

In: Gert Kadunz u.a. (Hrsg.) (1998): *Mathematische Bildung und neue Technologien. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik. Universität ~~von 5.10.~~ Klagenfurt, 28.9. - 2.10.1998. Stuttgart & Leipzig: Teubner, S. 33-52*

Peter BENDER, Paderborn (Deutschland)

Mathematik-didaktische Paradigmen und Computer — unter besonderer Berücksichtigung der Geometrie

1. Überlegungen zum wissenschaftlichen Charakter der Mathematik-Didaktik

Ein zentrales Anliegen unserer Kommunität seit etwa 30 Jahren (und der Klagenfurter Symposien seit 1976) lautet, die Mathematik-Didaktik als Wissenschaft zu etablieren und im Kreis der arrivierten Universitäts-Disziplinen salonfähig zu machen. — Daß das Ziel der Salonfähigkeit erreicht sei, darf füglich bezweifelt werden. Inwieweit der Status der Wissenschaftlichkeit eingetreten ist, steht dahin. Allerdings kann man diese Frage nicht durch einen Vergleich mit anderen Disziplinen angehen. Wohl sind deren Methoden und Ergebnisse von der Mathematik-Didaktik zur Kenntnis zu nehmen und, mehr noch, in diese einzubeziehen. Aber mit Wittmann (1995) ist festzustellen, daß die Mathematik-Didaktik ihre eigenen Methoden und Ergebnisse hat und daher in gewissem Sinne unvergleichlich ist.

Jede einseitige Ausrichtung an einer unserer vielen Bezugs-Disziplinen und zu weite Entfernung vom Kern der Mathematik-Didaktik als Grundlage für deskriptive und präskriptive wissenschaftliche Arbeit ist zumindest fragwürdig. Da denke ich an die

- *mathematik-artige* Strukturierung und *Formalisierung* des unterrichtlichen Geschehens,
- unhinterfragte *Übernahme massen-statistischer Methoden* für die Erforschung von *Lehr-Lern-Prozessen* (ohne das Fehlen von Unabhängigkeit, Validität und Repräsentativität überhaupt wahrzunehmen, geschweige denn zu beseitigen),
- *Verkürzung* des Menschen auf ein *informations-verarbeitendes Wesen*,
- *Vernachlässigung gesellschaftlicher Einflüsse*,
- *Verwechslung des philosophischen Ansatzes des Konstruktivismus* mit *empirisch 'erwiesenen'* Aussagen und, im Zusammenhang damit, *Überschätzung* von scheinbar *selbständigen* Schüler-Leistungen,
- *dezidierte Ausblendung einflußreicher stoff-didaktischer Momente* aus der Analyse von Lehr-Lern-Prozessen.

Solche Adaptionen sind vermutlich Voraussetzung für einen Erfolg bei der Einwerbung von Drittmitteln, insbesondere von der DFG, da man dort die Gutachter aus unseren Bezugs-Disziplinen überzeugen muß. Die intensive Beschäftigung mit den Paradigmen anderer Wissenschaften und deren in der Tat oft bereichernde Wirkung führen dann immer wieder zu gewissen Einseitigkeiten, zumal die Reduktion von Komplexität ja tatsächlich *eine* Voraussetzung für wissenschaftliches Arbeiten ist.

Allerdings scheint dieses Arbeits-Prinzip auch die Tendenz mit sich zu bringen, daß man immer kleinere Bereiche immer genauer erforscht, bis man *schließlich über nichts alles weiß*. Gestützt wird diese Tendenz von einem materialistischen Glauben an die Erforschbarkeit von Allem, wie er besonders in den real-sozialistischen Ländern ausgeprägt war. Aber unabhängig von der politischen Welt-Anschauung sind

Wissenschaftler auf der ganzen Welt gezwungen, ihren Geld-Gebern diesen Glauben zu vermitteln und dazu passende Projekte zu definieren.

Mit verantwortlich für diese Tendenz ist dabei die immense Ausweitung des Wissenschafts-Betriebs in den westlichen Ländern in den letzten dreißig Jahren und die entsprechende Vermehrung der Professoren-Stellen. Diese Bildungs-Offensive auf allen Stufen war und ist gesellschaftlich erforderlich und unvermeidlich, und ich möchte nicht gegen sie sprechen. Wie bei den Abiturienten brachte jedoch die Vervielfachung der Professoren-Stellen bei allen Fortschritten auch eine Ausbreitung des Mittelmaßes und damit des Berges von Papier mit sich, durch den man sich arbeiten muß, um zu interessanten, relevanten und fundierten Ergebnissen vorzustoßen. Viele Kollegen, vor allem in den westlichen Ländern, sehen sich aus wissenschaftlich-existentialen Gründen zum Publizieren gezwungen; aber auch so mancher *beamteter* Professor fühlt sich verpflichtet, hin und wieder seine Gedanken zum besten zu geben (wobei der verbreitetste Mangel die fehlende Kenntnis und Berücksichtigung der Literatur ist), und trägt damit womöglich dazu bei, die Durchsetzung wertvoller Erkenntnisse zu behindern.

Dies alles bezieht sich nicht nur auf die Mathematik-Didaktik, sondern eigentlich auf alle Disziplinen. Für die Volkswirtschafts-Lehre z.B. kann ich Perkos (1987a, 1987b) Kritik aus eigener Erfahrung nur bestätigen. In der uns besser vertrauten *Mathematik* kommen vielleicht weniger wissenschafts-methodische Mängel vor, dafür aber bei 200.000 bewiesenen Sätzen jährlich genug inhaltliche Fehler, und vor allem fehlt es den meisten mathematischen Resultaten an Relevanz. — Neben dem Vorhandensein eines eigenständigen Forschungs-Gebiets und eigener Forschungs-Methoden können wir also auch einen 'normalen' Wissenschafts-Betrieb mit seinen Licht- und Schatten-Seiten aufweisen (ganz zu schweigen von der — ebenfalls 'normalen' — Quote von, je nach Standpunkt, 60% bis 80% aller ca. 100 Professurenbesetzungs-Verfahren der letzten zehn Jahre in Deutschland, wo *offensichtlich* nicht der beste weibliche oder männliche Bewerber berufen wurde).

Mir graut schon davor, wenn wir uns demnächst der Evaluierungs-Wut der Hochschul-Politiker inner- und außerhalb der Hochschulen nicht mehr widersetzen können und Drittmittel-Projekte, Publikationen in referierten und nicht referierten Zeitschriften sowie in Tagungs-Bänden, Monographien, Lehrbücher, Doktoranden, Absolventen, Mitgliedschaften usw. *gezählt* werden, weil ja *offensichtlich* nicht inhaltlich geprüft werden kann. Dort fehlen zwar eventuell die lokalen Egoismen von Berufungs-Verfahren, aber jeder von uns kennt Kollegen, die dabei gut abschneiden werden, von denen man trotzdem genau weiß, daß sie nur Mittelmaß sind. — Wir werden dann auch formell etabliert sein und müssen nur noch aufpassen, daß wir nicht, aufgrund von immer drängender werdenden Spar-Zwängen, institutionell abgehängt und z.B. als überwiegendes Lehr-Fach an die Fach-Hochschule transferiert werden.

Mit dieser Situations-Beschreibung als Hintergrund möchte ich nun "*mathematikdidaktische Paradigmen und Computer*" diskutieren, bzw. sie ist eigentlich schon Teil des Themas. Alle bisher angesprochenen Aspekte sind im folgenden relevant, auch wenn ich den Zusammenhang nicht jedesmal expliziere. — Ich meine, daß neben dem Gehalt und der Qualität einer wissenschaftlichen Aussage immer auch die Interessen-Lage des Autors und andere Hintergründe mit bedacht werden müssen. Die idealistischen Interpretationen allein aus dem Werk heraus, wie wir sie im Deutsch-Unterricht in der Schule gelernt haben, können wir vielleicht noch auf mathematische Arbeiten anwenden, spätestens die Mathematik-Didaktik ist aber eine

auf die Gesellschaft bezogene Wissenschaft, und dies erst recht, seit sie sich mit dem Computer auseinandersetzt. Selbstverständlich hat auch ein Mathematik-Didaktiker Anspruch darauf, seine Untersuchungen beschränkt auf den von ihm gewählten Gegenstand in Ruhe durchzuführen, und muß nicht permanent auf die Schlüsselfragen des Mathematik-Unterrichts und des Computer-Einsatzes oder gar der Gesellschaft eingehen. Wenn er sich allerdings auf Spekulationen von mehr oder weniger ausgewiesenen Computer-Experten beruft oder selbst solche Spekulationen anstellt (was ja durchaus im Aufgaben-Bereich eines Wissenschaftlers liegt), muß er sich kritische Fragen gefallen lassen.

2. Anmerkungen zum Computer im Bildungs-System

Die Geschichte der Computerei und ihrer Anwendung im Bildungs-System ist voll von optimistischen Voraussagen, die bei weitem nicht eingetroffen sind:

- Der Nobelpreis-Träger *Simon* kündigte Mitte der 50er Jahre an, daß zehn Jahre später Computer-Schachprogramme besser als alle menschlichen Schachspieler sein würden. Es sieht so aus, als ob wir etwa jetzt, zum Jahr 2000, erleben, daß der Computer dem menschlichen Weltmeister ebenbürtig wird. — Das Fehlerhafte an der Simonschen Ankündigung ist weniger die vierfache Zeit für deren Realisierung, sondern der riesige Aufwand an Computer-Kapazität, der schon in einem so primitiven Kontext wie dem Schachspiel erforderlich ist, um dort den menschlichen Verstand zu übertreffen, den sich Simon so bestimmt nicht träumen ließ.
- In seiner Bildungs-Utopie hat sich der Informatiker *Papert* (1980) noch nicht festgelegt, *wann* denn die Institution 'Schule' verschwinden und von den in allen Privat-Häusern vorhandenen Computern ersetzt werden würde. Aber inzwischen vermutet er, "daß unser traditionelles Schulsystem noch 20 Jahre hat" (Interview in der Frankfurter Rundschau vom 29.08.1998). — Nach wie vor ignoriert Papert die *soziale* Dimension von Schule und überhaupt *völlig*. — Immerhin gelang es ihm, unter Pädagogen eine große Anhänger-Schar zu gewinnen. Sein Charisma geht so weit, daß sich manche Kollegen bemüßigt fühlten, ihn gegen die z.T. sehr energische Kritik (Bussmann & Heymann 1985, Bender 1987) zu verteidigen, z.B. gegen letztere, in Ermangelung von Argumenten, durch Abtun als "scharfes Essay mit polemischen Spitzen" (Hölzl 1994, 40).
- Was ist eigentlich aus der Bildungs-Krise geworden, die der Bildungsforscher *Haefner* (1982) für Mitte der 80er Jahre prognostiziert hatte? — Möglicherweise befinden wir uns ja mitten drin; sie ist dann aber weder so vordergründig durch *fehlenden* Computer-Einsatz verursacht, noch so vordergründig durch Computer-Einsatz zu überwinden, wie Haefner es dargestellt hat. Und von einer "Homuter"-Gesellschaft ist weit und breit nichts zu sehen.
- Auch in unserer eigenen Zunft wurde immer wieder und wird über die Zukunft spekuliert, natürlich mit bescheidenerem inhaltlichen und zeitlichen Horizont, aber durchaus mit einer gewissen Gewißheit, z.B. von meinem Freund Günter *Hanisch* (1992), wie "die Auswirkungen der Computeralgebra auf den Mathematikunterricht" *sein werden*.

Es ist manchmal vermutlich einfach die Erwartungs-Haltung des Nicht-Experten gegenüber dem Experten, die diesen dazu verleitet, seinen Spekulationen über die Zukunft den Anstrich der sicheren Erkenntnis zu verleihen.

Trivialerweise sind die Computer (wobei ich nicht solche meine, die Geräte wie das Kraftfahrzeug, die Waschmaschine, den Video-Rekorder steuern, sondern solche, die bewußt als Computer wahrgenommen werden beim Computer-Spiel, Tele-Banking, Internet-Surfing oder Texte-Schreiben) im Alltags-Leben zumindest bei jüngeren Menschen in Deutschland und Österreich nach wie vor auf dem Vormarsch, wie sich bei meinen alljährlichen Befragungen der (vornehmlich weiblichen) Paderborner Studien-Anfänger im Primarstufenlehramts-Studiengang seit 1995 deutlich abzeichnet. Aber die Nutzung findet in sehr enger Weise statt, nämlich vor allem durch männliche und zunehmend auch weibliche Kinder und Jugendliche in Form von Spielen (sowie Text-Verarbeitung bei älteren Schülern und Studenten). Diese Aktivitäten haben wenig Affinität zu den Zielen der Mathematik- oder der Informatik-Didaktik.

Schon die restlichen Schul-Fächer entwickeln ganz andere Paradigmen für den Umgang mit dem Computer als etwa die Mathematik-Didaktik mit dem Entwurf von Algorithmen (auch zur Simulation), Computer-Algebra-Systemen (CAS) und Dynamischer Geometrie-Software (DGS). Dort geht es hauptsächlich um die mediale Verwendung des Computers z.B. in Form von Multi-Media oder dem Internet, und damit weit weg von den derzeitigen zentralen mathematik-didaktischen Fragen. Im Vordergrund steht oft eine vergnügliche, ans Fernsehen angelehnte und vermeintlich nur so sich diesem gegenüber wirksam behaupten könnende, Vermittlung und selbständige Beschaffung (im weiteren Sinn) von Information. Bezeichnenderweise wünschte die Bertelsmann-Stiftung bei der Installierung der Arbeitsgruppe "Lehramtsstudium" im BIG-Projekt ("*Bildungswege in der InformationsGesellschaft*") in Paderborn zumindest keine dominierende Beteiligung der Mathematik-Didaktik, weil deren Stand nicht dem gewollten Image der Neuen Medien entspricht.

In der Tat, erfolgreicher Mathematik-Unterricht erfordert die Anstrengung des mathematischen Begriffs und ist daher anstrengend, mit oder ohne Computer. Ich kann mir wohl vorstellen, daß die Bildung und Anwendung mathematischer Begriffe mit gezieltem Einsatz von Neuen Medien erleichtert werden kann, erkenne aber auf der Basis einer Bestands-Aufnahme auf der BIG-Tagung Anfang 1997 in Paderborn nur geringe Aktivitäten in der deutsch-sprachigen Mathematik-Didaktik (auch wenn es seitdem etwas mehr geworden ist): Da haben wir das 'Urgestein' Fraunholz in Koblenz, der schon lange mit den jeweils neuesten Medien arbeitet; hie und da werden Hyper-Texte produziert (z.B. von Baptist in Bayreuth); Schreiber in Flensburg geht bei seinen Entwicklungen auch genuin didaktischen Problemen nach (Schreiber 1998); Backe-Neuwald in Paderborn arbeitet mit einer Informatiker-Gruppe an einer virtuellen Stadt und untersucht daran Fragen der Raum-Anschauung.

Ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, zeugt die Kürze dieser Aufzählung doch von einer grundsätzlichen Schwierigkeit der Forschungs- und Entwicklungs-Arbeit im Zusammenhang mit Neuen Medien: Diese ist noch viel aufwendiger als etwa das Schreiben von Schulbüchern und erfordert die Beteiligung von Programmierern, Designern und Didaktikern, und es ist in der Tat fraglich, ob sich dieser Aufwand wirklich lohnt, zumindest so lange in den nächsten Jahren noch nicht hinreichend ausgereifte, flexible und von relativen Laien verwendbare Multimedia-Moduln zur Verfügung stehen.

Dieser Einwand gilt prinzipiell gleichfalls in den anderen Schul-Fächern, auch wenn dort komfortable Lexika i.w.S. einen *substantielleren* Beitrag als in der Mathematik leisten können. Auch dort müssen Begriffe gebildet und angewendet, Zusammenhänge hergestellt werden usw., und zwar eigenköpfig durch die Schüler. Ich finde es durchaus reizvoll, wenn und falls eine Gesamtschul-Klasse in Paderborn-Elsen über das Internet mit einer adäquaten Klasse in South Los Angeles in Kontakt kommt und so direkt etwas über die sozialen Spannungen dort erfährt, ihre Geographie-Kenntnisse in einem kleinen Ausschnitt erweitert und ihr Englisch praktiziert. Aber schon mittelfristig stehen Stabilität und Ertrag solcher Projekte dahin, z.B. fragt sich auch: Was haben die Kinder in South Los Angeles davon, die Probleme von Paderborn-Elsen kennenzulernen? — Dagegen hätten die Gesamt-Schüler von Paderborn-Elsen sehr wohl etwas davon, etwas über ihre eigene Region und deren soziale Probleme *ungeschminkt* zu erfahren.

Das Phänomen des Internet in seiner aktuellen Form hat vor zehn Jahren keiner unserer Auguren vorausgesehen. Allerdings haben heute erst 7% der deutschen Haushalte einen Online-Anschluß, und wenn diese Quote vom Baseler Prognos-Institut für das Jahr 2010 auf 60% hochgerechnet wird (Westfälisches Volksblatt vom 11.08.1997), so sind mit dieser Prognos-Prognose doch einige Fragen verknüpft: Gerade in der Tele-Kommunikation sind die angebotenen Dienste immer wieder deutlich langsamer in die privaten Haushalte diffundiert als angekündigt. Wer redet heute z.B. noch von 'Bildschirm-Text'? Und: Uns als Pädagogen interessiert natürlich, auf welchem *Niveau* die Nutzung mehrheitlich stattfinden wird. — Ich kann mir den häuslichen Internet-Anschluß durchaus als Teil eines in der Schule durch fortgeschrittene Schüler zu nutzenden Medien-Verbunds vorstellen, frage aber, wie mit den Kindern aus den 40% Haushalten umgegangen werden soll, die nicht über einen privaten Online-Anschluß verfügen.

Die einschlägige Industrie, die mit ihr verbundene Politik, aber auch Angehörige des Bildungs-Systems, die sich selbst gerne mit dem Computer beschäftigen, verfolgen nachdrücklich das Ziel der Computerisierung der Schule. So hat vor einigen Wochen die Enquete-Kommission des deutschen Bundestages zur "Zukunft der Medien in Wirtschaft und Gesellschaft — Deutschlands Weg in die Informationsgesellschaft" ihren Abschluß-Bericht vorgelegt, der die "Chancen für die Wirtschaft bejubelt und die Risiken für Gesellschaft oder Demokratie nachordnet" und dabei 'mal wieder (recht unvermittelt) fordert, daß alle Schulen bis zum Jahr 2000 ans Internet angeschlossen werden sollen (Frankfurter Rundschau vom 12.08.1998). Zugleich steht das Bildungs-System, und mit ihm der Mathematik-Unterricht in seiner Eigenart, angesichts leerer öffentlicher Kassen und politischer Schlagwörter wie Globalisierung, Wettbewerb, Effizienz-Steigerung heute vor einer nie dagewesenen, großenteils vom Computer mit verursachten Herausforderung, zu deren Bewältigung selbstverständlich auch dessen etwaige Talente herangezogen werden müssen.

Natürlich ist dabei auch die Frage zu stellen, wie weit der Mathematik-Unterricht (mit oder ohne Computer) überhaupt gerechtfertigt ist. Wie wir uns anlässlich der Diskussion um Hans-Werner Heymanns Habilitations-Schrift vor kurzem bewußt gemacht haben, ist bei oberflächlich-utilitaristischer Betrachtung kein Mathematik-Unterricht für alle über das 7. Schuljahr hinaus erforderlich und könnte auch vorher noch eine Menge gestrichen werden.

Allerdings wären dann so gut wie alle derzeitigen Schul-Fächer noch weniger legitimiert, und wir könnten uns auf die Einführung der drei Kultur-Techniken 'Lesen',

'Schreiben', 'Rechnen' und eben der vierten: 'Computer-Bedienung' beschränken ("Internet-Führerschein" für alle 15jährigen", fordert ja die Enquete-Kommission). Dies trifft sich gut mit einer Losung moderner Bildungs-Politik, nämlich: Ausbildung von sog. Schlüssel-Qualifikationen wie Selbständigkeit, Eigen-Initiative, Analyse-, Kommunikations- und Team-Fähigkeit, Fähigkeit zu selbstbestimmtem Lernen (was Schule eigentlich schon immer möchte) auf Kosten des Lernens fachlicher Inhalte (des Pudels Kern, der die Losung insgesamt fragwürdig macht), weil diese ja sowieso bis zum Eintritt in den Beruf veraltet sein werden. Wenn man über die vierte Kultur-Technik verfügt, kann man dann ein Leben lang alles benötigte Wissen vom Internet abrufen. — Naive neue Welt à la Haefner.

Die allgemeinbildende Schule hat doch einen ganz anderen Auftrag, von dem eine, und dann auch nur grundlegende, *Berufs-Vorbereitung* nur ein kleiner Teil ist. Der Pythagoras-Satz wird nicht gelehrt, damit man ihn als Maurer anwendet, sondern man läßt die Lernenden erfahren, wie er im Prinzip auch durch einen Maurer und überhaupt angewendet werden kann. — Es geht vielmehr um bestimmte Denk- und Arbeits-Weisen, um Errungenschaften der menschlichen Kultur, speziell in der Mathematik: um räumliches, funktionales, algorithmisches, algebraisches, stochastisches, infinitesimales usw. Denken und geeignete Grund-Vorstellungen und -Verständnisse entlang mehr oder weniger kanonischem Stoff und dahinter, einzigartig in der menschlichen Kultur und daher unverzichtbar, die Eigenschaft als besonders reine, und zugleich universell anwendbare, Geistes-Wissenschaft, in der man auf Information und Meinungen anderer nicht angewiesen ist, sondern sich komplett auf die Kraft des eigenen Verstandes verlassen, mit dessen Hilfe argumentieren sowie Argumente anderer prüfen und analytisches Denken in idealer Form trainieren kann. — Selbstverständlich könnten auch viele Anwendungsfächer und -Bereiche in Studium und Berufs-Ausbildung erheblich profitieren, wenn der Mathematik-Unterricht das gerade Beschriebene einlösen würde. — Ich gehe sogar so weit, einen Nutzen eines im Mathematik-Unterricht gepflegten analytischen Denkens für das Alltags-Leben zu unterstellen (und ziehe bei der regelmäßig wiederholten Gegen-These vom fehlenden Transfer und deren empirischer Unterfütterung die Validität in Zweifel).

Die immer wieder geforderte Utilitarisierung des Bildungs-Systems, zu der ich auch den Ruf nach Schul- und Studienzeit-Verkürzung und der sog. 'Entrümpelung' der Curricula zähle, ist nicht angebracht, und zwar schon aus ökonomischen Gründen: Bei einem dauerhaften Bestand von über 4 Millionen offiziellen Arbeitslosen in Deutschland ist es geradezu kontraproduktiv, die jungen Menschen ein bis zwei Jahre früher als bisher auf den Arbeits-Markt zu entlassen. Einer kulturell und technisch hochstehenden Gesellschaft wie der unseren steht es außerdem gut an, ihrer Jugend eine gediegene Allgemein-Bildung angedeihen zu lassen, wozu Gewährung von *Muße* einerseits und Gewöhnung an *Leistung* andererseits gehören. Gebildete Menschen mit etwas Lebens-Erfahrung sind m.E. auf jedem Niveau nicht nur in ihrer *Arbeits-Zeit* nützlicher und tragen damit zur vielbeschworenen Konkurrenz-Fähigkeit unserer Wirtschaft bei, sondern sind auch auf ihre umfangreiche *Frei-Zeit* besser vorbereitet, was ihnen selbst und der ganzen Gemeinschaft mehr Lebens-Qualität bringt.

Ich unterstelle also im folgenden auch für die Zukunft einen Allgemeinbildungs-Auftrag von Schule und einen nennenswerten Anteil des Mathematik-Unterrichts. Weiterhin gehe ich davon aus, daß der reale Mathematik-Unterricht wenig erfolgreich ist, und zwar umso weniger, je höher die Schuljahre. Wer dies wissen wollte, konnte es schon immer wissen, hat es aber spätestens durch die TIMS-Studie

(Baumert, Lehmann u.a. 1997) erfahren (bei aller Kritik, die man an dieser üben kann). Den aus dem Vergleich der Video-Aufnahmen von deutschem und japanischem Mathematik-Unterricht herausgelesenen Vorsprung der Japaner in Sachen 'Problem-Orientierung' und 'Schüler-Beteiligung' führe ich (mit Fischer aus Erlangen, anderen Japan-Kennern und Japanern selbst) auf die höhere Wertschätzung zurück, die Bildung allgemein und die Mathematik im besonderen in der japanischen Gesellschaft genießen, und auf den in deren Gefolge höheren Energie- und Zeit-Einsatz, den japanische Schüler für die Schule allgemein und die Mathematik im besonderen aufbringen. Wo mehr Wissen und Können vorhanden ist, ist trivialerweise mehr Problem-Orientierung und Schüler-Beteiligung sowie besseres Lösen von TIMSS-Aufgaben möglich. Über geeignete Grundvorstellungen und -verständnisse oder sinnvollen Umgang mit Mathematik in der Breite sagt dies wenig aus.

In Deutschland haben wir da ein Südost-Nordwest-Gefälle: In Bayern und den neuen Bundesländern bestehen höhere Leistungs-Anforderungen mit regelmäßigen Haus-Aufgaben und deren Kontrollen, Wiederholungen, Kopf-Mathematik usw., die z.T. deutlich bessere TIMSS-Ergebnisse mit sich bringen. Ich wiederhole: Über geeignete Grundvorstellungen und -verständnisse oder sinnvollen Umgang mit Mathematik sagt dies wenig aus. In Hessen, Nordrhein-Westfalen und den Bundesländern nördlich und westlich davon wollte man an die Stelle einer so gesehenen bloß (und schlecht) funktionierenden Schule eine emanzipatorische (und allerdings zugleich sehr vereinnahmende) setzen und sie auf diesem Weg sinnvoller machen. Vorläufiger Höhepunkt dieser Bewegung ist die Denkschrift "Zukunft der Bildung — Bildung der Zukunft" (Bildungskommission NW 1995). Ihr Auftrag-Geber, das Schul-Ministerium in Nordrhein-Westfalen, war von dieser dermaßen angetan, daß es sie voreilig zur Grundlage seiner zukünftigen Bildungs-Politik erklärte, ohne die ignorierende bis ablehnende Reaktion vieler Angehöriger des Bildungs-Systems, die in letzter Zeit erfolgte kritische Auseinandersetzung mit dem Prinzip 'Gesamt-Schule' oder die TIMS-Studie abzuwarten.

Aus der Sicht des Fach-Didaktikers krankt diese Pädagogik an einem Zurückdrängen des Umfangs und der Bedeutung der Fach-Inhalte, so daß von daher z.B. der Mathematik-Unterricht bestimmt nicht sinnvoller wird. Als Schüler hatte ich mir zwar gewünscht, daß in Gemeinschafts-Kunde neben der Verfassung und dem Staats-Wesen der USA von 1774 auch aktuelle politische Fragen wie die Kuba-Krise u.ä. besprochen würden. — Wir sind seitdem auf der Welt bestimmt nicht ärmer an sog. "Schlüsselproblemen" wie "soziale Ungleichheit ..., Mehrheiten und Minderheiten, das Verhältnis der Geschlechter zueinander, 'entwickelte Länder' und 'Entwicklungsländer', Deutsche und Ausländer in Deutschland, ... Recht und Grenzen des Nationalitätsgedankens ..., die Konkurrenz der Kirchen und Glaubensgemeinschaften ..." (Bildungskommission NW 1995, 113) geworden, und diese sind in der allgemeinbildenden Schule wohl anzusprechen. Aber der Pädagoge Giesecke (1997) hat in seiner Auseinandersetzung mit Klafki, einem der Autoren der genannten Denkschrift, von mir wegen seiner "Didaktischen Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung" (Klafki 1958) von vor nunmehr 40 Jahren hochgeschätzter Allgemein-Didaktiker, mit Recht festgestellt, daß sowohl die *Erhebung* eines Problems zu einem "Schlüsselproblem", als auch dessen *Einschätzung* eine Sache der politischen Meinung und, auch wenn sie in der Schule diskutiert würden, nicht Lehr-Stoff seien. Giesecke (1996) fordert, daß die Schule gefälligst wieder ihrem eigentlichen Auftrag nachkommen und vor allem unterrichten solle.

Als Mathematik-Didaktiker kann ich das nur unterstreichen. Allerdings müßte zu einem Niveau an Wissen und Können, wie es in Japan oder Bayern vorhanden zu

sein scheint, doch noch eine Anreicherung mit Sinn treten. Dies meine ich in einem recht engen Sinn und denke dabei an das Konzept der fundamentalen Ideen quer zu den Inhalten, an Grund-Vorstellungen und -Verständnisse und an Anwendungen mit sichtbarem mathematischen Kern. Dieser Anreicherung stehen derzeit zwei große Hindernisse entgegen: Zum einen sind die Mathematik-Lehrer dafür unzureichend ausgebildet, da sie sich im Studium, auch in nicht-gymnasialen Studiengängen, überwiegend mit der Universitäts-Mathematik bzw. einer Verdünnung davon beschäftigen. Zum zweiten müßte ein fach-didaktischer Ruck durch unsere Schulen gehen, für den das erforderliche Potential in Gesellschaft und Schule nach meinem Dafürhalten durchaus vorhanden wäre, von dem sich aber weit und breit nichts andeutet.

Die stattdessen herrschende Pädagogik setzt auf ein idealistisches Bild von dem, was junge Menschen, die noch nichts anderes als unsere Unterhaltungs-Gesellschaft (bzw. in den neuen Bundesländern deren Durchsetzung) erlebt haben, von sich aus interessiert und was sie ohne Verbindlichkeit oder unmittelbaren Nutzen zu leisten bereit sind. Von einem Interesse- und Leistungs-Potential bei unserer Jugend bin ich ebenfalls fest überzeugt, aber um es in erfolgreichen Unterricht umzusetzen, bedarf es m.E. eines Stils, wie ihn der pädagogische Psychologe Weinert (1996) aufgrund seiner umfangreichen Feld-Studien als günstig beschreibt: "Während viele 'neue Lerntheorien' die Bedeutung der intrinsischen Motivation und die aktive, konstruktive und selbständige Rolle des Lernenden betonen und dem Lehrenden nur noch eine anregende, beratende und moderierende Funktion zuschreiben, zeigen praktisch alle verfügbaren Unterrichtsstudien die Wichtigkeit einer lehrergesteuerten, aufgabenorientierten und effektiven Instruktion".

Eine dieser Studien ist übrigens der breit angelegte Langzeit-Vergleich zwischen englischem und deutschem Mathematik-Unterricht auf der Sekundarstufe, der auf deutscher Seite von Blum und Kaiser in Kassel betreut wurde (s. Kaiser 1996). Dabei hat sich die stärkere Lehrer-Zentrierung in Deutschland als erfolgreicher erwiesen, und die englischen Kollegen wollen (gemäß einer mündlichen Mitteilung von Werner Blum) die Konsequenz daraus ziehen, in dieser Beziehung den englischen Unterrichts-Stil ein wenig dem deutschen anzugleichen (soweit so etwas möglich ist). Dagegen sind die umgekehrten "Konsequenzen", die meine Freundin Gabriele Kaiser (S. 34f) merkwürdigerweise "für den deutschen Mathematikunterricht" vorschlägt, nicht nachvollziehbar, da sie dem Bericht, den sie selbst (bis S. 34) liefert, geradezu diametral zuwiderlaufen.

Natürlich kann man bei Weinerts Aussage sofort hinterfragen, was da unter 'Erfolg' verstanden wird; wenn er z.B. gerade den Verzicht auf Steuerung bedeuten soll, läuft Weinerts Aussage leer. — Mir erscheint sie aber hochplausibel.

Könnte der Computer hier eine grundlegende Änderung herbeiführen? — Die Erfahrungs-Berichte sprechen eher dagegen. Je stärker die Arbeit mit dem Computer in den 'normalen' Unterricht integriert wird, umso stärker färbt dieser mit allen seinen Erscheinungen auf jene ab. Auf jeden Fall wird das Unterrichten komplexer. Ebenso wird die Didaktik komplexer. Dies gilt besonders für die Mathematik-Didaktik (die ja zunächst vornehmlich zuständig war). Es kommen neue Bezugs-Disziplinen hinzu wie Informatik oder Medien-Wissenschaft, und die Verbindungs-Kanäle zu alten Bezugs-Disziplinen wie Psychologie, Soziologie, Pädagogik werden vermehrt und vertieft. Entsprechend vervielfachen sich die Möglichkeiten, Einseitigkeiten der eingangs angeführten Arten zu unterliegen, und *neue* tun sich auf.

3. Das Erfordernis eines computer-einbeziehenden Gesamt-Curriculums

Allerdings hat es da in der Mathematik-Didaktik schon deutliche Fortschritte gegeben. Z.B. tritt, zumindest in unserer deutsch-sprachigen Kommunität, eigentlich niemand mehr ernsthaft auf, der uns zeigt, welche schönen Aktivitäten man alle mit dem Computer durchführen kann, und auf dieser Basis eine Ersetzung des klassischen Schul-Stoffs durch diese Aktivitäten fordert. — Selbstverständlich geht es nicht nur um methodisch-didaktische Verbesserung geläufiger Inhalte, sondern sehr wohl um Neues, aber eben doch verankert im herkömmlichen Auftrag der allgemeinbildenden Schule und der herkömmlichen Mathematik-Didaktik, natürlich in deren ganzer Breite (s. z.B. Weigand 1995). Dieser Fortschritt ist wesentlich dem Arbeitskreis 'Mathematikunterricht und Informatik' in der GDM und seinem Vorsitzenden Horst Hischer (s. die Tagungs-Bände: Hischer 1992ff) mit zu verdanken.

Sehr früh und immer wieder hat Schumann (z.B. 1991, insbesondere 251ff, u.v.a.) auf diese Verankerung gepocht, konkrete methodisch-didaktische Fragen aufgeworfen und mit dem Computer zu beantworten versucht. Leider wurden seine Überlegungen kaum fortgeführt; vielmehr dominieren nach wie vor Darstellungen der inhaltlichen und technischen Möglichkeiten der jeweiligen Software, wie gesagt, durchaus mit erkennbarem Bezug zum realen Mathematik-Unterricht und oft mit realen Schülern ausprobiert. — Einen Schritt in die richtige Richtung hat kürzlich Hole mit seinem breiter angelegten Buch für die Sekundarstufe I (Hole 1998) getan.

Was aber nach wie vor fehlt, ist, daß einmal jemand ein komplettes *Curriculum* aufstellt, sagen wir: zunächst für den *Geometrie-Unterricht* vom 1. bis zum 10. Schuljahr, ein überschaubares Gebiet, das man zwar mit vielen Bezügen zum restlichen Mathematik-Unterricht und zu anderen Fächern, aber letztlich doch autark behandeln kann. Ich denke da an eine Integration von computer-haltigen und computerlosen Aktivitäten. Allerdings meine ich nicht lediglich eine Aufzählung, was in welcher fachlichen Reihenfolge mit bzw. ohne Computer zu behandeln ist, sondern etwas, was man sich entfernt wie das Schreiben eines Schulbuchs vorstellen muß, jedoch viel schwieriger und aufwendiger: Bis heute haben ja Schulbuch-Autoren einen jahrzehnte-lang entwickelten Kanon von Inhalten, didaktische Analysen von Zielen, Ideen, Anwendungen usw., *eigene* Erfahrungen, *Erfahrungs-Berichte* und empirische Untersuchungen aller Art, ein ausgefeiltes Methoden-Instrumentarium, recht genaue Vorgaben durch Richtlinien, Lehrpläne und Erlasse sowie die gängigen Konkurrenz-Werke zur Verfügung. Auch wenn sie hie und da neue Ideen einbringen möchten, so ist ihnen doch, ob sie wollen oder nicht, eine bewährte Struktur vorgegeben, in die sie diese Ideen einzubetten haben. Das war zur Zeit der Neuen Mathematik so und ist auch z.B. im Dortmunder Projekt "mathe 2000" so.

Die Computer-Didaktiker haben es da nicht so einfach (ich bitte hier und im folgenden um Verständnis für meinen Sprach-Gebrauch '*die* Computer-Didaktiker', da ich über keine bessere Wendung verfüge, die, wie in einer politischen Partei, eine grundsätzliche Übereinkunft in der Kollegen-Szene und zugleich deren Komplexität angemessen wiedergäbe): Ihnen geht es nicht nur um methodische Anreicherungen des herkömmlichen Mathematik-Unterrichts (wobei für mich z.B. die graphischen Möglichkeiten, die der Computer insbesondere in der Funktionen-Lehre an herkömmlichem Stoff eröffnet, nicht bloß methodische Feinheiten, sondern ein starkes

begrifflich-didaktisches Potential darstellen), sondern verstärkt auch um neue Inhalte, neue Ziele, neue Methoden. (Dieser Anspruch erscheint mir plausibel, da sonst der ganze Aufwand in Didaktik und Unterricht nicht zu rechtfertigen wäre.)

Nach meinen Vorstellungen müßte in diesem Curriculum nicht jeder Lern-Schritt im einzelnen ausgetüfelt werden; stattdessen müßten viel intensiver Alternativen diskutiert werden. Man bräuchte mehr explizite Begründungen (wegen des Neuigkeits-Charakters); die medialen Bedingungen müßten ständig mit bedacht werden; dabei müßte dauernd kontrolliert werden, was der Computer wirklich zur Begriffs-Bildung, zu den Lern-Prozessen, zum genuinen Geometrie-Treiben beiträgt (z.B. hat er unübersehbar und unbestritten Schwächen beim *flexiblen* Umgang mit Drei-Dimensionalität, mit Einbettungen in die Realität, mit dem Beweisen), wie er diese zentralen Unterrichts-Kategorien verändert und welche zusätzlichen Schwierigkeiten er mit sich bringt (Zeit-Aufwand, schwerfällige Objekt-Hierarchien bei den geometrischen Konstruktionen, Bully-Effekt, d.h. Verlust von Kontemplativität, usw.).

Da wäre harte, langwierige Kärner-Arbeit in einem größeren Team erforderlich. In weiten Teilen würde Neuland betreten. — Wer würde ein solches Projekt finanzieren, das zunächst nur für die didaktische Diskussion und noch lange nicht für die Realisierung in der Schule bestimmt sein könnte? Hätten die Kollegen, die die Computer-Didaktik hauptsächlich tragen, überhaupt die Kapazität für ein solches Projekt? Solange sie noch keine Dauer-Stelle haben, müssen sie rasch viel publizieren, und danach sind sie in den Wissenschafts-Betrieb eingebunden und müssen sich als Experten dauernd zu aktuellen Fragen äußern (eine Eigenart der Computerei ist ja der rasche Innovations- und Veraltungs-Wechsel, auf den die Informatik zwar stolz ist, der insofern aber ihren Bildungs-Gehalt gerade in Frage stellt). Außerdem scheint für den einen oder anderen jüngeren Kollegen die Mathematik-Didaktik sowieso erst mit dem Computer zu beginnen (was ihm zwar Selbstbewußtsein verschafft, aber ihm die Arbeit unnötig erschwert), und die Hochschätzung der modernen Paradigmen, von denen ich einige zu Beginn mit gewissen ihrer Fehl-Entwicklungen dargestellt habe, korrespondiert mit einer Geringschätzung der stoff-bezogenen Didaktik.

In der Tat stimmt Schupps griffige Formel, nämlich "der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen" (Schupp 1994, 70), nur tendenziell. Schon immer haben einzelne Kollegen sehr deutlich den Finger auf mathematik-didaktische Wunden gelegt, z.B. Andelfinger (1990) am real existierenden Analysis-Unterricht, Bender (1982) am Konzept der Abbildungs-Geometrie u.a. Schupps Formel müßte dahingehend modifiziert werden, daß der Computer eigentlich auch den *Mainstream* der Mathematik-Didaktik dazu bringen müßte, in seinen Arbeiten den notorischen Miß-Erfolg des Mathematik-Unterrichts in den Sekundarstufen zur Kenntnis zu nehmen und gezielt zu beseitigen zu versuchen.

4. Einige didaktische Aspekte von DGS

Jedenfalls gibt es ein solches Geometrie-Curriculum trotz nunmehr zehnjähriger Existenz von DGS und zahlreichen didaktischen Analysen dazu bis heute noch nicht, zumindest nicht in der Öffentlichkeit, so daß es diskutiert werden könnte. Es

wäre aber dringend erforderlich. Wir verfügen inzwischen über einen Fundus an geometrischen Aufgaben, die auf die Nutzung von DGS zugeschnitten sind bzw. bei deren Lösung die Verwendung von DGS als nützlich unterstellt wird, an denen sich, je nach dem, Problemlöse-Fähigkeit, Kreativität, selbständiges Arbeiten, Team-Fähigkeit zeigen oder ausbilden sollen und über deren Bearbeitung durch Schüler oder Studenten mehr oder weniger detaillierte und nachvollziehbare Analysen existieren (Hölzl 1994 mit durchaus (selbst-) kritischen Elementen, s.a. in Hischer 1997, 1998 u.a.). Um aber einen flächen-deckenden Einsatz von DGS in der Schule wirklich in Angriff zu nehmen, liegen allerdings viel zu wenige, und vor allem: viel zu wenige positive und überzeugende Erfahrungen zu DGS-Unterricht unter einigermaßen 'normalen' Bedingungen vor.

Auch das Wesen und die Bedeutung der von mir aufgezählten (und weiterer) inhalts-übergreifenden Fähigkeiten, Ziele u.ä. müßten diskutiert werden (hierauf trifft Schupps Spruch m.E. erst richtig zu). Z.B. vermeide ich gern die Rede von Kreativität, weil dieser Begriff in der Mathematik-Didaktik inflationär gebraucht wird und ich in meiner Schul-Zeit, im Studium und im Berufs-Leben in Mathematik sehr selten wirkliche Kreativität, durchaus relativ zu den jeweiligen persönlichen Voraussetzungen gesehen, erlebt habe, und spreche lieber von Einfalls- oder Ideen-Reichtum. Auch mein Freund Thomas Weth, der über "Begriffsbildung als kreatives Tun im Mathematikunterricht" habilitiert hat, teilt eigentlich meinen engen Kreativitäts-Begriff, und er benötigt — erklärtermaßen — eine weitgehende definitorische Aufweichung (Weth 1997, 82), um ihm didaktische Relevanz zu verleihen und ihn auf vom Lehrer angeregte und vor-strukturierte Schüler-Aktivitäten mit dem Computer münzen zu können (Weth 1998).

Als Liebhaber der Geometrie bin ich von vielen der technischen Möglichkeiten von DGS (Zug-Modus, Makro-Technik, Orts-Linien, Messungen, Lay-Out) und von manchen auch für mich neuen Aufgaben-Stellungen angetan. In ihrer Essenz werden die Lösungen zwar nur selten direkt mittels DGS-Aktivitäten geliefert; aber der Computer hat die Elementargeometrie-Szene in Sachen 'klassisches Konstruieren und Beweisen' zumindest dadurch belebt, daß er die Kollegen angeregt hat. Ob er diesen Effekt bei diesen Themen ohne deutliche Lehrer-Lenkung auch bei Schülern hat, muß jedoch bezweifelt werden. Unabhängig von solchen Einwänden möchte ich mich aber einer meiner Studentinnen mit folgendem Argument anschließen: Mit DGS treten neuartige Phänomene in der Zeichen-Ebene auf, und der Umgang damit bietet den Schülern eine Erweiterung ihres *Erfahrungs*-Horizonts. Diese Erfahrungen sollte man ihnen ermöglichen.

Allerdings sind sie mit einer *selbständigen* wirklichen Durchdringung nach wie vor überfordert. — Nehmen wir einmal folgende schöne Aufgabe meines Freundes Rolf Neveling (1997):

Man bewegt sich auf einer Straße (Gerade) und sieht eine Häuser-Zeile (Strecke AB *innerhalb* einer Halb-Ebene bezüglich der Straße). An welchem Punkt X erscheint die Häuser-Zeile unter maximalem Winkel? Mit DGS hat man diese Aufgabe sofort erledigt, indem man seinen Blick-Winkel einzeichnet und ihn während der Wanderung auf der Straße quasi stetig ändert und ständig mißt. — Natürlich ist nicht diese triviale 'Lösung' mit der Aufgabe gemeint. Dafür bräuchte man keinen Geometrie-Unterricht. Allerdings sind in der Anfangs-Zeit der Didaktisierung des Computers durchaus Naivlinge aufgetreten, die u.a. den Geometrie-Unterricht abschaffen wollten, und zwar genau weil solche Aufgaben durch Probieren mit hinreichender Genauigkeit 'gelöst' werden können. — Evident geht es aber um eine

Konstruktion des Punkts im *klassischen Stil*, und zwar nicht um den Punkt, sondern um die Konstruktion, um das Gefüge der passenden Sätze.

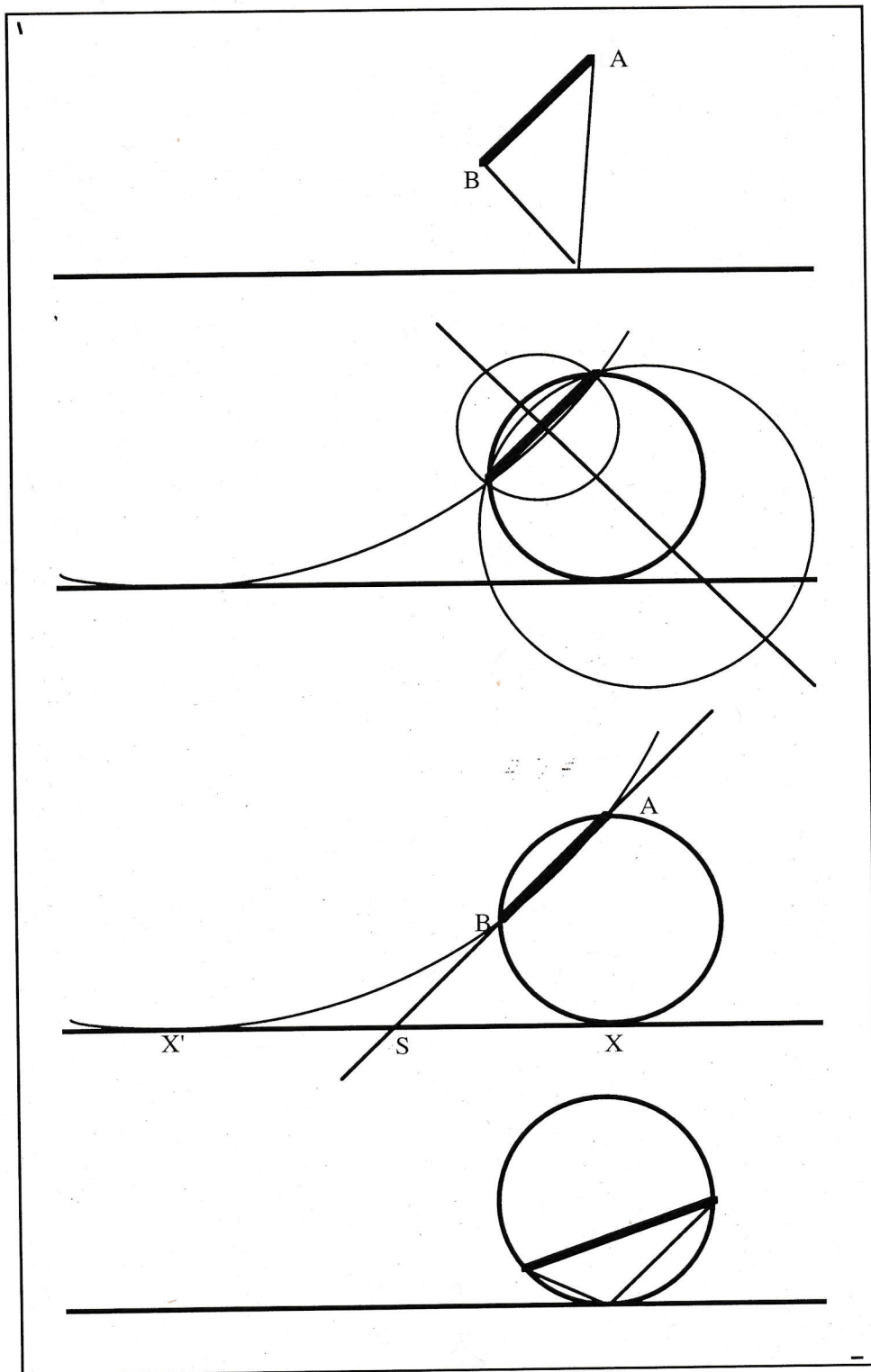


Abb.: Häuser-Zeile, unter größt-möglichem Blick-Winkel von der Straße aus gesehen

Wenn eine Strecke unter einem bestimmten Winkel gesehen werden soll, ist gewiß der Begriff des Faß-Kreises involviert. Allerdings bleibt der Winkel gerade nicht konstant, also muß man eine Abfolge von Faßkreis-Bögen betrachten, alle über derselben Strecke (der Häuser-Zeile). Dies läuft auf die Umkehrung des Umfangswinkel-Satzes hinaus: Je kleiner der Bogen, desto größer der Winkel. Man braucht die Mittel-Senkrechte zur Häuser-Zeile als Orts-Linie aller deren Faßkreis-Mittelpunkte. Man läßt die Mittelpunkte auf der Mittel-Senkrechte laufen, bis der kürzeste unter allen denjenigen Faßkreis-Bögen erreicht ist, die mit der Straße Punkte gemeinsam haben. Es ist gerade der (eindeutig bestimmte) Mittelpunkt desjenigen Faß-Kreises, der die Straße *berührt* (egal, ob es sich um den längeren oder kürzeren Bogen handelt, ob der Blick-Winkel also spitz oder stumpf ist).

Solche Überlegungen mit stetigen Veränderungen stehen in einer langen geometrie-didaktischen Tradition (zuletzt Bender 1989; s.a. Kautschitsch in diesem Band). Es handelt sich um mathematisch voll-gültige Argumente, die sich ohne große Mühe aus einem Axiomen-System wie dem Hilbertschen ableiten lassen. Früher mußte man sie (abgesehen von sehr aufwendig zu produzierenden und unflexibel einzusetzenden Film-Sequenzen oder sonstigen maschinen-artigen Vorrichtungen) sich *vorstellen* bzw. in *diskreten* Bild-Folgen darstellen. Diese Beschränkungen hatten ihre Vorzüge: Man war zum *Vorstellen* gezwungen, hatte die einzelnen Bilder als Anker-Punkte für die Fokussierung der Aufmerksamkeit und hatte dabei eine gewisse Mühe zum Reflektieren. Ich möchte die technisch weit überlegenen Möglichkeiten von DGS nicht missen, gebe aber zu bedenken, daß diese die Vorstellungskraft behindern könnten und mit dem Bully-Effekt Mühe und Reflexion stören könnten. Mit diesen Bedenken ist Forschungs-Bedarf signalisiert. Es gibt zwar Ansätze (z.B. Lewalter 1997), aber angesichts der eingangs erörterten Probleme und Mängel bin ich skeptisch, ob dieser Bedarf bei diesen (und vielen anderen computer-einbeziehenden oder -abstinenten) Fragen befriedigt werden wird. Wir werden uns nach wie vor auf Plausibilitäts-Überlegungen stützen müssen, flankiert von Beobachtungen und sonstigen Erfahrungen, durchaus auch in Form von Fall-Studien, z.B. Interaktions-Analysen.

Zurück zur Aufgabe: Der gesuchte Punkt auf der Straße ist noch nicht konstruiert. Bis jetzt hat man nur eine Plan-Figur, die man mit DGS natürlich viel bequemer und genauer skizzieren kann als mit dem Bleistift auf Papier. Wenn einem der Tangenten-Sekanten-Satz bekannt ist und nun einfällt, dann verlängert man die Häuser-Zeile bis zur Straße, erhält den Schnitt-Punkt S , und kann nun X über die Gleichung $l(SA) \cdot l(SB) = l^2(SX)$ mittels Katheten- und Thales-Satz bestimmen.

Man könnte nun noch einen zweiten Punkt X' (der ebenfalls diese Gleichung erfüllt) auf der Geraden auf der anderen Seite von S abtragen, bekäme einen zweiten Faßkreis-Bogen durch A und B , der die Gerade berührt, und dieser Punkt X' wäre eine zweite (lokale) Maximal-Stelle für den Blick-Winkel. — Ist eigentlich immer klar, welcher der beiden Punkte X und X' das absolute Maximum liefern? — Die Erforschung dieser und anderer Zusammenhänge durch den *fortgeschrittenen* Löser kann durchaus mit DGS unterstützt werden, z.B. durch Erfahrungen mit Scharen von Faß-Kreisen über derselben Strecke (wenn sich der Mittelpunkt in eine der beiden Richtungen von der Strecke weg bewegt, wird der Kreis riesen-groß).

Bei Neveling sollte sich DGS aber in einem anderen Stadium der Aufgaben-Lösung nützlich machen, nämlich ganz am Anfang die Abfolge der Faß-Kreise und die Grenz-Lage optisch unterstützen bzw. den Einfall auslösen, diese zu betrachten. — Auch bei vielen anderen Beispielen wird der Einsatz des Computers mit dieser an-

regenden Funktion gerechtfertigt: Die Schüler sollen *selbständig* geometrische Situationen auf dem Bildschirm entwerfen oder wenigstens variieren und dabei genau beobachten. Wenn sie eine Regelmäßigkeit feststellen, sollen sie einen Satz o.ä. vermuten und diesen dann beweisen. In der Tat bieten DGS die Möglichkeit, ohne großen Aufwand in kurzer Zeit in sauberer Weise viele Varianten der Ausgangssituation zu betrachten. Sie haben zudem den Vorzug, etwa gegenüber den Geometric Supposers alten Stils (Schwartz & Yerushalmy 1985), als *stetige* Veränderungen zu erscheinen, eine wichtige Voraussetzung, um durch bloßes Hinsehen überhaupt Gesetzmäßigkeiten zu erkennen.

Sträßer (1991, zitiert nach Hölzl 1994) erhofft sich, daß bei sorgfältigem Vorgehen die Schüler nicht mehr eine einzelne Zeichnung, sondern die abstrakte Figur als Klasse von Zeichnungen in den Blick nehmen und dadurch den alten geometrie-didaktischen Konflikt auflösen, daß die Zeichnung mit all ihren realen Unsauberkeiten und speziellen Eigenschaften für die ideale, allgemeine Figur genommen wird. Ich fürchte, daß dieser epistemologische Fortschritt in aller Regel nicht eintritt, sondern daß nach wie vor, und infolge des eindrucksvollen Computer-Bilds erst recht, lediglich die Zeichnung gesehen wird, die sich eben im Zeit-Ablauf verändert.

Mein Freund Rudolf Sträßer (1997, 53) erwartet sogar "Veränderungen der Geometrie beim Einsatz von DGS" (natürlich erst recht des "Geometrie-Verständnisses"). Allerdings legt er einen sehr engen Begriff von Geometrie zugrunde, nämlich die *klassische* reine Zirkel-und-Lineal-Konstruktions-Geometrie. Diese wird jedoch schon seit über hundert Jahren als ausschließliche Schul-Geometrie von der Didaktik in Frage gestellt (s. Bender 1982) und kommt seit langem in der Schule nur noch mehr oder weniger rudimentär vor. Abweichungen von der 'reinen Lehre', wie z.B. die Aufnahme des Messens u.v.a., haben eine lange Tradition und würden in einer 'DGS-Geometrie' lediglich fortgesetzt. — Ich stimme daher Holland (1997) zu, der darauf beharrt, daß die Geometrie, inklusive des (anzustrebenden) "Verständnisses", natürlich dieselbe bleibt, nämlich die euklidische.

5. Einige Bemerkungen zum Beitrag des Computers zur formalen Bildung

Auch die Hoffnung auf selbständiges Arbeiten muß meiner Meinung nach zurückgeschraubt werden, wie fast alle Erfahrungen bisher mit Schüler-Aktivitäten mit DGS zeigen, wie z.B. Hölzl (1994) einräumt oder Kadunz, der Schöpfer der DGS 'Thales', bei eigenen Unterrichts-Versuchen festgestellt hat. Schon gar nicht setzen sich '*die*' Schüler an den Computer und erschließen sich eigenständig geometrische Mikro-Welten (eine Illusion, die sogar die Logo-Gemeinde schon lange aufgegeben hat). Aber auch wenn der Lehrer die Mikro-Welt in Form einer geometrischen Situation und Aufgaben-Stellung vorgibt, so geht es häufig noch lange nicht mit dem planvollen Experimentieren und entdeckenden Lernen los. Vielmehr sind dann immer noch recht genaue Angaben erforderlich, wie die Schüler beim Verändern vorgehen und was sie dabei überhaupt beobachten sollen (vgl. auch Elschenbroich 1997). Etwas pointiert ausgedrückt: Von der *kompletten* Vorgabe des Ergebnisses durch den Lehrer unterscheiden sich diese Aktivitäten irgendwann nur noch wie das Ausfüllen eines Lücken-Textes von der Kenntnisnahme des vollständigen Textes.

Man muß in diesem Zusammenhang auch vorsichtig mit der Rede von einer Interaktion (mit dem Computer) sein. Mit dem informatischen Begriff von interaktiver Software wird lediglich zum Ausdruck gebracht, daß nach einer Eingabe so schnell eine Veränderung am Bildschirm stattfindet und Bereitschaft für die nächste Eingabe hergestellt wird, daß der Bediener so gut wie keine zeitliche Verzögerung feststellen kann. Mit der Wort-Wahl hat die Informatik eine naheliegende Anleihe bei der Soziologie gemacht; aber es ist m.E. verfehlt, diese nun wieder soziologisch oder gar pädagogisch zu wenden. Das Bedienen einer Maschine ist keine Interaktion mit einem autonomen Gegenüber, auch wenn die Maschine oft ein unerwartetes Verhalten zeigt.

Interaktion wäre z.B. mit einem Mit-Schüler möglich. Allerdings kann auch Partner-Arbeit recht unbefriedigend werden. Mit dieser wird ja zunächst einmal aus der Not, daß man zu wenige Geräte bzw. zu wenig Platz für die inzwischen wieder zunehmend auftretenden Klassen-Stärken von 35 und mehr hätte, die Tugend gemacht, daß man die Schlüssel-Qualifikationen der Team- und der Kommunikations-Fähigkeit und das gemeinsame Lernen fördern möchte. Dabei können durchaus ergiebige Dialoge entstehen. Vom Hofe (1998) hat einen solchen zwischen zwei Schülerinnen dokumentiert: Dabei ging es um eine Differenzenquotienten-Folge, deren Glieder die beiden im Laufe ihres Gespräches mit Hilfe eines CAS bei Bedarf auswerteten. Ohne den Computer, der immer wieder die Möglichkeit bot, den flüchtigen Überlegungen und Worten mit entsprechenden Eingaben Gestalt zu geben und die Diskussion voranzubringen, wäre diese Interaktion so nicht möglich gewesen. Der Computer war darüber hinaus sehr nützlich für die Dokumentation und Interpretation; und vom Hofe hat hier ein schönes Beispiel einer interpretativen Unterrichts-Analyse geliefert, in die die stoff-didaktischen Grundlagen integriert sind. Allerdings: Ob die beiden Schülerinnen der involvierten Begrifflichkeit, auch nach der Hilfe-Stellung durch eine dritte Schülerin, nähergekommen sind, ist eher fraglich.

Wir kennen *auch* die klassische Analyse von Krummheuer (1989), in der es sich bei der Gruppen-Arbeit am Computer immer wieder um Aktionismus handelte (woran bestimmt nicht die verwendete Programmier-Sprache 'Basic' schuld war). Unabhängig vom Computer möchte ich die Vorzüge des Gruppenarbeits-Prinzips ein wenig relativieren. Es wird ja unter anderem mit der im Berufs-Leben erforderlichen Schlüssel-Qualifikation der Team-Fähigkeit gerechtfertigt. Tatsächlich bedeutet diese im Erwerbs-Leben außerhalb des Bildungs-Systems etwas anderes, als sich viele Angehörige dieses Systems vorstellen. Dort bestehen, zum Zwecke der genau abgrenzbaren Verantwortlichkeiten, durchweg ausgesprochen hierarchische Strukturen (im real existierenden Sozialismus war das übrigens nicht anders); und Team-Fähigkeit heißt, sich in ein Team *unter dem Team-Leiter* einzufügen.

Man weiß in unserer Kommunität zu wenig über die sozialen und kognitiven Prozesse, die in solchen Zusammenarbeiten ablaufen. Wir haben da meistens die Idylle vor Augen wie in der vom Hofeschen Sequenz. Aber Zusammenarbeit bringt auch immer wieder eine Störung der Konzentration und des Nachdenkens mit sich, besonders wenn Wissen und Können ungleichmäßig verteilt oder in zu geringem Maß vorhanden sind. Da kann es dem Besseren leicht lästig werden, wenn er laufend dem Schwächeren 'helfen' muß, was diesem vielleicht auch unangenehm wird, und die Hilfe wird dann gern so gegeben, daß die jeweilige Aufgabe gleich komplett erledigt wird, ohne daß der Schwächere die Chance zum Verstehen hat, wie Vollmer (1997) in ihren Untersuchungen festgestellt hat. Es sei dahingestellt, ob diese Art der anti-didaktischen Hilfe vom Unmut, von einem Streben nach Ökonomie oder

von der fehlenden didaktischen Ausbildung herrührt. Jedenfalls bleibt die Verantwortung für die Lehr-Prozesse beim Lehrer, dem studierten Fachmann, auch wenn 'die' Schüler vielleicht das Betriebs-System der Computer-Anlage besser kennen als er. — In diesem Zusammenhang erschien mir die Schilderung von Wilding (in diesem Band) aufschlußreich, wonach seine Schüler — nachdem sie die ganze Zeit im Mathematik-Unterricht in Teams am Computer gearbeitet hatten und auch noch ihr Examen in Teams ablegen sollten — darum baten, wenigstens teilweise einzeln geprüft zu werden.

Für eine gedeihliche Arbeit mit dem Computer benötigt m.E. jeder Schüler, sagen wir: ab Klasse 7, einen eigenen Bildschirm, mit der trivialen Option der Zusammenarbeit mit anderen. Das Teure dabei sind nicht die Prozessoren, sondern die Bildschirme, bei denen man leider keinen größeren Preis-Verfall beobachten kann, die Installation und die langfristige Wartung, die Anschaffung der Geräte für jeden Schüler zu Hause, vor allem aber die erforderlichen baulichen Maßnahmen, um einigermaßen die ergonomischen Standards der Industrie, übertragen auf die Schul-Situation, zu erfüllen. Da kommt man auf Größen-Ordnungen von 100 Milliarden (DM in Deutschland, ÖS in Österreich).

Ich verkenne nicht, daß beim Einsatz des Computers i.a. mehr Schüler in irgendeiner Weise aktiv sind als in den verbreiteten Unterrichts-Formen ohne Computer. Auch die Zusammenarbeit mit anderen Schülern dürfte dem Aktivsein förderlich sein. Und (ganz ohne Ironie) diese Schüler-Aktivitäten haben für sich genommen durchaus einen pädagogischen und sozialen Wert. Aber mit Heinz Griesel muß angesichts von besonderen Inhalten und Unterrichts-Formen, wie sie ja in der Computer-Didaktik laufend vorgestellt werden, immer wieder gefragt werden: Was lernen die Schüler dabei? — Man sollte in Sachen 'Motivation' und 'Selbständigkeit' eher bescheidene Erwartungen an die Schüler richten. Deren Situation unterscheidet sich grundsätzlich von der eines erfolgreichen Berufs-Wissenschaftlers. Jener hat ein existentielles Problem-Bewußtsein sowie Erkenntnis- und Verwertungs-Interesse, verfügt über umfangreiche Erfahrung und Literatur-Kenntnis und ist auf dem Stand der Diskussion (abgesehen von singulären genialischen Ausnahmen in den Anfangs-Zeiten der jeweiligen Wissenschaften). Die Schüler dagegen *sollen* Ergebnisse produzieren, die zudem längst bekannt sind, insbesondere dem Lehrer, jedenfalls im Prinzip. Sie haben daher eine ganz andere Bewußtseins-Lage und außerdem viel weniger Zeit und Erfahrung, als die Menschheit bis zur Findung der jeweiligen Erkenntnis hatte. Daher kommt der Lehrer nicht umhin, seinen Unterricht sehr genau vorzubereiten, zumal wenn er konstruktivistischem Gedanken-Gut anhängt und einen *direkten* Einfluß auf die Lern-Prozesse der Schüler verneint.

Wenn dann die Schüler in einem derart abgesteckten Rahmen selbständig arbeiten, Entdeckungen machen und Einfalls-Reichtum an den Tag legen sollen, so benötigen sie breites Wissen, Können und Erfahrungen, ehe sie die schönen anspruchsvollen Probleme oder gar Projekte erfolgreich angehen können. — Das Fach Informatik in unserem Fachbereich in Paderborn hat aufgrund einer Lehr-Evaluation zwar sein Haupt-Studium noch stärker auf Projekt-Arbeit ausgerichtet, aber davor ein Grund-Studium gesetzt, in dem kein einziges Projekt vorkommt, sondern breites fachliches Wissen bereitgestellt, tiefes fachliches Können ausgebildet und umfangreiche fachliche Erfahrungen mit den Begriffen der Informatik ermöglicht werden. Vom Allgemeinbildungs-Auftrag der Schule her versteht sich von selbst, daß in ihr der Primat der Grund-Bildung noch viel ausgeprägter zu sein hat.

So wie die deutsche Bundes-Marine heute noch ihre angehenden Offiziere z.T. auf einem Segel-Schulschiff ausbildet, muß diese Grund-Bildung in Geometrie, Arithmetik, Funktionen-Lehre, Algebra, Stochastik über weite Strecken zunächst einmal zu Fuß erfolgen. Über dieses Prinzip besteht wohl Einvernehmen; lediglich der Umfang des computer-losen Unterrichts ist strittig. Insbesondere in der Geometrie sind intensive kinästhetische Erfahrungen bei der Herstellung (inklusive Zeichnen) geometrischer Objekte zu ermöglichen, die der Computer gerade nicht bietet. Zugleich könnte aber auch schon bei der Formierung von Grund-Vorstellungen und -Verständnissen Computer-Unterstützung hilfreich sein, in der Geometrie z.B., wie schon wiederholt vorgetragen, beim klassischen Abbildungs-Begriff, wenn man ihn denn behandeln möchte: Da benötigt man nämlich auf dem Bildschirm keine (vorgestellten) physikalischen Bewegungen zwischen Urbild und Bild einer Figur, die ja sonst das schier unüberwindliche Haupt-Hindernis bei der Begriffs-Bildung erzeugen. Und man kann funktionale Abhängigkeiten visualisieren, daß es eine wahre Freude ist (dies natürlich auch ganz ohne Abbildungs-Geometrie, und außerdem in vielen anderen Bereichen). Dies sind einige der vorhin angesprochenen Erfahrungen, die den Schülern zusätzlich zu denen in der realen Welt ermöglicht werden sollten.

Gewiß wird sich das Geometrie-Curriculum bei der Verwendung von DGS insgesamt ändern, aber bestimmt nicht aufgrund der Trivialisierungs-Funktion des Computers. Zunächst einmal halte ich es mit Löthes (1992, 21) Feststellung, daß der Computer ("informatische Methoden") "nichts trivialisiert, was nicht schon vorher mathematisch trivial war". Zu denken ist da an die schriftlichen Rechen-Verfahren, algebraische Umformungen, Kurven-Diskussion u.ä. Schon in der computer-losen Mathematik-Didaktik sind diese Aktivitäten kritisiert worden, wenn und insoweit sie umfangreiche sinn-leere Beschäftigungen darstellten. Daß jemand anders (etwa der Computer) diese schneller und sicherer verrichten kann, war und ist eigentlich ein minderes Argument. Es geht doch um ganz andere Ziele. Gerade kürzlich hat Bauer (1998) ein Plädoyer für die schriftlichen Rechen-Verfahren gehalten, und seine Argumente sind cum grano salis auf andere mathematische Gebiete zu übertragen. Hier ist mir wichtig, daß die Schüler — wie die Marine-Offiziersanwärter auf dem Segel-Schulschiff — ihr Handwerks-Zeug erst einmal kennenlernen, es in guter didaktischer Manier operativ durcharbeiten, Sicherheit darin erwerben und Erfahrungen damit sammeln, ehe sie es für höhere Aufgaben an den Computer delegieren. Nur auf der Basis dieser sog. trivialen Aktivitäten sind — auch stärkere — Schüler zu höheren Aktivitäten wie Modellieren, Mathematisieren, Interpretieren usw. in der Lage. Sie liefern ihnen den intellektuellen Anlauf und eine epistemologische Struktur für diese und sind Voraussetzung für eine verständige Benutzung des Computers.

An der Geometrie ist diese Trivialisierungs-Debatte vorbeigegangen, weil der händische Umgang mit Zeichen-Gerät i.a. als nützlich anerkannt wird, vom Computer eben nicht übernommen werden kann und Konstruktionen durch DGS mit Hilfe von Makro-Befehlen zwar vereinfacht, aber nicht trivialisiert werden. Hier habe ich eher die Sorge, daß die anwendungs- und realitäts-ferne Zeichenblatt-Geometrie, deren Übergewicht in der Vergangenheit mit verantwortlich für den Niedergang des Geometrie-Unterrichts war und der die Geometrie-Didaktik wichtige und interessante andere geometrische Themen zur Seite gestellt hat, daß also diese Zeichenblatt-Geometrie zwar in verbesserter Form, aber nach wie vor anwendungs- und realitäts-fern, wieder ins Zentrum rückt, weil sie so gut zu DGS paßt. Wenn dann noch, infolge der aufwendigen und eindrucksvollen Nutzung des Computers im Dienste einer im Vergleich zum Anspruch des Begründens und Beweisens be-

scheidenen Tätigkeit, nämlich des Entdeckens von Auffälligkeiten, der Unterricht über eben diese bescheidene Tätigkeit nicht mehr hinauskommt, dann rentiert sich der ganze Einsatz womöglich nicht.

Literatur

Andelfinger, Bernhard (1990): LehrerInnen- und LernerInnenkonzepte im Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht 36, Heft 3, 29–44

Bauer, Ludwig (1998): Schriftliches Rechnen nach Normalverfahren — wertloses Auslaufmodell oder überdauernde Relevanz? In: Journal für Mathematik-Didaktik 19, 179–200

Baumert, Jürgen, Rainer Lehmann u.a. (1997): TIMSS — Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske & Budrich

Bender, Peter (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14, 9–24

Bender, Peter (1987): Kritik der Logo-Philosophie. In: Journal für Mathematik-Didaktik 8, 3–103

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht — unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, 95–145

Bildungskommission Nordrhein–Westfalen (1995): Zukunft der Bildung — Schule der Zukunft. Neuwied: Luchterhand

Bussmann, Hans & Werner Heymann (1985): Revolutioniert die "Schildkröte" das Lernen? — Rekonstruktion und Kritik der Bildungsutopie von S. Papert. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 17, 76–83

Elschenbroich, Hans-Jürgen (1997): Tod des Beweisens oder Wiederauferstehung? — Zu Auswirkungen des Computereinsatzes auf die Stellung des Beweisens im Unterricht. In: Hischer 1997, 58–66

Giesecke, Hermann (1996): Wozu ist die Schule da? Göttingen: Manuskript

Giesecke, Hermann (1997): Was ist ein Schlüsselproblem? In: Neue Sammlung 37, 563–583

Haefner, Klaus (1982): Die neue Bildungskrise. Herausforderung der Informationstechnik an Bildung und Ausbildung. Basel: Birkhäuser

Hanisch, Günter (1992): Die Auswirkungen der Computeralgebra auf den Mathematikunterricht. In: Hischer 1992, 14–20

- Hischer, Horst (Hrsg.) (1992): Mathematikunterricht im Umbruch. Bericht über die 9. Tagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" 1991. Hildesheim: Franzbecker
- Hischer, Horst (Hrsg.) (1994): Mathematikunterricht im Umbruch. Bericht über die 11. Tagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" 1993. Hildesheim: Franzbecker
- Hischer, Horst (Hrsg.) (1997): Computer und Geometrie — Neue Chancen für den Geometrieunterricht?. Bericht über die 14. Tagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" 1996. Hildesheim: Franzbecker
- Hischer, Horst (Hrsg.) (1998): Geometrie und Computer — Suchen, Entdecken und Anwenden. Bericht über die 15. Tagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" 1997. Hildesheim: Franzbecker
- Hölzl, Reinhart (1994): Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Weinheim: Deutscher Studien Verlag
- Hofe, Rudolf vom (1998): Probleme mit dem Grenzwert — Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Erscheint in: Journal für Mathematik-Didaktik 25
- Hole, Volker (1998): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Donauwörth: Auer
- Holland, Gerhard (1997): Führt der Einsatz von DGS zu einem anderen Verständnis von Geometrie? In: Hischer 1997, 40–48
- Kaiser, Gabriele (1996): Vergleichende Untersuchungen zum Mathematikunterricht im englischen und deutschen Schulwesen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996. Hildesheim: Franzbecker, 28–35
- Kautschitsch, Hermann (in diesem Band): Reaktivierung des funktionalen Denkens durch computer-unterstützte experimentelle Mathematik
- Klafki, Wolfgang (1958): Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. In: Die deutsche Schule 50, 450–471
- Krummheuer, Götz (1989): Die menschliche Seite am Computer. Studien zum gewohnheitsmäßigen Umgang mit Computern im Unterricht. Weinheim: Deutscher Studien Verlag
- Lewalter, Doris (1997): Kognitive Informationsverarbeitung beim Lernen mit computerpräsentierten statischen und dynamischen Illustrationen. In: Unterrichtswissenschaft 25, 207–222
- Löthe, Herbert (1992): Was "trivialisieren", was "komplizieren" informatische Methoden in der Schulmathematik? In: Hischer 1992, 21–24
- Neveling, Rolf (1997): Bewegte Bilder mit Sketchpad. In: Hischer 1997, 96–99
- Papert, Seymour (1980): Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas. New York: Basic Books

- Perko, Richard (1987a): Zur Didaktik der Mikroökonomie. In: Willibald Dörfler, Roland Fischer, Werner Peschek (Hrsg.): Wirtschaftsmathematik in Beruf und Ausbildung. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, 175–181
- Perko, Richard (1987b): Mathematik und politische Bildung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19, 246–251
- Schreiber, Alfred (1998): CBT-Anwendungen professionell entwickeln. Berlin u.a.: Springer
- Schumann, Heinz (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler & Stuttgart: Teubner
- Schupp, Hans (1994): Diskussions-Beitrag. In: Hischer 1994, 70
- Schwartz, Judah L. & Michal Yerushalmy (1985): The Geometric Supposer: Triangles. Pleasantville: Sunburst
- Sträßer, Rudolf (1991): Zusammenfassung der Diskussion im Workshop. In: Rudolf Sträßer (Hrsg.): Intelligente Tutorielle Systeme für das Lernen von Geometrie. Universität Bielefeld: IDM Occasional Paper 124, 57–65
- Sträßer, Rudolf (1997): In welchem Sinn führt der Einsatz von DGS zu einem anderen Verständnis von Geometrie? In: Hischer 1997, 49–54
- Vollmer, Natalie (1997): Hinderliche Kooperation in der Unterrichtspraxis und hilfreiche Störungen als theoretischer Anspruch. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1997. Hildesheim: Franzbecker, 514–517
- Weigand, Hans-Georg (1995): Steckt der Mathematikunterricht in der Krise? In: mathematica didactica 18, 3–20
- Weinert, Franz E. (1996): Thesenpapier zum Vortrag "Ansprüche an das Lernen in der heutigen Zeit". München: Manuskript
- Weth, Thomas (1997): Kreatives Lernen im Geometrieunterricht. In: Hischer 1997, 79–87
- Weth, Thomas (1998): Was bringt der Computer "wirklich" Neues für den Geometrieunterricht? In: Hischer 1998, 13–21
- Wilding, Hans (in diesem Band): Interaktive Lernumgebungen im Unterricht, Erfahrungen über einen Unterrichtsversuch und seine Entwicklung
- Wittmann, Erich C. (1995): Mathematics education as a 'design science'. In: Educational Studies in Mathematics 29, 355–374