Festschrift für Harald Scheid

Prof. Dr. Peter Bender
U-GH Paderborn Fb 17
25.02.1999

Was sind die Sorten, und was sind die Objekte in der Kombinatorik?

In Nordrhein-Westfalen ist für alle Grundschullehrer-Studenten Mathematik verbindlicher Studien-Stoff wenigstens im Umfang eines halben Fachs (man wundert sich, daß in den meisten anderen Bundes-Ländern die meisten Grundschul-Lehrer Mathematik-Unterricht ohne ein einschlägiges Studium erteilen dürfen bzw. müssen). An der Universität-Gesamthochschule Paderborn ist das Stunden-Volumen für die Mathematik etwa je zur Hälfte auf das Didaktik- und auf das Fach-Studium aufgeteilt. Letzteres setzt sich aus drei großen Themen zusammen, nämlich Arithmetik, Geometrie und — Kombinatorik (mit einem allerersten Ausflug in die Wahrscheinlichkeits-Rechnung), und zwar ist die Kombinatorik die Erstsemester-Veranstaltung. Mit dieser Reihung möchten wir vor allem der Abneigung Rechnung tragen, die viele Grundschullehrer-Studenten aus der Schule gegenüber der Mathematik mitbringen. Für die meisten ist dann nämlich die Kombinatorik ein neues Stoff-Gebiet, das von den schlechten schulischen Erfahrungen unbelastet ist und das die Chance eines Neu-Anfangs eröffnet. Außerdem ist die Kombinatorik begrifflich recht einfach und bietet zugleich Problem-Stellungen auf jedem Niveau, für deren Lösung meist kein intensives zu "lernendes" Wissen über mehr oder weniger umfangreiche mathematische Theorie-Stücke, sondern vor allem die Kraft des eigenen Verstandes Voraussetzung ist. Wichtig ist auch die dauernd erforderliche Übersetzung von einer textlich gegebenen Situation in kombinatorische Standard-Modelle bzw. überhaupt zwischen Modellen, eine typische Form des Mathematik-Treibens, bei der heuristisches Denken bedeutsam ist. Etwas zu kurz kommen dabei genuine Anwendungen; die Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat dann in der Tat ein wenig das Flair von Würfelbuden-Mathematik. Ich kann daran allerdings sowieso nichts Anrüchiges erkennen. Darüber hinaus muß festgestellt werden, daß die Behandlung echter Anwendungen grundsätzlich zeitlich und mathematisch-begrifflich viel aufwendiger ist, als es häufig den Anschein hat, und unter den Rahmen-Bedingungen unserer Grundschullehrer-Ausbildung kaum geleistet werden kann.

Dies alles macht die Kombinatorik zum schwierigsten der drei fachlichen Teil-Gebiete, und über den "Nachteil", daß sie als erste behandelt wird, trösten sich die Studenten lediglich damit hinweg, daß sie mit dem Abschluß des Grund-Studiums erledigt ist und in der Examens-Prüfung nicht mehr auftaucht. Außerdem geben wir Dozenten ihnen ja doch Strategien, Heuristiken, informelle Regeln, Standard-Modelle an die Hand (künstliche Unterscheidung, Abzählen auf zwei Arten, Vertauschung von Stufen und Alternativen beim Entscheidungs-Prozeß, Schachtel- und Urnen -Modell usw.). Und nicht zuletzt leiten wir Formeln her, die wir allerdings nicht zum Zwecke eines automatisierten Einsetzens zur Verfügung stellen, sondern als Zusammenfassung der Überlegungen zu einem bestimmten Problem-Typ. Die Aufgaben werden auch tunlichst so gestaltet, daß die Haupt-Arbeit in der Erstellung des jeweiligen Modells liegt und das Einsetzen in die Formel und Ermitteln des Zahlen-Werts lediglich den Charakter einer Zugabe hat.

Selbstredend verwendet man in den Standard-Modellen und ihren Formeln eine einheitliche Begrifflichkeit und Symbol-Schreibweise. So bedeutet bei mir im Schachtel-Modell n die Anzahl der Schachteln und k die Anzahl der in diese hineinzupraktizierenden Partikel und im Urnen-Modell n die Anzahl der Kugeln sowie k die Anzahl der Züge. Die Schachteln bzw. Kugeln sind n wohl-unterschiedene Dinge, z.B. von 1 bis n numeriert, und sie müssen nicht alle genau einmal beteiligt sein, sondern können auch gar nicht bzw. mehr als einmal auftreten. Wenn sie mehr als einmal auftreten können, nennen wir sie auch Sorten: z.B. die n Geschmacks-Richtungen, die der Eis-Mann zur Verfügung hat und von denen jede auch mehrfach in eine Eis-Tüte gelangen kann.

Dagegen können je nach Problem-Typ die k Partikel unterschieden sein oder nicht; ebenso können die k Züge unterschieden sein oder nicht, d.h. auf die Reihenfolge kommt es an oder nicht. Aber alle vorhandenen k Partikel müssen verwendet werden, d.h. müssen in die Schachteln praktiziert werden, bzw. alle k Züge müssen gemacht werden (die Dinge, die mit den Zügen assoziiert sind, müssen alle zum Zug kommen). Z.B. bedeutet die Zusammenstellung einer Eis-Tüte mit k Bällchen, daß k vorhandene Partikel in die Schachteln praktiziert werden (mit erlaubten Wiederholungen der Schachteln) bzw. aus der Urne k-mal mit Zurücklegen gezogen wird. Es ist zwar nicht zwingend, aber durchaus naheliegend, daß in der Real-Situation die Bällchen (außer dann durch die Geschmacks-Richtungen) nicht unterschieden werden (etwa durch die Plazierung in der Tüte oder die Reihenfolge des Essens o.ä.). Man kann sich das Schachtel-Modell also sehr bildlich so vorstellen: Man hat k geschmacklose (= ununterschiedene) Eis-Bällchen, taucht jedes in eine der Schachteln mit ihrer Geschmacks-Richtung und stellt auf diese Weise eine Eis-Tüte mit k Bällchen aus n Geschmacks-Richtungen zusammen. Im Urnen-Modell bedeutet diese Ununterscheidbarkeit, daß es auf die Reihenfolge des Ziehens nicht ankommt.

Leider wird die Zuordnung zwischen Problem-Situation und Standard-Modell immer wieder gerne verkürzt auf die Frage: "Was sind die "k"s , und was sind die "n"s ?"; und man ertappt sich manchmal sogar dabei, solches falsches Reden aus sprech-ökonomischen Gründen zu tolerieren. — Diese Identifizierung von Dingen mit ihren Anzahlen ist einer der Basis-Fehler in der elementaren Algebra der Sekundarstufe I (s. Malle 1993, S. 109), und viele Grundschullehrer-Studenten hängen ihm noch an.

In der Kombinatorik gibt es für (so gut wie) alle Aufgaben unterschiedliche Lösungs-Wege. So kann man sich regelmäßig ein und denselben End-Term (Zahlen-Wert) aus verschiedenen Zwischen-Termen und damit verschiedenen Vorgehens-Weisen entstanden denken. — Dabei kann manchmal eine Bindung der Kategorien "Objekte" und "Sorten" und damit der ("eingeführten") Buchstaben k und n an bestimmte Ding-Typen allerdings sogar widersprüchlich werden:

Ein proto-typisches Beispiel für den kombinatorischen Typ "ohne Unterscheidung der Partikel, mit erlaubter Wiederholung der Schachteln" (= "oUmW" = "ohne Beachtung der Reihenfolge der Züge, mit Zurücklegen der Kugeln") ist folgendes Problem:

Problem 1: Wie viele additive Zerlegungen in genau j natürliche Summanden (**mit** erlaubten Nullen) gibt es für die natürliche Zahl z ?

Dabei sollen zwei Zerlegungen als verschieden gelten, wenn sie sich an mindestens einer Stelle unterscheiden, auch wenn sie mittels des Kommutativ-Gesetzes ineinander übergeführt werden könnten; also $3+1+5 \neq 5+1+3$.

Dieses Problem ist relevant für die Grundschule: Nicht daß die Kinder es kombinatorisch lösen sollten, auch nicht mit konkreten Zahlen-Werten für z und j ; vielmehr lautet die Problem-Stellung im Zuge eines produktiven Übens vielleicht so: Findet alle Zerlegungen der Zahl 9 in Plus-Aufgaben mit 3 "Summanden". Dann sollte der Lehrer vorher wissen, wie umfangreich das Problem ist, und nachher die Vollständigkeit der eventuell gemeinsam erarbeiteten Lösungen überprüfen können.

Kennt man die kombinatorischen Grund-Aufgaben, dann liegt die Lösung auf der Hand: Man hat j Schachteln (für jeden Summanden eine), z ununterschiedene Partikel (Striche, Stäbchen), praktiziert diese in die Schachteln und hat damit eine der gefragten Zerlegungen erzeugt. Mit dieser Handlungs-Vorschrift ist eine Bijektion zwischen der Lösungs-Menge des gestellten Problems und der des Standard-Modells "oUmW" gegeben, und daher gibt es $\binom{z+j-1}{j-1}$ Möglichkeiten, im Fall $z=9$, $j=3$ also 55 . — Mit $n=j$, $k=z$ haben wir die üblichen Bezeichnungen: n für die Anzahl der Sorten und k für die Anzahl der Objekte.

Man kann aber auch auf folgende Weise vorgehen, ausgehend von einer leicht geänderten Frage-Stellung:

Problem 2: Wie viele additive Zerlegungen in genau j natürliche Summanden (**ohne** erlaubte Nullen) gibt es für die natürliche Zahl z ?

Hier besteht die Ungleichung $j \leq z$. Nach wie vor sollen zwei Zerlegungen als verschieden gelten, wenn sie sich an mindestens einer Stelle unterscheiden, auch wenn sie mittels des Kommutativ-Gesetzes ineinander übergeführt werden könnten.

Hier kann man folgendes stringentes Modell benutzen: Man stellt die Zahl z als z Striche dar: | | | ... | | , und erzeugt eine additive Zerlegung in j Summanden, indem man insgesamt $j–1$ Plus-Zeichen in die $z–1$ Zwischen-Räume zwischen den Strichen setzt und die Striche zwischen je zwei Plus-Zeichen zu Summanden zusammenfaßt. Z.B. bedeutet | | |+| | | | |+| die Zerlegung $9 = 3+5+1$. Klar ist, daß in jeden Zwischen-Raum höchstens ein Plus-Zeichen gesetzt werden darf, und auch hier ergibt sich leicht die Bijektivität der so vermittelten Abbildung zwischen der Möglichkeiten-Menge des Ausgangs-Problems und der des Modells. Damit ist das Ausgangs-Problem auf folgende Frage zurückgeführt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer $(z–1)$-elementigen Menge von Zwischen-Räumen eine $(j–1)$-elementige Teil-Menge zum Setzen der Plus-Zeichen auszuwählen? Die Antwort lautet bekanntlich $\binom{z-1}{j-1}$, im Fall $z=9$, $j=3$ also 28 .

Diese Behandlung des Problems läßt sich leicht folgendermaßen fortsetzen:

> **Problem 3:** Wie viele additive Zerlegungen (ohne Beschränkung der Summanden-Zahl) in natürliche Zahlen (**ohne** erlaubte Nullen) gibt es für eine natürliche Zahl z überhaupt?

Nunmehr lautet die Frage: Wie viele Teil-Mengen zum jeweiligen Setzen der Plus-Zeichen hat eine (z–1)-elementige Menge von Zwischen-Räumen überhaupt? — Und die Antwort: 2^{z-1} .

Kann man die Problem-Stellung auch noch dahingehend variieren, daß man Nullen als Summanden zuläßt? — Offensichtlich nicht, wenn die Anzahl der Summanden beliebig sein darf. — Wir untersuchen daher nur die Frage (die wir oben schon einmal beantwortet haben):

> **Problem 1:** Wie viele additive Zerlegungen in genau j natürliche Summanden (**mit** erlaubten Nullen) gibt es für die natürliche Zahl z ?

Das Zwischenraum-Pluszeichen-Modell ist entsprechend zu erweitern: In jeden Zwischen-Raum können nun mehrere Plus-Zeichen gelangen, und mit i Plus-Zeichen in einem Zwischen-Raum werden i–1 Null-Summanden festgelegt. Auch die Räume ganz links und ganz rechts von der Strich-Liste faßt man jetzt als Zwischen-Räume auf. Deren Besetzung mit Plus-Zeichen bedeutet, daß die ersten oder letzten Summanden Null sind. Es liegen also z+1 Zwischen-Räume (= Schachteln) vor, in die j–1 Plus-Zeichen (= ununterschiedene Partikel) zu praktizieren sind. Z.B. steht +| | | | |++| | | |++ für die Zerlegung 9 = 0+5+0+4+0+0 mit z=9, j=6 .

Erneut ist die Abbildung zwischen der Möglichkeiten-Menge des Ausgangs-Problems und der des Modells bijektiv. Im Vergleich zur ersten Lösung sind nun die Rollen von Sorten und Objekten jedoch vertauscht, was besonders deutlich wird, wenn man die üblichen Buchstaben verwendet: n=z+1, k=j–1 . Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

$$\binom{(j-1)+(z+1)-1}{(z+1)-1},$$

und dies ist gerade wieder das oben erzielte Ergebnis.

Die Hoffnung, daß bei einer kombinatorischen Aufgabe vom Typ "oUmW" automatisch feststeht, welche Dinge die Sorten (Kugeln, Schachteln), also die "n"s, und welche die Objekte (Züge, Partikel), also die "k"s sind, muß begraben werden. Wenn man hier die Anzahlen der beiden maßgeblichen Ding-Typen kennt, weiß man noch nicht, welche man mit n und welche man mit k zu bezeichnen hat, um sie dann in den Term $\binom{k+n-1}{n-1}$ einsetzen zu können. Und da dieser Term nicht symmetrisch in n und k ist, kann man auch nicht vordergründig ergebnis-orientiert einfach eine falsche Modellierung in Kauf nehmen und doch automatisch das "Richtige" herauskriegen.

Was haben diese Ausführungen mit Herrn Scheid zu tun? — Bei allem Spaß und Ehrgeiz, den man beim Ausknobeln kombinatorischer Aufgaben entwickelt, kommt man hin und wieder nicht darum herum, auch einmal eine Lösung nachzugucken. Und da kommt einem (Scheid 1992) gerade recht. Dieses Buch war mir im Verein mit einigen anderen von Herrn Scheid zu Analysis, Arithmetik, Geometrie, Zahlentheorie usw. immer eine gute Grundlage für die entsprechenden fach-mathematischen (und damit indirekt auch für die fach-didaktischen) Veranstaltungen in der Lehrer-Ausbildung: Ohne didaktische Aufbauschungen, ohne mathematisch-begriffliche Überfrachtung, mit vielen interessanten und spannenden Beispielen; so schnörkel-los wie Herr Scheid selbst.

Literatur:

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg

Scheid, Harald (1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut