Eine aspektreiche geometrische Aufgabe für die Mathematiklehramts-Ausbildung

Peter Bender

Eine der schönsten elementar-geometrischen Aufgaben ist folgende:
In der euklidischen Ebene bewegt man sich auf einer Geraden g (Straße). Im Innern einer der beiden Halb-Ebenen befindet sich eine Strecke $\overline{AB}$ mit A ≠ B (Häuser-Zeile) (Abb. 1). – Von welchem Punkt auf g aus sieht man $\overline{AB}$ unter maximalem Winkel?

Man findet sie in den verschiedensten Einkleidungen. WERNER WALSCH (1996) hat sie kürzlich unter dem Aspekt der Vielfalt bei Lösungswegen zum Zwecke der Erreichung mathematik-unterrichtlicher Ziele didaktisch analysiert und allerdings festgestellt, dass sie „für die einbezogenen Schüler einen hohen Schwierigkeitsgrad [besaß, ... u.a. weil viele] mit einem zu engen ... 'Suchfeld' an [sie] herangegangen sind" (S. 60).

Ich selbst (BENDER 1998) war durch ROLF NEVELING (1997) auf die Aufgabe aufmerksam geworden. Über die computer-bezogene Diskussion hinaus hatte ich zunächst, ohne didaktische Ambitionen i.e.S., einfach Spaß an einer möglichst „lückenlosen" (unter Einbezug des zweiten lokalen Maximums hinter der Häuser-Zeile) elementar-geometrischen Durchdringung. Trotz meiner Liebe zur Geometrie und meiner Hochschätzung geometrischer Beweise habe ich – als typisches Produkt der weltweit üblichen Sozialisation im Mathematik-Studium – die Korrektheit meiner Überlegungen zur Sicherheit zusätzlich mit Hilfe der Differentialrechnung und darüber hinaus – wieder mehr zum Spaß – noch einmal mit dem koordinaten-geometrischen Kalkül überprüft.

In der Zwischenzeit hatte STEFAN GÖTZ die Analyse von WALSCH fortgeführt, mir seine Arbeit (die voraussichtlich 2001 erscheint) zur Verfügung gestellt und mich dadurch angeregt, meine Überlegungen zu präzisieren und aufzuschreiben. Dabei ergaben sich auf jedem der drei Lösungswege zusätzliche spezifische Gesichtspunkte, so dass die Aufgabe sich als noch substanzreicher als gedacht erwies:

- **elementar-geometrisch**: die Beziehung der beiden lokalen Maxima zueinander;
- **koordinaten-geometrisch**: die Bestimmung von geometrischen Sachverhalten durch die Analyse von Räumen quadratischer Gleichungen;
- **funktions-analytisch**: die Erfordernis der stetigen Ergänzung der betrachteten Funktionen; und
- **bei allen drei Wegen**: die Unterscheidung verschiedener Fälle mit spitzen, rechten und stumpfen Winkeln.

Die folgende Darstellung soll nun nicht weiter kommentiert werden, sondern für sich sprechen. Zweifellos würden auch leistungsstarke Oberstufen-Schülerinnen und -Schüler für eine derartige Lösungs-Erarbeitung deutliche Hilfen benötigen, und zwar weniger wegen der involvierten mathematischen Begrifflichkeit, sondern wegen des Aspekt-Reichtums insgesamt und eines jeden Lösungsweges. WALSCHs didaktische Analyse, die ja eigentlich auf den Schulunterricht gemünzt ist, kann direkt darauf übertragen werden. Diese Verlagerung der Zielgruppe ist kein Alibi zum Behandeln von Aufgaben, die über dem Schul-Niveau liegen, sondern sie erfüllt ein dringendes Bedürfnis: Damit der Mathematikunterricht in der Weise stattfinden kann, wie ihn WERNER WALSCH beschrieben hat, muss zunächst einmal bei den Lehrerinnen und Lehrern ein entsprechendes Bild von Mathematik vorhanden sein, und dafür ist die eigen-köpfige Auseinandersetzung mit niveauvollen adäquaten Aufgaben eine Voraussetzung. Ich meine, diese Aufgabe ist eine solche.

Elementar-geometrische Lösung:

Wir betrachten alle Fasskreis-Bögen über der Strecke $\overline{AB}$. Ihre Mittelpunkte Z liegen auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Je kleiner der Bogen, desto größer der zugehörige Umfangswinkel. Es ist also ein möglichst kleiner Bogen zu suchen, der aber mit der Straße noch wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, damit von diesem Punkt aus die Häuser-Zeile unter diesem Umfangswinkel zu sehen ist. Gesucht ist also „der" Kreis, der durch A und B geht sowie g berührt, bzw. sein Berührpunkt $X \in g$.

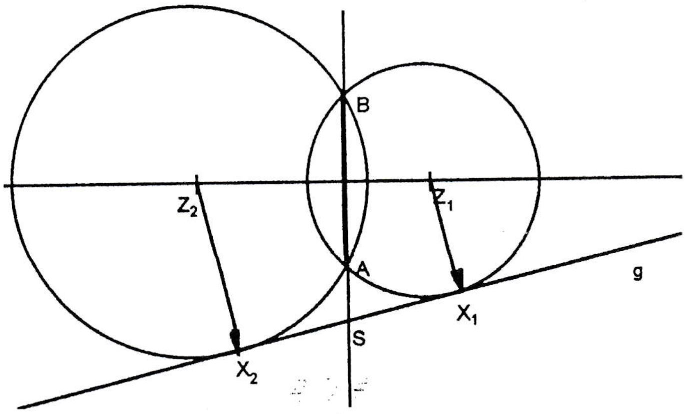

Abb. 1

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Häuser-Zeile nicht parallel zur Straße liegt (o.B.d.A. sei der Punkt A näher an der Straße als B). Dann schneidet die Gerade durch A und B die Straße. Wir nennen den Schnittpunkt S. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist $|\overline{SA}| \cdot |\overline{SB}| = |\overline{SX}|^2$. Mit dem Thales- und dem Katheten-Satz lässt sich $|\overline{SX}|$ bestimmen und von S aus in beide Richtungen auf der Straße abtragen, so dass zwei Berührpunkte X_1 und X_2 als Orte lokal maximaler Blick-Winkel entstehen. Die Lote zu g durch diese beiden Punkte, geschnitten mit der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, liefern dann noch die beiden Kreis-Mittelpunkte Z_1 und Z_2.

Liegt die Häuser-Zeile senkrecht zur Straße, dann sind die beiden so bestimmten Kreise und damit die beiden Blick-Winkel von X_1 und X_2 aus gleichgroß, und diese sind damit zwei global maximale Blick-Winkel, und zwar sind sie spitz, weil für $i = 1, 2$ der Berührpunkt X_i auf derselben Seite bezüglich der Geraden durch $\overline{AB}$ liegt wie der Kreis-Mittelpunkt Z_i.

Liegt die Häuser-Zeile schräg zur Straße, so hat ihre Mittelsenkrechte einen Schnittpunkt mit dieser. Derjenige Kreis, der näher an diesem Schnittpunkt liegt (etwa der um Z_1), ist ersichtlich kleiner als der andere (Strahlen-Satz), und daher ist der zugehörige Blick-Winkel größer. Dies gilt auch, wenn der Mittelpunkt Z_1 auf $\overline{AB}$ oder gar auf der anderen Seite von $\overline{AB}$ liegt als der Berührpunkt X_1. Dann ist der Blick-Winkel ein rechter oder ein stumpfer, während der Blick-Winkel von X_2 immer spitz ist.

Stellt man sich, bei fester Häuser-Zeile und festem Schnittpunkt S, ausgehend von der zu $\overline{AB}$ senkrechten Geraden g durch S, die Gerade um S rotierend vor, und zwar so, dass X_1 sich auf $\overline{AB}$ zu bewegt, dann wandert X_1 auf einem Kreisbogen, dessen Ende L in $\overline{AB}$ liegt, allerdings von X_1 nie erreicht wird (Abb. 2).

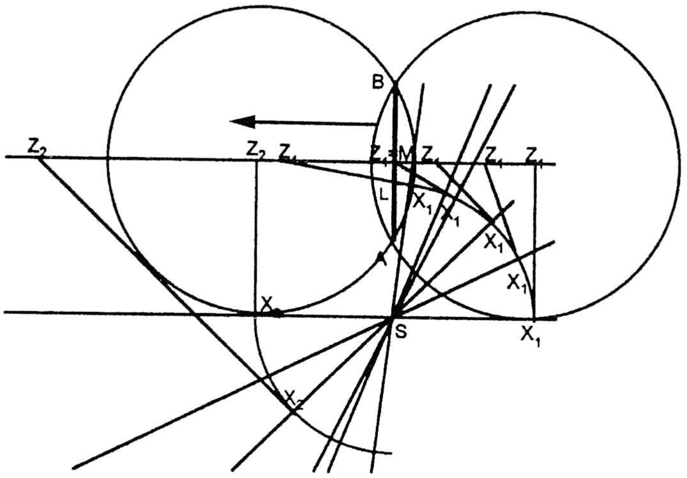

Abb. 2

Da $\left|\overline{SL}\right| = \left|\overline{SX_1}\right|$ das **geometrische** und $\left|\overline{SM}\right|$ das **arithmetische** Mittel von $\left|\overline{SA}\right|$ und $\left|\overline{SB}\right|$ ist, liegt L zwischen A und M. Bei der Wanderung des Berührpunkts X_1 in Richtung L durchläuft der Kreis-Mittelpunkt Z_1 die Mittelsenkrechte in Richtung $\overline{AB}$, erreicht dort M und läuft auf der anderen Seite von $\overline{AB}$ ins Unendliche weiter. Dabei wird der Kreisbogen AX_1B immer kürzer, der Blick-Winkel immer größer, für $Z_1 = M$ wird er ein rechter und anschließend ein immer größerer stumpfer Winkel.

Der eindeutig bestimmte global maximale Blick-Winkel ist also der von X_1 aus, dem näher an der Häuser-Zeile liegenden der beiden Berührpunkte X_1 und X_2. (Bei Drehung der Geraden in die andere Richtung sind die Rollen von X_1 und X_2 sowie von Z_1 und Z_2 vertauscht.)

Lediglich wenn die Häuser-Zeile senkrecht zur Straße g liegt, befindet sich der maximale Blick-Winkel in X_1 und X_2 zugleich.

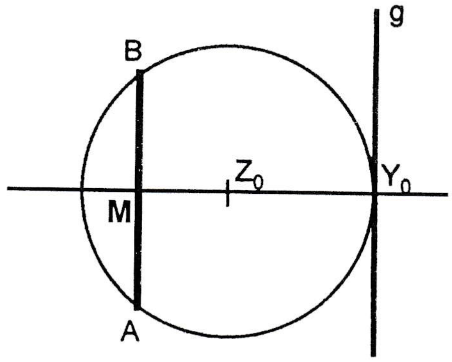

Abb. 3

Liegt nun die Häuser-Zeile parallel zur Straße (Abb. 3), so ergibt sich mit ähnlichen Überlegungen wie bis jetzt, aber wesentlich einfacher, dass diejenige Stelle Y_0 der Straße, die genau dem Mittelpunkt M der Häuser-Zeile gegenüberliegt, den maximalen Blick-Winkel liefert.

Berechnung mit Koordinaten-Geometrie:

Wir legen das Koordinatensystem o.B.d.A. so über die Szene, dass die Strecke $\overline{AB}$ auf der y-Achse mit dem Mittelpunkt M im Ursprung liegt, $A = (0; -h)$, $B = (0; h)$ ist (die Streckenlänge also $2 \cdot h$ beträgt) und g die y-Achse in $(0; -k)$ schneidet (also $k > h > 0$ ist) (Abb. 4). (Den Sonderfall, dass g und $\overline{AB}$ parallel sind, behandeln wir weiter unten.)

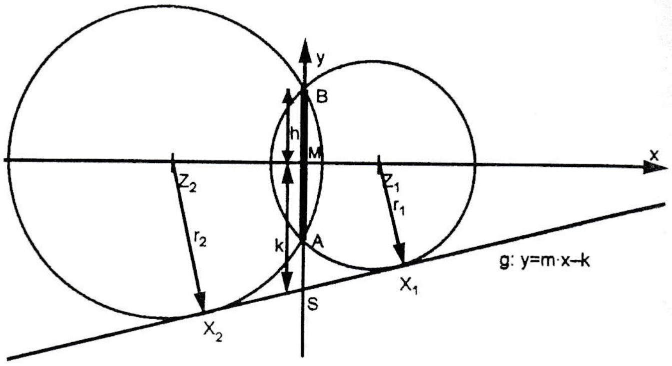

Abb. 4

Die Straße wird mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x - k$ beschrieben, wobei wir aus Symmetriegründen $m \geq 0$ annehmen können.

Ist z die x-Koordinate des Mittelpunkts eines Fass-Kreises über der Häuser-Zeile $\overline{AB}$, dann besteht für den zugehörigen Radius r die Beziehung $r^2 = h^2 + z^2$, und die Kreisgleichung mit den Koordinaten $(x; y)$ lautet dann $(x - z)^2 + y^2 = h^2 + z^2$. Schneidet man nun diesen Fass-Kreis mit der Geraden $y = m \cdot x - k$, so lautet die x-Koordinate $x = \frac{z + k \cdot m \pm \sqrt{(z + k \cdot m^2 - (k^2 - h^2) \cdot (1 + m^2)}}{1 + m^2}$. Je nach dem Vorzeichen der Diskriminanten entstehen genau zwei Schnittpunkte, genau einer oder keiner. Die Bedingung, dass genau ein Schnittpunkt entsteht, lautet $z = -k \cdot m \pm \sqrt{(k^2 - h^2) \cdot (1 + m^2)}$. Es gibt also zwei Berührkreise, deren Mittelpunkte Z_1 und Z_2 die x-Koordinaten z_1 (mit dem Plus-Zeichen, also „vor" der Häuser-Zeile) bzw. z_2 (mit dem Minus-Zeichen, also „hinter" der Häuser-Zeile) haben. Die beiden Berührpunkte haben die x-Koordinaten $x_1 = \sqrt{\frac{k^2 - h^2}{1 + m^2}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{k^2 - h^2}{1 + m^2}}$.

Im Fall $m = 0$, wo die Häuser-Zeile $\overline{AB}$ senkrecht auf der Straße g steht, haben beide Berührkreise den Radius k und sind die beiden lokal maximalen Blick-Winkel gleichgroß und damit global maximal. In allen anderen Fällen ist der Kreis-Mittelpunkt Z_2, dessen Berühr-Punkt X_2 „hinter" der Häuser-Zeile liegt, weiter von dieser entfernt als Z_1 mit seinem Berühr-Punkt X_1 „vor" der Häuser-Zeile und liefert einen größeren Fass-Kreis. Z_2 und X_2 liegen immer beide „hinter" der Häuser-Zeile, und so ist der Blick-Winkel von X_2 aus immer ein spitzer und damit auf jeden Fall kleiner als der Blick-Winkel von X_1 aus, egal ob dieser spitz, recht oder stumpf ist.

Da X_1 „vor" der Häuser-Zeile $\overline{AB}$ liegt, ist sein Blick-Winkel spitz, wenn Z_1 auch „vor" $\overline{AB}$ liegt; er ist recht, wenn $Z_1 = M$; und er ist stumpf, wenn Z_1 „hinter" $\overline{AB}$ liegt. – Diese drei Fälle treten ein, wenn man in dem o.a. Term $z > 0$, $z = 0$ bzw. $z < 0$ ansetzt:

Der Blick-Winkel ist also vom Punkt X_1 mit der x-Koordinate $\sqrt{\dfrac{k^2-h^2}{1+m^2}}$ aus maximal. Er ist spitz bzw. recht bzw. stumpf, wenn die Verhältnisse zwischen Straße und Häuser-Zeile $1+m_2<\dfrac{k^2}{h^2}$ bzw. $1+m_2=\dfrac{k^2}{h^2}$ bzw. $1+m_2>\dfrac{k^2}{h^2}$ lauten. Im Fall $m=0$ liefert auch X_2 mit der x-Koordinate $-\sqrt{\dfrac{k^2-h^2}{1+m^2}}$ den maximalen Blick-Winkel (der dann nur spitz sein kann).

Nun zu dem Sonderfall: Sind die Häuser-Zeile und die Straße parallel, dann soll die Häuser-Zeile wie in Abb. 4 im Koordinaten-System liegen und die Straße durch die Gleichung $x=k$ mit $k>0$ beschrieben sein (Abb. 5). Mit den Bezeichnungen wie in Abb. 4 gilt für den Radius des (allgemeinen) Fass-Kreises über $\overline{AB}$ mit dem Mittelpunkt Z die Gleichung $r=\sqrt{h^2+z^2}$. Der Fass-Kreis berührt die Gerade $x=k$ genau dann, wenn $z+\sqrt{h^2+z^2}=k$, woraus sich die Bedingung $z=\dfrac{k^2-h^2}{2\cdot k}$ ergibt. Für $k>h$ bzw. $k=h$ bzw. $k<h$ ergibt sich $z>0$ bzw. $z=0$ bzw. $z<0$ und damit ein spitzer bzw. rechter bzw. stumpfer maximaler Blick-Winkel, jedes Mal vom Punkt $Y_0=(k;\,0)$ aus.

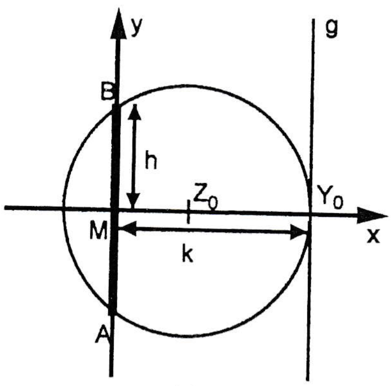

Abb. 5

Lösung mit Differential-Rechnung (mit dem Koordinatensystem wie in Abb. 4):

Sei $w=w(x)$ der Blick-Winkel, unter dem die Häuser-Zeile von dem Straßenpunkt $X=(x;\,m\cdot x-k)$ aus gesehen wird. Wir zerlegen w in zwei Teil-Winkel u und v, die durch die Parallele zur x-Achse durch X getrennt sind. Für jeden Beobachtungspunkt X außer $(0;\,-k)$ sind $u(x)$ und $v(x)$ spitze Winkel (Abb. 6).

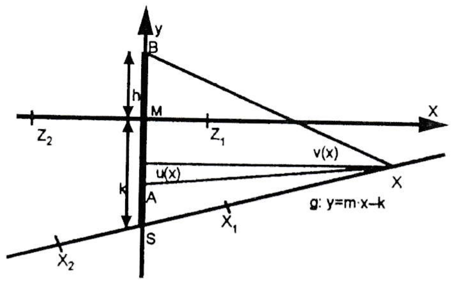

Abb. 6

Wir betrachten zunächst Punkte X mit $x>0$, also wo man im Fall $m>0$ die Häuser-Zeile von „vorne“ sieht. Dort ist

$$u(x)=\arctan\left(\frac{h+(m\cdot x-k)}{x}\right)=\arctan\left(\frac{h-k}{x}+m\right),$$

$$v(x)=\arctan\left(\frac{h-(m\cdot x-k)}{x}\right)=\arctan\left(\frac{h+k}{x}-m\right)\text{ und } w(x)=u(x)+v(x).$$

Falls sich X auf derselben „Höhe" wie die Häuser-Zeile befindet ($-h \le m \cdot x - k \le h$), sind $u(x)$ und $v(x)$ beide positiv. Ansonsten ist zwar einer der beiden Teil-Winkel negativ, die Summe aber immer positiv, wie man sowohl geometrisch, als auch durch Vergleich der beiden arctan-Argumente $s(x) = \frac{h-k}{x} + m$ und $t(x) = \frac{h+k}{x} - m$ für u und v einsieht.

Betrachtet man die Häuser-Zeile von „hinten" ($x < 0$), so wird, mit denselben Funktionstermen, der Winkel $u(x)$ durchweg positiv, der Winkel $v(x)$, mit größerem Betrag, durchweg negativ und der Blick-Winkel $w(x)$ damit durchweg negativ, wird aber nie ein rechter oder gar stumpfer Winkel.

An der Stelle $x = 0$ ist w zunächst nicht definiert. Gemäß der Summenformel $\arctan(s) + \arctan(t) = \arctan\left(\frac{s+t}{1 - s \cdot t}\right)$ (falls $s \cdot t < 1$, nach BRONSTEIN, I. N. u.a.: Taschenbuch der Mathematik. – Thun: Harri Deutsch, 2. Aufl. 1995, S. 74) ergibt sich dann $w(x) = u(x) + v(x) = \arctan\left(\frac{2 \cdot h \cdot x}{(1+m^2) \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot k \cdot x + k^2 - h^2}\right)$, falls der Nenner im arctan-Argument positiv ist, was in einer Umgebung von $x = 0$ gewährleistet ist.

Anschaulich bedeutet diese Bedingung, dass $w(x) = u(x) + v(x)$ ein spitzer Winkel ist. Für $s(x) \cdot t(x) = 1$ ist $w(x)$ ein rechter Winkel, und der arctan-Term für $w(x)$ ist nicht definiert, da der Nenner des arctan-Arguments 0 ist. Ist schließlich $s(x) \cdot t(x) > 1$, dann ist $w(x)$ ein stumpfer Winkel, und zum o.a. arctan-Term für $w(x)$ ist noch der Wert $-\pi$ (bei negativen Winkeln $w(x)$) bzw. π (bei positiven $w(x)$) zu addieren. – In unserer Situation können, wie gesagt, als negative Blick-Winkel $w(x)$ nur spitze Winkel auftreten, und die Sonderfälle sind nur zu beachten, wenn $u(x)$ und $v(x)$ beide positiv sind, also X sich auf der „Höhe" der Häuser-Zeile befindet. Aber dort kann die Funktion ja als die Summe der beiden arctan-Terme für u und v geschrieben werden.

Also ist die Blickwinkel-Funktion w auch für den Fall $x = 0$ und damit auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stetig, differenzierbar und stetig differenzierbar, und zwar ist $w(0) = 0$. Die Abb. 7 zeigt den Graph von w im Fall $h = 1$, $k = 2$ und $m = 1$.

Zunächst ist für $x \neq 0$ die Ableitung

$$\frac{dw}{dx}(x) = \frac{du}{dx}(x) + \frac{dv}{dx}(x)$$

$$= \frac{k-h}{x^2 + (h-k+m \cdot x)^2} - \frac{k+h}{x^2 + (h-k+m \cdot x)^2}$$

und wegen der stetigen Differenzierbarkeit gilt (unabhängig von m)

$$\frac{dw}{dx}(0) = \frac{2 \cdot h}{k^2 - h^2} > 0.$$

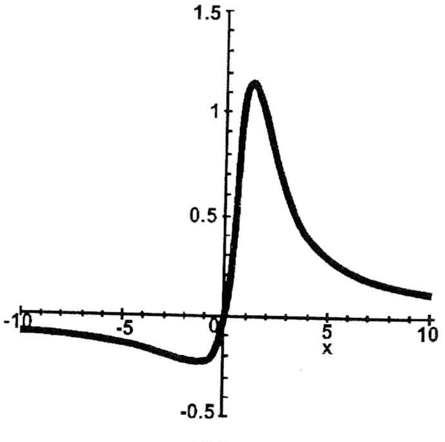

Abb. 7

Nun ist

$$\frac{dw}{dx}(x) = 0 \Leftrightarrow (k-h)\cdot((h+k-m\cdot x)^2 + x^2) = (k+h)\cdot((h-k+m\cdot x)^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{k^2-h^2}{1+m^2}.$$

Nur die beiden Stellen $x_1 = \sqrt{\frac{k^2-h^2}{1+m^2}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{k^2-h^2}{1+m^2}}$ kommen also als Extremal-Stellen für w in Frage. Da $w(0) = 0$, $w(x) > 0$ für $x > 0$, $w(x) < 0$ für $x < 0$ gilt und, wenn x (positiv oder negativ) über alle Grenzen wächst, w gegen 0 geht, handelt es sich bei x_1 um eine Maximal- und bei x_2 um eine Minimal-Stelle.

Der Winkel w hat dort folgende Werte:

$$w(x_1) = \arctan\left(\frac{h}{\sqrt{(k^2-h^2)\cdot(1+m^2)} - m\cdot k}\right) \text{ (falls der Nenner im Argument positiv ist)}$$

und $$w(x_2) = \arctan\left(\frac{h}{-\sqrt{(k^2-h^2)\cdot(1+m^2)} - m\cdot k}\right).$$

Im Fall $m = 0$ ($\overline{AB}$ und g senkrecht aufeinander) sind $w(x_1)$ und $w(x_2)$ betragsgleich, und der maximale Blick-Winkel tritt für beide Stellen x_1 und x_2, also links und rechts von der Häuser-Zeile auf.

Sei nun $m > 0$: Für x_1 ist der Betrag des Nenners kleiner und der Betrag des Winkels damit größer als für x_2. Der Nenner im arctan-Argument bei x_1 ist > 0, $= 0$ bzw. < 0, falls $1 + m^2 < \frac{k^2}{h^2}$, $1 + m^2 = \frac{k^2}{h^2}$ bzw. $1 + m^2 > \frac{k^2}{h^2}$, und dies entspricht den Fällen, dass der Winkel $w(x_1)$ spitz, recht bzw. stumpf ist. Im rechtwinkligen Fall kann $w(x_1)$ nicht in der o.a. Form geschrieben werden; im stumpfwinkligen Fall muss dort noch π addiert werden.

Es ist schließlich noch der Fall zu betrachten, dass g und $\overline{AB}$ parallel sind. Dann sei das Koordinatensystem wieder wie in Abb. 4 bzw. wie in Abb. 5 festgelegt (Abb. 8).

Für den Punkt $Y = (k; y)$ auf der Geraden g wird der Blick-Winkel $w(y)$ wieder durch die waagrechte Gerade durch Y in die beiden Teil-Winkel $u(y)$ und $v(y)$ zerlegt. Für diese ist

$$u(y) = \arctan\left(\frac{h+y}{k}\right) \text{ und}$$

$$v(y) = \arctan\left(\frac{h-y}{k}\right).$$

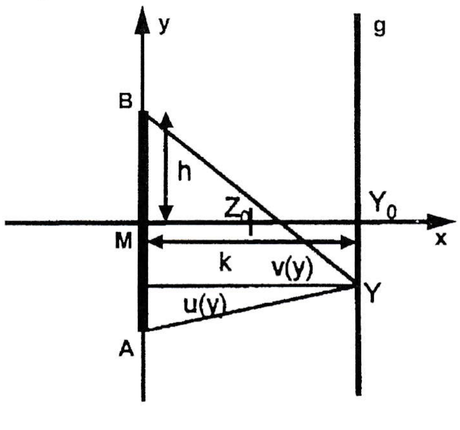

Abb. 8

Die Funktion $w(y) = u(y) + v(y)$ hat (mit $h = 1$ und $k = 2$) den Verlauf wie in Abb. 9 dargestellt.

Für sie ist allgemein

$$\frac{dw}{dy}(y) = \frac{du}{dy}(y) + \frac{dv}{dy}(y)$$

$$= \frac{k}{k^2 + (h+y)^2} - \frac{k}{k^2 + (h-y)^2},$$ und dieser Ausdruck ist genau dann 0, wenn die beiden Nenner gleich sind. Dies wiederum ist genau für $y = 0$ der Fall.

Nur die Stelle $Y_0 = (k; 0)$ kommt also für den maximalen Blick-Winkel in Frage. Dort ist der Blick-Winkel $w(0)$ jedenfalls positiv, und wenn y (positiv oder negativ) über alle Grenzen wächst, gehen u und v mit entgegengesetztem Vorzeichen gegen $\pm\frac{\pi}{2}$ und w gegen 0, so dass tatsächlich Y_0 eine Maximal-Stelle ist.

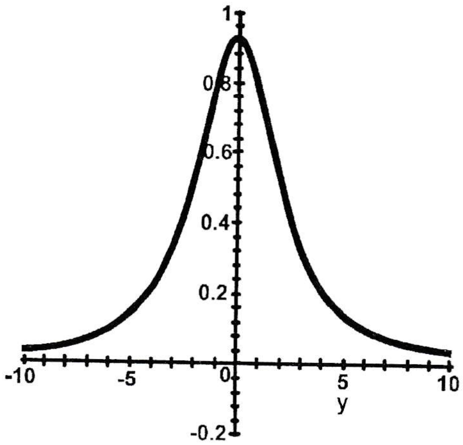

Abb. 9

Literatur

BENDER, P.: Mathematik-didaktische Paradigmen und Computer – unter besonderer Berücksichtigung der Geometrie. – In: KADUNZ, G. u.a. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien. 8. Internationales Symposium zur Didaktik der Mathematik 28.09.–02.10.1998 in Klagenfurt. – Stuttgart & Leipzig: Teubner 1998, S. 33–52.

GÖTZ, S.: Zur geometrischen Lösung eines Extremwertproblems und eine analytische Ergänzung. – Erscheint in: Praxis der Mathematik, 43 (2001)

NEVELING, R.: Bewegte Bilder mit Sketchpad. –- In: HISCHER, H. (Hrsg.): Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht? Bericht über die 14. Tagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" 1996. – Hildesheim: Franzbecker 1997, S. 96–99.

WALSCH, W.: Standardverfahren oder Vielfalt bei Lösungswegen? – In: MALLE, G.; REICHEL, H.-CH. (Hrsg.): Fragen zum Mathematikunterricht. Festschrift zum 70sten Geburtstag von HEINRICH BÜRGER. – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1996, S. 49–61