In: Christoph Selter & Gerd Walther (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science – Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig u.a.: Klett ISBN 3-12-200060-1, 33-39

Peter Bender, Paderborn

Ein Plädoyer für die Kombinatorik im Unterricht

Den folgenden Ausführungen unterliegt der didaktische Ansatz „Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen (GVV)" (Bender 1991, vom Hofe 1995). Dieser stellt auf das Zusammenspiel fachlicher Strukturen (in Mathematik *und* Anwendungen) und mentaler Strukturen ab. Er integriert damit wesentliche Grund-Strömungen der Mathematik-Didaktik und wendet sich gegen deren separate Verabsolutierungen: Beachtung der Fach-Mathematik; Einbezug der Anwendungen; Hinwendung zu plausiblen Alltags-Vorstellungen und -Verständnissen, sowie deren Pflege, Beeinflussung, Sublimierung und Fruchtbar-Machung.

Die Kombinatorik wird immer wieder diffamiert, weil sie angeblich Zeit kostet, die dann für die Stochastik und dort insbesondere für die Behandlung echter Anwendungen fehlt. – In der Tat zieht der Mathematik-Unterricht einen großen Teil seiner Legitimation aus der Anwendbarkeit der Mathematik. Für die Begriffs-Bildung sind aber zunächst simple lebens-welt-bezogene Situationen mit Fragestellungen erforderlich, die wohl anwendungsorientiert, aber durchaus auch unrealistisch sein können. Hierzu kann die Kombinatorik einen gewichtigen Beitrag leisten; sie ist geradezu der Prototyp für die Ausbildung von GVV.

Die didaktische „Erlaubnis" von Fragestellungen mit unrealistischen Merkmalen ist kein Freibrief für sinn-leere Aktivitäten mit abstrakten Objekten, die ja z.B. die Neue Mathematik in ihrer Extremform prägten und dabei der Kombinatorik, damals u.a. im Dienste einer fehlverstandenen Mengenlehre und Logik, einen lebens- und anwendungs-fernen Beigeschmack verpaßten. – Dank ihrer recht anspruchslosen Begrifflichkeit ist die Kombinatorik (als geschicktes Abzählen von endlichen Mengen) ein geeigneter Stoff für die Schule vom 1. Schuljahr an, als Denk-Sport, als Feld zum Modell-Bilden und als m.E. unverzichtbarer Bestandteil der Stochastik.

Auch in unserer Primarstufenlehrer-Ausbildung in Paderborn, fußend auf einem Konzept von Hartmut Spiegel, nimmt die Kombinatorik im fach-mathematischen Bereich aufgrund dieser ihrer Möglichkeiten einen wesentlichen Platz ein. Ein Begründungs-Strang bedient sich darüber hinaus des (von mir so gesehenen) Mangels des realen Mathematik-Unterrichts auf allen Stufen: Weil dort die Kombinatorik kaum vorkommt, tragen wir sie an unsere Klientel heran, die ja (in Nordrhein-Westfalen) überwiegend Mathematik nur zwangsweise studiert. Dabei haben wir die Hoffnung, daß dieses Stück Mathematik als Inhalt und mit seinen Methoden nicht mit derjenigen Form von Sekundarstufen-Mathematik identifiziert wird, der gegenüber ja bei vielen starke Aversionen bestehen. Diese meist ungewohnte Art, Mathematik zu treiben, soll unseren Studierenden helfen, eine positivere Einstellung zum Fach zu gewinnen, und sie für einen lebendigen Mathematik-Unterricht in der Primarstufe sensibel machen.

In den Sekundarstufen tritt zu den Motiven der Denk-Schulung, des exemplarischen Mathematik-Treibens und des Modell-Bildens als Rechtfertigung für einen substantiellen Kombinatorik-Unterricht, wie gesagt, noch die Vorbereitung und Unterfütterung der Stochastik, die wir in der Primarstufenlehrer-Ausbildung aus Zeitgründen jedoch nur mit ihren allerersten Anfängen behandeln können.

Für den kombinatorisch Gebildeten löst sich so manches stochastische Problem in nichts auf, z.B.: „Welche Konstellation wird bei Familien mit 6 Kindern eher auftreten (vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit für Jungen- (j) und Mädchen-Geburten (m) gleich sind): ‚mjjmjm' oder ‚jjjjjj'?" – Zwar geht es hier um Wahrscheinlichkeiten, aber die Frage ist eine kombinatorische, und die souveräne Antwort lautet: „Der Aufschrieb der ersten Konstellation läßt mich vermuten, daß es nicht nur auf die Anzahl der j und m ankommt, sondern auch auf deren Abfolge, und dann ist jede der beiden Konstellationen eine von $2^6 = 64$ gleich-wahrscheinlichen Möglichkeiten." – Natürlich wird auch so mancher kombinatorisch Gebildeter in die Falle gehen, indem er den gesunden Menschen-Verstand walten läßt und sich die Frage sinnvoll macht: Er versteht die erste Konstellation als Repräsentant der Klasse aller Abfolgen mit 3mal j und 3mal m, faßt also die beiden vorgelegten Konstellationen als ungeordnete Auswahlen auf und hält folglich die erste für wahrscheinlicher. – Bei formalistischer Betrachtungsweise liegt hier keine Falle vor, weil der Aufgabensteller in seinem Bestreben, eine Falle aufzubauen, die Information unterschlagen hat, ob hier angeordnete oder ungeordnete Auswahlen vorliegen, und damit, jedenfalls für einen spitzfindigen Löser, beide Interpretations-Möglichkeiten eingeräumt hat.

Nun ist das Wappnen gegen solche Fang-Aufgaben kein ausreichendes Motiv für einen Kombinatorik-Kurs in der allgemeinbildenden Schule. Aber für ein Verstehen der gängigen *diskreten Verteilungen*, deren Bedeutung infolge der Möglichkeiten des Computers noch zunehmen dürfte (Engel 1987, S. 7), und der Prinzipien der *Beurteilenden Statistik*, die sich sehr prägnant an diskreten Verteilungen entwickeln lassen, ist kombinatorisches Denken unabdingbar. Das Ziehen von Stichproben stellt nun einmal den Aufbau komplexer Experimente und deren Wahrscheinlichkeits-Verteilungen mit kombinatorischen Mitteln aus einfachen Experimenten und einfachen Verteilungen dar. Da muß man Bescheid wissen über an- und ungeordnete Auswahlen mit und ohne Wiederholungen.

Dieses Wissen sollten die Lernenden mit einer bestimmten Muße, unbelastet von all den formalen, philosophischen und inhaltlichen Problemen des Wahrscheinlichkeits-Begriffs, ausbilden können. Wenn es auch der Computer ist, der die Legitimation der Kombinatorik verstärkt, indem er beliebige Berechnungen etwa mit Binomial-Koeffizienten ermöglicht und uns praktisch der Notwendigkeit der Approximation diskreter Sachverhalte durch kontinuierliche Modelle enthebt, so erachte ich es doch für sinnvoll, daß die Lernenden dabei auch „von Hand" rechnen (damit meine ich: mit einem nicht-programmierbaren Taschenrechner), z.B. für $n = 10$ die Folge der $\binom{n}{k}$, $k = 0,\ldots,n$, als Anzahlen der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, geschickt aufbauen. Dabei werden Erfahrungen über den Aufbau des Binomial-Koeffizienten und der durch ihn charakterisierten Zusammenhänge gemacht, für die Zeit und der Abbau der Dominanz anderer Begrifflichkeiten erforderlich sind. – Natürlich kann und soll in der Kombinatorik auch schon von Wahrscheinlichkeiten geredet werden, aber es genügt, dies in einer sehr naiven Weise zu tun.

Es geht aber auch um die Ausbildung gewisser Heuristiken, z.B. *Um-Interpretieren von Objekten*: „In einer Lotterie gibt es 3 Gewinne. Alle Lose werden an insgesamt 10 Personen verkauft. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Gewinne auf die Personen gibt es (wobei unterschieden werden soll, welche Person welchen Gewinn erhält)?" – Hier bietet sich folgende Rückführung auf die kombinatorischen Grund-Typen an: Im Eimer liegen viele Lose, darunter die 3 Gewinn-Lose. Nur auf diese kommt es an. Wir personifizieren die Lose. Die Gewinn-Lose unterhalten sich und fragen sich: „Mal gespannt, wen von den 10 Leuten, die uns Lose ziehen, *ich* kriege." – Man kann die Situation so auffassen, als ob diese 3 Lose eine Lotterie durchführen mit Menschen. Jedes der 3 Lose kann einen Menschen erhalten. Die 10 Leute befinden sich in einer großen gedachten Urne. Ich als Los kann nicht einfach auf die Gruppe von 10 Menschen zugehen und mir einen heraussuchen; dann wäre es ja keine Zufalls-Auswahl mehr; denn ich würde ja vorher sehen, wen ich mir wähle. Der Zufalls-Charakter kommt dadurch ins Spiel, daß die Leute schicksalhaft Lose wählen und ich als Los nicht beeinflussen oder vorhersehen kann, wer mich wählt. – Wenn einem der Zufalls-Charakter nicht wichtig ist, dann ist auch folgende Interpretation passabel: Das erste Gewinn-Los hat 10 Alternativen von Menschen, die es ziehen können; das zweite hat wieder 10 und das dritte wieder; also gibt es insgesamt 10^3 Möglichkeiten.

Also: die Lose definieren die Stufen des Entscheidungs-Prozesses, und die Menschen stellen auf jeder Stufe die Alternativen dar. Welcher Objekt-Typ bei solchen Zuordnungs-Aufgaben für die Stufen und welcher für die Alternativen auf jeder Stufe in Frage kommt, ergibt sich daraus, bei welchem Typ keine Mehrfach-Belegungen auftreten dürfen. Die Stufen sind durch die Lose gegeben, weil jedes Los nur an einen Menschen geraten kann. – Wenn bei beiden Objekt-Typen keine Wiederholungen erlaubt sind, kommt es darauf an, bei welchem Typ die Anzahl der Objekte geringer ist:

„Am Rande einer Tanzfläche stehen $k = 5$ Frauen und $n = 7$ Männer. Eine ‚Tanzflächen-Besetzung' besteht aus 5 sich gleichzeitig auf der Tanzfläche befindenden gemischten Tanz-Paaren. Wie viele Tanzflächen-Besetzungen gibt es?" – Die 5 Frauen definieren die 5 Stufen des Entscheidungs-Prozesses; wir können sie auch als 5 Plätze auffassen, auf die 5 von 7 Männern (= Gegenständen) zu plazieren sind. Durchläuft man diese 5 Plätze, so hat man nacheinander 7, 6, 5, 4, 3 Alternativen zur Auswahl. Insgesamt gibt es also $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. – Lediglich im Falle $n = k$ kommen die beiden Objekt-Typen gleichermaßen als Stufen und als Alternativen auf den Stufen (Plätze und Gegenstände) in Frage, was sich auch an dem Bruchterm zeigt, der ja etwas bedeutet und wo der Nenner positiv sein muß. Im Zähler stehen alle Möglichkeiten für den Fall, daß 7 Plätze vorhanden wären. Der Nenner entsteht dadurch, daß ja der 6. und der 7. Platz tatsächlich nicht vorhanden sind, daß also immer diejenigen Möglichkeiten zu einer einzigen zusammenzufassen sind, die sich nur auf diesen beiden Plätzen voneinander unterscheiden, also immer $(n-k)!$ Stück (Prinzip der *Identifizierung von Möglichkeiten*).

Der Binomial-Koeffizient $\binom{n}{k}$, der für mich identisch mit der Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist und dessen Namen ich erst viel später einmal begründen würde, entsteht durch eine doppelte Anwendung des Prinzips der Identifizierung von Möglichkeiten:

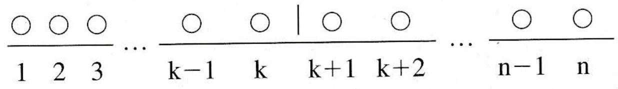

Abb. 1: Anordnung von n Objekten auf n Plätze, von denen k Plätze besonders markiert sind

Es werden n Objekte auf n Plätzen angeordnet. Die n! möglichen Anordnungen werden zu Klassen zusammengefaßt: Auf einer ersten Stufe werden jeweils alle diejenigen Anordnungen zusammengefaßt, die sich nur durch Permutationen der k Objekte auf den k markierten Plätzen (in Abb.1 der Einfachheit halber die k ersten Plätze) unterscheiden. Auf einer zweiten Stufe werden noch jeweils alle diejenigen Klassen zusammengefaßt, die sich nur durch Permutationen der n-k Objekte auf den n-k nicht markierten Plätzen voneinander unterscheiden. Auf diese Weise erhält man genau $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Klassen von Anordnungen, wobei von Anordnungen fast keine Rede mehr sein kann, weil sich zwei Klassen nur noch dadurch unterscheiden, daß sich bei der einen auf den k markierten Plätzen (und damit zugleich auf den n-k nicht markierten Plätzen) wenigstens ein Objekt befindet, das sich bei der anderen dort nicht befindet. Diese Klassen entsprechen daher bijektiv den k-Teilmengen (und zugleich den (n-k)-Teilmengen) einer n-elementigen Menge.

Immer wieder tritt das Problem auf, ob es eigentlich auf die Reihenfolge des Vorgehens ankommt, wo diese bei der Beschreibung der „Lösung" doch so sehr hervorgehoben wird. – Am Beispiel der Tanzflächen-Besetzungen: Es ist egal, in welcher Reihenfolge die 5 Frauen sich aus den jeweils (wenn ihre Vorgängerinnen gewählt haben) noch vorhandenen Männern einen auswählen. Wenn alle Frauen gewählt haben, liegt eine Tanzflächen-Besetzung vor, und man sieht dieser nicht mehr den Prozeß ihres Entstehens an.

Man muß hier deutlich zwischen verschiedenen Handlungs-Ebenen unterscheiden: In die mathematische Formel geht die Handlung des sukzessiven Auswählens ein, während die Festlegung der Reihenfolge auf der Meta-Ebene stattfindet und sich nicht auf das mathematische Ergebnis auswirkt. – Es ist typisch für die Mathematik, daß sie die Meta-Ebene wiederum zu ihrem Gegenstand machen kann: Die Paare können in der Reihenfolge, wie sie sich finden, nebeneinander gestellt werden, so daß Tanzflächen-Besetzungen doch noch entsprechend unterschieden werden können, wodurch es 5!-mal so viele gibt. – Aber auch dafür gibt es wieder eine von der Mathematik nicht erfaßte Meta-Ebene, hier z.B.: Die Reihenfolge, in der die Paare sich finden, kann ja völlig unabhängig davon sein, in welcher Reihenfolge sie dann stehen. usw. Das kann beliebig weit getrieben werden; der Igel „Meta-Mathematik" ist dem Hasen „Mathematik" immer eine Stufe voraus. Für den Mathematiker ist diese Konstellation uninteressant; – für den Mathematik-Didaktiker und Mathematik-Lehrer ist sie hoch-relevant, diese Relevanz wird aber oft verkannt. Es ist das Verdienst Wiesemanns (1995), die Unterscheidung zwischen mathematischen und mathematik-didaktischen (i.w.S.) Handlungen auf den Punkt gebracht zu haben.

Es ist hier nicht der Platz, noch mehr kombinatorische Beispiele im Sinne des GVV-Konzepts in dieser Ausführlichkeit zu analysieren. – Teil der o.a. Heuristik ist z.B. das Prinzip der *Rückführung auf Standard-Modelle.*

Die beiden geläufigsten sind wohl das Urnen- und das Schachtel-Modell. Im Urnen-Modell stellen die Kugeln die Individuen (bzw. wenn mit Zurücklegen gezogen wird: die Sorten

ten) dar und die Ziehungen liefern die Plätze (bzw. wenn es auf die Anordnung nicht ankommt: die ausgewählten Kugel-Mengen bzw. -Kollektionen). Im Schachtel-Modell entsprechen die Schachteln den Kugeln und die Dinge, die hineinzupraktizieren sind (entweder ist höchstens eines oder aber mehr als eines pro Schachtel erlaubt), entsprechen den Ziehungen (entweder sind die Dinge wohl unterschieden und für die so ausgewählten Schachteln liegt etwas mit einer Anordnung Vergleichbares fest; oder die Dinge sind nicht unterschieden und es werden Schachtel-Mengen bzw., falls mehrere Dinge in ein und dieselbe Schachtel gelangen können, Schachtel-Kollektionen ausgezeichnet).

Es gibt Aufgaben, bei denen sich die Standardisierung mit dem Urnen-Modell anbietet; bei anderen wiederum liegt die Verwendung des Schachtel-Modells näher. Allerdings kommt es oft auch auf den Menschen an, der sich mit den Aufgaben beschäftigt, bzw. darauf, welches Modell diesem Menschen in einem Kombinatorik-Lehrgang angewöhnt wurde. – Häufig werden alle kombinatorischen Grund-Typen in beiden Modellen behandelt, und infolge geeigneter Wahl der Bezeichnungen, insbesondere der Buchstaben, läßt sich die Gleichartigkeit der entsprechenden Aufgaben-Typen in beiden Modellen ersehen. Diese Gründung auf Äußerlichkeiten (die im Mathematik-Unterricht allerdings gang und gäbe ist) ist m.E. unzureichend für ein wirkiches Durchschauen der gemeinsamen Struktur beider Modelle. Immerhin sind es im Urnen-Modell die Dinge in einem Behälter (Kugeln in der Urne), die im Schachtel-Modell den Behältern (Schachteln) entsprechen. Aber was bedeutet im Schachtel-Modell die Urne, und wo sind im Urnen-Modell die Dinge? – Man muß *die beiden Modelle* noch etwas genauer beschreiben und dann *das eine* kontinuierlich oder diskret *in das andere überführen*. Es genügt hier die durch Skizzen unterstützte Vorstellung:

Für alle Grund-Aufgaben paßt das Modell, bei dem die Kugeln (bzw. die Schachteln) wohl unterschieden sind, z.B. durch eine Numerierung (bzw. durch dauerhaftes Aufstellen in einer Reihe). – Wird nun im Urnen-Modell eine Kugel gezogen, dann wird ein Zettel auf sie geklebt, und sie wird in die Urne zurückgelegt. Ist die Reihenfolge des Ziehens relevant, dann sind die Zettel entsprechend numeriert. Wird „ohne Zurücklegen" gezogen, dann kommen bei jeder Ziehung nur Kugeln in Frage, die noch nicht mit einem Zettel versehen sind. Man braucht also gar keine Urne, in der sich die Kugeln befinden, sondern man kann sich die Kugeln auf einem Tisch liegend vorstellen, und das Ziehen wird durch das Markieren mit Zetteln ersetzt. Nun denke man sich jede Kugel aus zwei durchsichtigen Plastik-Halbkugeln zusammengesetzt (wie man sie als Verpackung für Süßigkeiten kennt), und man braucht die Zettel nicht mehr auf die Kugeln zu kleben, sondern kann sie hineinlegen. Dann ersetze man noch den amorphen Kugel-Haufen durch die Anordnung der Kugeln in einer Reihe entsprechend den Nummern, die sie ja von Anfang an tragen, und verwandle die Kugel- in eine Quader-Form, und man befindet sich mitten im Schachtel-Modell. Als Dinge verwendet man also Zettel; zu deren etwaigen Unterscheidung zieht man Nummern heran.

Mit dieser Transformation vom Urnen- ins Schachtel-Modell hat man nicht nur die strukturelle Gleichheit beider Modelle festgestellt, sondern darüber hinaus die Grund-Idee der elementaren Kombinatorik durchsichtig gemacht: Einer Kollektion wohl unterschiedener Objekte (Kugeln oder Schachteln), also einer Menge im mathematischen Sinn, steht eine Kollektion anderer Objekte (Zettel) gegenüber, und es werden Beziehungen zwischen den Objekten der einen Kollektion und denen der anderen aufgebaut. Die unterschiedlichen Typen von Grund-Aufgaben erhält man allein durch Variieren der Struktur der zweiten Kollektion, während die Struktur der ersten Kollektion immer dieselbe ist: ein Anfangs-Stück der natürlichen Zahlen. Man kann auch die zweite Kollektion als Menge im mathematischen Sinn auffassen, indem man Zettel in passender Anzahl zur Verfügung stellt, sie (z.B. als physische Indidviduen) unterscheidet und dann gegebenenfalls nicht mehr die hergestellten Beziehungen, sondern Klassen von Beziehungen zählt.

Mit seinem prozeßhaften Charakter ist das Urnen-Modell für viele Aufgaben gewiß gut geeignet; die Verdinglichung der Züge durch Zettel macht aber die Struktur erst richtig durchschaubar. – Angesichts des aktuellen modischen mathematik-didaktischen Paradigmas der Dynamik (besonders im Zusammenhang mit dem Computer) in der Mathematik sollte man das bewährte Prinzip der *dinglichen und* damit zunächst *statischen Auffassung von Prozessen* nicht außer acht lassen.

Für die Stochastik von Bedeutung ist weiterhin die *Einführung künstlicher Unterscheidungen*, meist mit dem Ziel der Herstellung einer Gleich-Verteilung, die oft durch die Aufprägung einer Anordnung auf eine Auswahl erreicht wird.

Man sieht, daß die Kombinatorik einen vorzüglichen Beitrag zum globalen Lernziel des Bildens von Modellen und des Umgangs damit leisten kann. – Das Lösen kombinatorischer Aufgaben darf eben nicht auf die Angabe eines Grund-Typs mit festgelegten Buchstaben-Bedeutungen reduziert werden (bei der Los-Aufgabe: mit Anordnung, mit Wiederholung, $n=10$, $k=3$). Diesem Vorgehen liegt nämlich oft weniger ein automatisiertes souveränes Beherrschen, sondern ein von äußerlichen Signalen geleitetes Stochern in einem trüben Wissens-Speicher zugrunde. – Dennoch sollte am Ende eines Kombinatorik-Kurses eine Übersicht etwa folgender Art (s. Abb. 2) stehen, aber nicht zwecks Reduktion des Stoffs darauf, sondern als – nicht zeitlicher, sondern – sachlicher *Abschluß*.

Sowohl der (links unten stehende) kombinatorische Problem-Typ „Auswahl ohne Anordnung mit (erlaubten) Wiederholungen", als auch der (ganz rechts stehende) kombinatorische Problem-Typ „Einteilung in s Teilmengen", gern auch bezeichnet als „Permutationen mit Wiederholungen", sind für ein Stochastik-Curriculum vielleicht entbehrlich. Sie runden aber die Kombinatorik auf einer ersten Stufe ab (hier findet sich wieder das Motiv des *Abschlusses*) und tragen zur Klarheit und Ästhetik der Übersicht bei, indem sie diese symmetrisch machen.

	Produkt-Regel direkt; k Stufen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Alternativen auf den Stufen; **$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten**		
angeordnete Auswahlen (Verteilen verschiedener Dinge)	n Sorten (Kugeln, Schachteln); k Plätze (Ziehungen, Dinge); **n^k Möglichkeiten**	n Individuen (Kugeln, Schachtel); k Plätze (Ziehungen, Dinge) mit $k \leq n$; **$\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten** (n! Möglichkeiten, falls $k = n$ (Permutationen))	n Individuen (Kugeln, Schachteln); s angeordnete Teilmengen mit resp. $n_1, n_2, \ldots, n_s$ Elementen (in jeder Teilmenge ungeordnete Kugeln bzw. gleiche Dinge) mit
ungeordnete Auswahlen (Verteilen gleicher Dinge)	n Sorten (Kugeln, Schachteln); k-elementige „Mengen“ (k Ziehungen, Dinge); **$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten**	n Individuen (Kugeln, Schachteln); k-elementige (Teil-) Mengen (k Ziehungen, Dinge) mit $k \leq n$; **$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten**	$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$; **$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}$ Möglichkeiten**
	mit Zurücklegen (mit (erlaubten) Wiederholungen der Schachteln)	*ohne Zurücklegen (ohne Wiederholungen der Schachteln) mit $k \leq n$ bzw. $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$*	

Abb. 2: Überblick über die elementare Kombinatorik

Literatur

1. Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Helmut Postel, Arnold Kirsch & Werner Blum (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, 48–60
2. Engel, Arthur (1987): Stochastik. Stuttgart: Klett
3. Hofe, Rudolf vom (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg u.a.: Spektrum
4. Wiesemann, Horst (1998): Prozessuales Aneignen. Hildesheim: Franzbecker