist mit der Analysis im "traditionellen Sinn" der Grad dessen, was Grundschullehrerinnen und -lehrer *mehr* als Grundschulkinder kennen und können sollten, eindeutig überschritten. Wenn man sich über die dürftigen Ergebnisse des Analysis-Unterrichts in der gymnasialen Oberstufe nichts in die Tasche lügt, dann verbietet sich angesichts der studentischen Voraussetzungen, ihrer Interessenlage, der Relevanz für ihren Beruf und des insgesamt engen Zeitrahmens eine eigenständige, für alle Grundschullehramts-Studierenden verbindliche Analysis-Veranstaltung von selbst.

4.6 Mathematik und Computer: Inzwischen hat die überwiegende Mehrzahl der Studierenden Erfahrungen mit dem Computer, sei es durch Textverarbeitung, sei es durch Spiele; und das Motiv der Überwindung der Distanz zum Computer verliert immer mehr an Bedeutung. Für eigene Lehrgänge fehlt die Zeit; im Rahmen der meisten der in 4.1 genannten arithmetischen Themen sowie der Geometrie (sowohl in der Ebene, als auch im Raum), aber auch der Anwendungen ("Mathematisches Modellieren") bieten sich jedoch Ansatzpunkte. Allerdings sind die erforderlichen Computersysteme noch zu wenig ausgereift.

5. Ein Beispiel (aus der Raumgeometrie)

Im Bereich der Geometrie plädieren wir für einen viel stärkeren Akzent auf der Raumgeometrie, und zwar nicht nur durch die Betrachtung von Standardkörpern, die durch Verschiebung (Prismenartige) oder Streckung (Kegelartige) aus einer ebenen Fläche erzeugt werden können. — Hier bieten sich die archimedischen (inklusive: die platonischen) Körper an.
Dabei geht es in erster Linie um die raumgeometrische Behandlung, dann aber auch um kombinatorische Betrachtungen im Umfeld des Eulerschen Polyedersatzes:
Auftreten von archimedischen Körpern in der Umwelt. Diskussion ihrer Zwecke und ihrer Funktionalität. Zusammensetzung aus ebenen Stücken (hier wie an vielen anderen Stellen: Übergang zwischen ebener und Raumgeometrie, der hier weniger trivial ist als bei den o.a. Prismen und Spitzkörpern).
Vorgabe einer Liste von Bildern *aller* archimedischen Körper. Beweis, daß dies alle sind (einer der wenigen Beweise, wo das zu Beweisende wirklich in Frage steht). Fallunterscheidung und dann durchweg Betrachtung von Polygonwinkeln (wieder: Zusammenhang zwischen Ebene und Raum). Am Schluß ein vollbrachtes Werk: Übersicht über alle archimedischen Körper. Übung: Dasselbe für die archimedischen *Parkette*. Prinzipiell gleichartig, jedoch mit einigen Besonderheiten.

Beziehungen zwischen den Körpern durch Abstumpfen von Ecken bzw. Kanten oder durch andere Operationen. 4 Grundtypen, die (auch) durch 4 Symmetriegruppen gekennzeichnet sind. Zusammenhang zwischen eigentlichen (Drehungen) und uneigentlichen (Spiegelungen) räumlichen Symmetrieabbildungen. Duale Körper. Besonderheiten der platonischen Körper.
Das Thema ist insgesamt sehr beziehungshaltig (Anwendungen, ebene / räumliche Geometrie, Symmetrie, Ästhetik, konkrete Herstellhandlungen, auch Kombinatorik und Beweisen). Nach allen Erfahrungen fördert es die Raumanschauung ungemein und wirkt aus ästhetischer Sicht reizvoll. Zentrale Ideen der Geometrie werden angesprochen (Symmetrie, Passen, Optimierung usw.). Es ist genaues Arbeiten (etwa bei der Herstellung konkreter Körper) und genaues Vorstellen (Wie sieht die Rückseite der Körper aus? Wo werden sie dort von den Symmetrieachsen durchstoßen? usw.) erforderlich.
Zumindest die platonischen Körper und überhaupt Parkette lassen sich mit einigen Eigenschaften in der Grundschule sinnvoll behandeln.

Literatur

Bardy, Peter (Hrsg.) (1997): Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen/-lehrern. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Freudenthal, Hans (1986): Rezension von: Yves Chevallard: La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné. In: Educational Studies in Mathematics 17, 323–327

Hartmann, Brita (1997): Ein Überblick über Modelle für die Erste Phase der Ausbildung von Grundschullehrerinnen und -lehrern in der Bundesrepublik Deutschland. In: Bardy (1997), 134–144

NW, Der Kultusminister des Landes (Hrsg.) (1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein–Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach

Spiegel, Hartmut (1996): Mathematik im Studium des Lehramts Primarstufe. Eine Informationsveranstaltung für Studienanfänger. In: Journal für Mathematik-Didaktik 17, 151–160

Stein, Martin (1996): Vorlesungs-Psychogramme. Eine Methode zur Evaluation großer Vorlesungen. In: Forschung und Lehre 1996, 256–257

Anschriften der Autorin und der Autoren:

Peter Bender
U-GH Paderborn Fb 17
33095 Paderborn
bender@uni-paderborn.de

Dieter Beyer
Studienseminar P
Alte Kirchstr. 9
32423 Minden

Ute Brück-Binninger
Studienseminar P
Claudiusstr. 1
50678 Köln

Rainer Kowallek
Studienseminar P
Herforder Str. 7
45892 Gelsenkirchen

Siegbert Schmidt
U zu Köln
Gronewaldstr. 2
50931 Köln

Peter Sorger
WWU Münster
Einsteinstr. 62
48149 Münster

Hans Wielpütz
Schulamt Köln
Deutz–Kalker Str. 18–26
50769 Köln–Deutz

Erich Ch. Wittmann
U Dortmund
Postfach 500500
44227 Dortmund

Eingang Manuskript: 17.10.1996
Eingang Typoskript: 06.10.1999