Peter BENDER
U-GH Paderborn
bender@upb.de

Ziel-Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten

(Vortrag im Kolloquium in Dresden am 06.02.2001)

0. Die Kluft zwischen fachlichen und mentalen Begriffen

Der Mathematik-Unterricht hat den Anspruch, beim Lernenden in irgendeiner Form mathematische Begrifflichkeit aufzubauen. Ein grundsätzliches Problem dabei ist die Kluft zwischen den ent-sinnlichten Begriffen der Mathematik einerseits und dem Bestreben jedes Menschen — auch wenn sie oder er professionelle Mathematikerin oder professioneller Mathematiker ist, und erst recht wenn sie oder er Schülerin oder Schüler (S&S) ist —, sich solche Begriffe sinnhaft zu machen, sie in irgendeinen sinnvollen Kontext einzubinden, andererseits.

Im Extremfall assoziiert der Schüler algerischer Herkunft im Physik-Unterricht eines Pariser Gymnasiums "der Tee im Harem des Archimedes", wenn er nach "le théorème d'Archimède" über den Auftrieb gefragt wird (so der Titel eines bekannten französischen Spielfilms Mitte der achtziger Jahre). **Im Normalfall** entwickeln S&S aber immer noch ihre eigenen Verständnisse und Vorstellungen, die jedoch meistens nur implizit zum Vorschein kommen. Fischbein (1989) nennt sie "tacit models" und beschreibt sie u.a. als simpel, lebensweltlich, robust, autokratisch und einengend. Ihre **Robustheit** resultiert zum einen aus ihrer Verankerung in der Lebenswelt, zum anderen aus ihrer vorübergehend erfolgreichen Verwendung und wird durch ihren autokratischen und einengenden Charakter zu einem negativen Merkmal.

Solche "tacit models" wirken sich im alltäglichen Unterricht dauernd aus; auch bei guten S&S stellt man sie fest! Jede Lehrerin und jeder Lehrer (L&L) hat ihre bzw. seine Erfahrungen damit. Allerdings ist es bei ihrer Entdeckung häufig zu spät: Z.B. in der Sekundarstufe II kann man Fehl-Vorstellungen aus dem Bruch-Rechnen oder der Gleichungs-Lehre o.ä. nur mit großer Mühe noch beseitigen. Aufgabe des Mathematik-Unterrichts ist m.E. selbstredend, von vorneherein eine adäquate Begrifflichkeit auszubilden, die allerdings, wenn sie gegen die "tacit models" bestehen will, ähnlich simpel und lebensweltlich angelegt sein muss.

1. Das Konzept der Grund-Vorstellungen und Grund-Verständnisse (GV&V)

Dies ist also **ein** zentrales Motiv für das Konzept der GV&V.

In seiner Dissertation hat vom Hofe (s. 1996) aus allen Epochen dieses Jahrhunderts vergleichbare Konzepte von Mathematik-Didaktikerinnen und –Didaktikern (D&D) identifiziert. Wenn diese heutzutage in der Mathematik-Didaktik nicht allzu geläufig sind und sie im Unterricht kaum wirksam geworden sind, dann liegt das u.a. an einer gewissen Dichotomie zwischen mathematischem Interesse und Kompetenz und pädagogisch-didaktischem Interesse und Kompetenz bei vielen Kolleginnen und Kollegen (K&K) (auch D&D), an den übergroßen Klassen vergangener Jahrzehnte, die ein Eingehen auf die individuellen geistigen Bedürfnisse der und des Einzelnen unmöglich machten, aber auch an dem vordergründig-pragmatischen Ausbildungs-Auftrag der Hauptschule und der fehlenden Hinwendung zur Psychologie im alten Gymnasium. Mit der Bourbakisierung der Mathematik-Didaktik um 1970 wurde die Entsinnlichung des Unterrichts in den Sekundarstufen sogar zum Programm erhoben, und zwar, wohlgemerkt, unter Berufung auf Bezugs-Wissenschaften wie die Psychologie. Bei dem anschließenden Roll-Back geriet u.a. das Instrument der didaktisch orientierten Sach-Analyse mit ihrer Begrifflichkeit der Grund-Vorstellungen bzw. Grund-Verständnisse, wie sie vor allem von den Kasseler Kollegen Griesel, Kirsch, Blum, Postel verwendet wurden, in die Kritik.

Ich habe dann diese Begriffe mit einem integrierten erkenntnistheoretischen, sozio-psychologischen und fachlichen Konzept unterlegt. Diese Analyse ist an anderer Stelle publiziert, und ich möchte Ihnen jetzt nur stichwortartig die Grundzüge darlegen:

1.1 Das Bestimmungswort 'Grund'

Der wichtige Teil wird vom Bestimmungs-Wort **'Grund'** zum Ausdruck gebracht, das das Konzept auf drei Ebenen prägt:

Allgemeine Verbindlichkeit: Seit einiger Zeit werden in der mathematik-didaktischen Kommunität zwei lern-theoretische Paradigmen mit einer gewissen ideologischen Schlagseite diskutiert und von einzelnen L&L im aktiven Dienst, besonders in der Primarstufe, rezipiert: Konstruktivismus und Interaktionismus. — Selbstverständlich ist den S&S im Unterricht Gelegenheit zu einer eigen'köpfigen' Bildung ihrer kognitiven Begriffe zu geben (anders bilden diese sich gar nicht); und ebenso selbstverständlich unterliegen die Lehr-Lern-Prozesse dem sozialen Geschehen im Klassen-Raum und hängen nicht allein von den L&L ab. Das heißt aber nicht, dass die Ausbildung individuell unterschiedlicher Begriffe zu unterstützen sei. Gerade wenn man auf dem konstruktivistischen und/oder interaktionistischen Standpunkt steht, muss man dafür sorgen, dass der gemeinsame Kern aller entstehenden kognitiven Begriffe möglichst groß ist und mit den eigentlich intendierten Begriffen möglichst weitgehend übereinstimmt. Die immer wieder anzutreffende Ansicht, dass das nicht möglich sei, lässt sich in Anbetracht entgegenstehender umfangreicher Feld-Studien kaum halten (u.a. Weinert 1996).

Verankerung in der Lebenswelt: Damit sind nur in zweiter Linie authentische lebensweltliche Situationen oder gar echte Anwendungen gemeint (solche können schon einmal als angenehme Zugabe auftreten, sind aber i.a. für eine grundlegende Begriffs-Bildung zu komplex), vielmehr sind die L&L recht frei in der Konstruktion solcher Situationen, in denen sie die GV&V entfalten können. Diese müssen im Zeitalter des Fernsehens, Autos, Flugzeugs, Telefons, Computers, Internets usw. keineswegs dem **direkten** Erfahrungs-Bereich der S&S entstammen. Die Situationen können durchaus märchenhafte Züge annehmen; man benötigt Menschen, Tiere und Gegenstände, die mehr oder weniger stark anthropomorphisiert und, unabhängig davon, mehr oder weniger stark mathematisiert sind. Diese müssen irgendwie, nach durchaus willkürlichen Regeln agieren, dabei vielleicht irgendwelche willkürlichen Vorhaben verfolgen und willkürlich Natur- und andere Gesetze beachten, oder auch nicht.

Ein kleines Beispiel: Das **arithmetische Mittel** der Körper-Größen der sechs abgebildeten S&S (**Abb. 1**) kann man sich so vorstellen, dass man die sechs S&S zu einem Turm aufeinanderstellt und dann einen Menschen sucht, von dem sechs exakte Kopien aufeinandergestellt einen Turm derselben Höhe wie der aus den sechs S&S gebildete ergibt. Dessen Körper-Größe ist dann das arithmetische Mittel. — Natürlich muss diese Metapher erweitert oder verändert werden, z.B. wenn negative Zahlen auftreten. Außerdem sind für verschiedene Formeln des arithmetischen Mittels verschiedene Metaphern günstig; ihre Gleichwertigkeit muss gezeigt werden, und spätestens dann müssen sie überwunden werden. Es ist auch gar nicht ihre Bestimmung, komplett durchgehalten zu werden. Sie stellen vielmehr einen Appell an den **gesunden Menschen-Verstand** dar, und dazu ist es geradezu notwendig, auch ihre Grenzen herauszupräparieren.

Fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet (im epistemologischen und psychologischen Sinn): GV&V dienen nicht bloß als Aufhänger zur Einführung eines Teilgebiets, vielmehr sollen sie den Grund legen für eine kontinuierliche, oder auch nur sporadische, inhaltliche Interpretation der weiter zu entwickelnden Begrifflichkeit (die auch Sätze, Regeln, Verfahren usw. umfasst).

1.2 Die Grundwörter 'Vorstellungen' und 'Verständnisse'

'Vorstellungen' und 'Verständnisse' sind zwei zentrale psychologische Konstrukte, über die es eine umfangreiche Literatur gibt, auch in der Mathematik-Didaktik. Sie werden von verschiedenen Autorinnen und Autoren unterschiedlich verstanden, insbesondere entziehen sie sich einer verbindlichen, einigermaßen scharfen Definition. Ich will sie nur in ihren Beziehungen zueinander kurz beschreiben:

Sie stellen zwei Möglichkeiten dar, kognitiv an einer Situation teilzuhaben. Vorstellungen gehören eher dem bildhaften, analogen Denk-Modus an, Verständnisse eher dem verbalen, propositionalen. Eine klassische didaktische Weisheit besagt, dass Verstehen ohne Anschaulichkeit (zumindest in der Vorstellung) nicht möglich ist. Weniger geläufig ist die umgekehrte Feststellung, dass Vorstellen, ein Aktivieren von Wahrnehmungs-Bildern aus dem Langzeit-Gedächtnis, immer auf einen bestimmten Sinn hin organisiert sein muss und also ohne (Vor-) Verständnis nicht möglich ist (Hörmann 1976).

V&V stehen in einem engen dialektischen Verhältnis. Diese Dialektik wird noch verdoppelt, wenn man den Zusammenhang zwischen den Prozessen des Vorstellens und Verstehens und ihren Ergebnissen analysiert: Natürlich setzen die Ergebnisse die Prozesse voraus, aber diese brauchen schon wieder V&V als Voraussetzung, um überhaupt in Gang zu kommen, usw.

1.3 Merkmale von GV&V

Das GV&V-Konzept ist vage, sowohl von seiner Begrifflichkeit her, aber auch wegen seines ausgeprägt **hermeneutischen** Charakters, wie er sich bei der Konstruktion von GV&V durch die L&L und beim Aufbau von GV&V durch die S&S zeigt. Die Dialektik zwischen den fachlichen Begriffen der Mathematik und den kognitiven der S&S sieht man schön in folgendem von vom Hofe entwickelten Schema **(Abb. 2)**. Dabei wird nicht nur der große Kreis einmal oder mehrmals bei einer bestimmten Begrifflichkeit durchlaufen, sondern auch kleinere Kreise, und zwar sowohl von L&L- als auch von S&S-Seite.

Es ist klar, dass GV&V **sachlich und psychologisch adäquat** sein müssen. Wo dies nicht realisierbar ist, muss auf GV&V verzichtet werden. Und sie müssen **ausbaufähig** sein. Eine wichtige Funktion haben **Metaphern**, die eine Begrifflichkeit sparsam abzubilden haben, sie aber nicht verdunkeln oder gar verfälschen dürfen. Ein Beispiel für eine Verfälschung ist die Darstellung des Kreises in der Logo-Philosophie, nämlich als 360-Eck, das durch die 360-fache Wiederholung der Befehls-Folge 'VORWÄRTS 1 RECHTS 1' erzeugt wird.

Auch bei harmloseren, scheinbar automatisch erfolgversprechenden Merkmalen von GV&V ist Vorsicht am Platze. Ich denke hier an die **'Dynamik'**, die so typisch für unsere Zivilisation ist und, mit durchaus ehrenwerten lern-psychologischen Absichten, gerne an mathematische Begriffe bzw. an die auszubildenden GV&V geheftet wird. Es gibt zumindest zwei Gebiete in der Schul-Mathematik, wo dies leicht in die Irre führt, nämlich **'Abbildungs-Geometrie'** und eben **'Folgen und Grenzwerte'**. Mit letzterem möchte ich mich nun befassen und komme damit zum Haupt-Thema meines Vortrags.

2. Fehl-Vorstellungen und Fehl-Verständnisse (FV&V) bei Folgen und Grenzwerten

Im neuen nordrhein-westfälischen Lehrplan für die Oberstufe (Ministerium 1999) kann man viel über den Erwerb von Schlüssel-Qualifikationen im Analysis-Unterricht lesen; dagegen wird ein **intuitiver** Grenzwert-Begriff für ausreichend erklärt und eine genauere Behandlung dem Leistungs-Kurs in der Integral-Rechnung anheim gestellt. Zum einen schlägt sich in dieser Schwerpunkt-Setzung der pädagogische Zeitgeist der Inhalts-Abstinenz nieder (s. Bender 2000), zum anderen ist einzuräumen, dass mit ihr dem minimalen Erfolg des gymnasialen Analysis-Unterrichts Rechnung getragen wird.

Im Gegensatz dazu sind für mich Folgen und Grenzwerte nach wie vor unverzichtbar zur Grundlegung infinitesimalen Denkens und damit des Analysis-Unterrichts. Dabei denke ich auch an die vielen mathematik-nahen Studiengänge (bis hin zu den modernen Geisteswissenschaften mit ihren mathematik-haltigen Forschungs-Methoden), jedoch eher an den Aspekt der Allgemein-Bildung, zu der ich funktionales Denken überhaupt, aber auch etwa den Begriff der **lokalen** Änderungs-Rate und die Beziehung zwischen Funktion und Ableitungs-Funktion zähle. Den Zusammenhang zwischen Sekanten und Tangenten am Funktions-Graph im $\mathbf{R}^2$ mag man ja noch intuitiv erfassen können. Aber es geht doch darum, diese einseitige, auf das Koordinaten-System bezogene Sichtweise zu überwinden und Analysis in anderen Kontexten zu treiben, etwa bei physikalischen Bewegungs-Vorgängen als primitivstes Beispiel, wo der Begriff der Momentan-Geschwindigkeit eben nicht mehr anschaulich auf der Hand liegt (worüber Hauke Friedrich in Paderborn gerade eine Dissertation anfertigt).

Aber auch wenn man dem Verzicht auf den Folgen- und Grenzwert-Begriff in der allgemeinbildenden Schule etwas abgewinnen kann, so sollten zumindest die L&L sowie Diejenigen Bescheid wissen, die auf diesen Beruf hin studieren, und zwar nicht nur auf dem Niveau der Universitäts-Mathematik, sondern auf dem der GV&V, damit sie einschätzen können, welche Ersatz-Begriffe sie den S&S anbieten sollten und inwieweit die von diesen ausgebildeten Begriffe adäquat sind.

Im folgenden diskutiere ich ein ganzes Bündel möglicher Ursachen für FV&V bei Folgen und Grenzwerten. Für mich folgt daraus, dass wir uns im Unterricht sensibler darum kümmern müssen, welche GV&V bei den S&S entstehen. Dies setzt voraus, dass wir selbst geeignete GV&V haben. Dies dürfte bei L&L und Studierenden häufig nicht der Fall sein, wie ich aus umfangreichen Diskussionen, insbesondere über gewisse Paradoxien, mit meinen Sekundarstufen-II-Studierenden in Kassel und Paderborn im Mathematik-Hauptstudium weiß.

Moderne Video-Technik ermöglicht es inzwischen, mit interpretativen Methoden die Bildung oder Verwendung von GV&V bei S&S und bei Studierenden dingfest und nachvollziehbar zu machen. Im Rahmen seiner Habilitation hat vom Hofe (1998) Unterrichts-Situationen dokumentiert, in denen es um Folgen und Grenzwerte geht (und zwar beim Differenzen-Quotienten), und dabei (nach eigener Aussage) genau die Befunde meiner schon etwas älteren Analyse bestätigt.

Sierpinska (1987, 1990) berichtet über ähnliche Ergebnisse. Zur Erklärung der auftretenden FV&V hat sie, aufbauend auf Traditionen der französischen Mathematik-Didaktik, das didaktisch-psychologische Konstrukt der "mental obstacles" entwickelt, nach dem gewisse Denk-Barrieren charakteristisch für die sachliche Struktur des jeweiligen Begriffs sind und damit einen objektiven, in einer Kultur allgemeingültigen Charakter des Unvermeidlichen haben. — Ich dagegen halte FV&V für Ergebnisse ungünstig verlaufender Prozesse, die aber nicht zwingend so ablaufen **müssen**. Solche ungünstigen Verläufe können durch unpassende außer-schulische Erfahrungen, durch fehlerhafte Instruktionen (auf der Basis von inadäquaten didaktischen Paradigmen und/oder FV&V der L&L)

oder durch eine unglückliche Entwicklung des Geschehens im Klassenraum provoziert werden. Bei gewissen mathematischen Begriffs-Bildungen treten FV&V mit einer solchen Regelmäßigkeit auf, dass sie zwingend zu sein scheinen und die Vermutung von "mental obstacles" sich aufdrängt. Beispiele hierfür sind viele stochastische Begriffe, geometrische Abbildungen und eben Folgen und Grenzwerte.

Sierpinska und Andere sehen solche FV&V als Chance für eine anstrengende und dadurch fruchtbare Auseinandersetzung mit der Begrifflichkeit und sogar als Voraussetzung für deren Erwerb. — Hier stoßen wir auf ein weiteres Paradigma moderner Didaktik: die (über-) positive Sicht auf Fehler. — Auch ich meine, dass Fehler in der Schule nicht 'schlimm' sind und dass man i.a. aus ihnen lernen kann. Aber zugleich hänge ich dem konservativen Prinzip der Fehler-Vermeidung an, bei dem man mindestens genauso viel lernen kann. Ich kann für dieses Prinzip einige, auch grundsätzliche, Argumente beibringen. Vor allem aber lassen mich sämtliche Erfahrungen fürchten, dass einmal ausgebildete FV&V häufig so robust sind, dass sie im Rahmen üblicher schulischer Laufbahnen kaum noch ausgemerzt werden können. Ich plädiere daher dafür, wie gesagt, von vorneherein geeignete GV&V anzusteuern und dann selbstverständlich auch Abweichungen zu diskutieren, aber eben als solche. Dafür benötigen die L&L eine hohe Kompetenz, und es sind sorgfältige didaktisch orientierte, empirisch unterfütterte Sach-Analysen erforderlich.

Das Folgende soll eine solche sein. Sie ist natürlich nicht für die **direkte** Umsetzung in den Unterricht gedacht, sondern ist auf einem elaborierten Niveau für K&K und für Studierende angesiedelt.

Hinweisen möchte ich an dieser Stelle auf das schöne Büchlein über "Grundbegriffe der Analysis" von Hischer und Scheid (1995). Als ich es erstmals zur Hand nahm, freute ich mich über die ausgeprägte Parallelität in der Gedanken-Führung zu mir, wie ja schon der Titel andeutet: Stoff-Didaktik im besten Sinn als Voraussetzung für die Methodik, den Unterricht und die Feld-Forschung.

2.1 Formalismus

Bei der symbolischen Schreibweise " a heißt Grenzwert der Folge (a_n) , falls $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ p\ \forall\ n\geq p$: $|a_n-a|<\varepsilon$ " erschwert offenbar das gehäufte Vorkommen von Quantoren und deren Reihenfolge sowie das Auftreten von Ungleichungen mit Beträgen den Zugang. Dies ist in der Didaktik wohlbekannt und auch empirisch überprüft, z.B. von Herden, Knoche & Pickartz (1983 & 1984).

Problematisch ist zunächst auch einmal die formale Schreibweise, weil man ihr nur mit Mühe einen Sinn entnehmen kann. Günstiger ist hier eine Definition wie: "..., falls in jeder, noch so kleinen, Umgebung von a ein Hauptstück der Folge liegt" (mit den diversen bekannten Varianten wie z.B. "... fast alle"); nach dem wohlbekannten Prinzip des Quantoren-Versteckens. Natürlich sind die Quantoren noch da, die Definition ist dieselbe (eben!), und bei einem konkreten Konvergenz-Nachweis ist nicht anders als vorher vorzugehen. Aber der Formalismus und der Abschreckungs-Effekt sind weg, und zwei Begriffe sind ausgelagert: Umgebung und Hauptstück.

2.2 Das Wesentliche einer Folge: die Hauptstücke

Für GV&V vielleicht noch günstiger als "Hauptstück" wäre eine Sprechweise wie: "..., falls **das Wesentliche** der Folge in jeder, noch so kleinen, Umgebung von a liegt" (wobei es auf den Singular und nicht auf die Substantivierung ankommt) o.ä., obwohl diese mathematisch ähnlich ungenau ist wie "**die** Stammfunktion einer Funktion". Für eine Folge (a_n) gibt es ja **nicht nur ein** Hauptstück, sondern für jedes natürliche p ist die Folge $(a_n)_{n\geq p}$ ein Hauptstück von ihr (und dies sind auch alle). Aber die Rede von **einem** Hauptstück (unter vielen) verleitet dazu, sich eine Folge in verschiedene Hauptstücke eingeteilt vorzustellen, die vielleicht abschnittsweise hintereinander liegen o.ä. Das **Wesentliche** dagegen ist die gemeinsame Eigenschaft aller Hauptstücke, nämlich dass ihnen an der ganzen Folge nur endlich viele Glieder fehlen. Es ist eigentlich nichts anderes als die Folge selbst, bei einer beliebigen Nummer anfangend, für das man also, in Abhängigkeit vom vorgegebenen ε , eine passende Nummer auswählen kann, so dass es in der ε-Umgebung von a liegt. In der Mengen-Sprache lässt sich das Wesentliche einer Folge nicht direkt definieren; man muss dafür wohl doch die Begrifflichkeit der Hauptstücke verwenden.

Für konvergente Folgen (üblicherweise besonders deutlich bei Reihen) ist charakteristisch, dass das **numerisch** Wesentliche am Anfang 'geschieht' und die Folgen-Glieder sich mit wachsenden Nummern immer weniger voneinander unterscheiden. Gegen dieses numerisch Wesentliche ist das **infinitesimal** Wesentliche (s.o.) einer Folge deutlich abzugrenzen: Ersteres ist an Anfangs-Stücke, letzteres (insbesondere auch die Eigenschaft der Konvergenz selbst) an Hauptstücke der Folge gebunden. (Der Ausdruck 'Hauptstück' o.ä. ist m.E. der Wendung 'Endstück' vorzuziehen, damit nicht wieder der Gedanke an ein Ende der Folge aufkommt.) Auch die Rede von **Kurz**- und **Langzeit**-Verhalten ist recht treffend (so lange man keine 'dynamischen' Vorstellungen damit assoziiert).

2.3 Betrags-Striche topologisch verstehen!

Im Betrags-Term kommen einerseits zwei Subjekte, nämlich a_n und a, und andererseits ihr Abstand vor, eine Zahl, die einen anderen ontologischen Status als diese beiden hat. Die **Betrags-Striche** führen aber die S&S in den Bereich der Arithmetik, wo die auftretenden Zahlen prinzipiell gleichberechtigt sind und die Ungleichung dann eine recht komplexe Aussage darstellt. Eine Schreibweise wie $d(a_n,a)$ würde wohl eher auf die erforderlichen topologischen GV&V zielen. Allerdings spricht gegen diese die Überbürdung des Mathematik-Unterrichts mit Symbolen überhaupt. Würde man im $\mathbf{R}^m$ $(m>1)$ arbeiten, hätte man es einfacher (!), sogar noch mit $|a_n-a|$, weil auch diese Symbolik dort zuerst topologisch und nicht als Rechen-Anweisung aufgefasst wird.

In meinem eigenen Studium habe ich erheblich profitiert vom Kennenlernen komplexer Zahlen-Folgen, und zwar genau weil dabei topologische Gesichtspunkte wichtiger sind. In der Schule könnte man wenigstens elementar-geometrische nicht-kollineare Folgen, z.B. auf einer Spirale, betrachten.

2.4 Das 'letzte Glied' einer Folge?

Offenbar liegen die Schwierigkeiten tiefer als nur im Formalismus. Davis & Vinner (1986) haben herausgearbeitet, dass bereits für den scheinbar einfachen Folgen-Begriff ungeeignete Vorstellungen vorliegen, die man i.w. darunter subsumieren kann, dass eine **Folge** ein **letztes Glied** (mit der Nummer ∞) **hat** oder dass man mit ihr zumindest ein solches erreichen kann (was immer hier mit 'erreichen' gemeint sein soll). Mit verantwortlich für diese FV&V ist eine kritiklose Übernahme mathematischer Rede- und Schreibweisen in den Unterricht, insbesondere das Wort 'Grenzwert' selbst: Dieses gehörte ursprünglich zu einem engeren Folgen-Begriff, nämlich dem streng monotonen. Nachdem wir, aus gutem Grund, unseren S&S aber nun diesen austreiben, und der Grenzwert kleiner, gleich und größer als Glieder der Folge sein darf, ist das Wort zumindest missverständlich. Bei durchaus fortgeschrittenen Mathematik-Studierenden mit einem einwandfreien Verständnis vom Grenzwert tauchte das Bild des Graphs einer konvergenten Folge im **NxR** auf mit einer oberen und unteren waagrechten Schranke und einer lotrechten Begrenzung rechts weit draußen auf.

Der Grund dazu wird schon in der Sekundarstufe I gelegt, etwa bei der **Approximation von π** : Da wird eine Folge von Polygonen betrachtet, die immer mehr Ecken haben, bis sie **schließlich** zum Kreis werden. Selbst wenn die L&L solche fehlerhaften Sprechweisen vermeiden, entsteht bei den S&S leicht der Eindruck, dass der Kreis das letzte Element dieser Folge sei; zum einen aus optischen Gründen; zum anderen, weil es ja erklärtermaßen um die **Ermittlung eines Grenzwerts durch einen Grenz-Prozeß** geht: Auch die verbale Beteuerung, dass man den Grenzwert nicht erreicht, verhindert nicht die Vorstellung, dass er am **Ende** der Folge steht, da ja das ganze Unterrichts-Geschehen genau dieses nahelegt; und wenn die Unerreichbarkeit akzeptiert wird, dann wird sie mit begrenzter Zeit und begrenzter Arithmetik von menschlichen und elektronischen Rechnern erklärt.

Überhaupt wird schon in der Sekundarstufe I und später in der Sekundarstufe II mit dem 'Wert' ∞ recht großzügig umgegangen. Man braucht sich dann nicht zu wundern, wenn die S&S dem Faszinosum der liegenden Acht erliegen, mit dem man das Monster 'Unendlichkeit' scheinbar in den Griff kriegt, und es sich (irgendwie) am Ende des Zahlenstrahls vorstellen. Zudem arbeitet man in gewissen Zweigen der Mathematik genau mit einer solchen Ergänzung der Zahlen-Menge (z.B. bei Kardinalzahlen, bei Ordnungs-Relationen oder bei Kompaktifizierungen); diese sind aber nicht Teil der Schul-Mathematik und führen beim Lernen des Konvergenz-Begriffs nur auf Irrwege.

2.5 Der Grenz-Prozeß führt nicht zum Grenzwert!

Ein anderer Typ von Grenz-Prozeß in der Sekundarstufe I ist die **Dezimalbruch-Entwicklung** rationaler Zahlen. Da wird ja üblicherweise hergeleitet, dass $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ ist, postuliert, dass die Gleichung gilt, **wenn man nur unendlich weit geht**, schließlich $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ geschrieben und dies motiviert als eine **Abkürzung für die unendlich vielen Dreien**. Damit wird mit einfachen Worten und Symbolen, aber **unverfälscht**, die Doppel-Natur zum Ausdruck gebracht, die die Mathematik-Didaktik in ihrem Streben nach 'dynamischen' Vorstellungen, dem Grenzwert-Begriff unterstellt: 'lim...' ist eine Anweisung zur Durchführung eines Grenz-Prozesses und zugleich dessen Resultat (s. Blum & Törner 1983, 79).

Nun ist diese Doppel-Natur eines **algebraischen** Terms, gleichzeitig eine Rechen-Anweisung und deren Ergebnis darzustellen, eine gängige und nützliche Auffassung, aber sie versagt, wenn die Anweisung mit dem Durchlaufen einer (unendlichen) Folge verbunden ist. **Ein Grenz-Prozeß führt nicht zum Grenzwert**, weil er kein Ende hat und, selbst wenn er eines hätte, dieses nie erreichen würde.

Deswegen haben S&S recht, wenn sie sich weigern, die Gleichheit $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ bzw. die noch paradoxere $0{,}\overline{9} = 1$ zu akzeptieren. Sie nehmen hier den prozesshaften Teil der ihnen beigebrachten Doppel-Natur wörtlich und bestreiten mit Recht, dass dieser Prozess zum Grenzwert führt. Fischbein (1989) hat beobachtet, dass S&S sogar die Symmetrie der Gleichheits-Relation leugnen, indem sie zwar $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ anerkennen, weil beim Lesen von links nach rechts der Prozess wiedergegeben ist, nicht aber $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$, weil der Prozess nie beendet werden kann und damit keine Gelegenheit besteht, "$= \frac{1}{3}$" zu sagen.

Wirklich verstanden werden kann die Gleichheit $0,\overline{9} = 1$ wohl nur auf höherem Niveau. Sich eine unendlich lange Dezimalzahl hingeschrieben vorzustellen, ist nicht so trivial, wie es die drei Punkte suggerieren, die man nach einigen Stellen hinter dem Komma setzt. Eigentlich verwendet man dabei **eine Folge von abbrechenden Dezimalzahlen** mit immer mehr Stellen. Niemand bezweifelt, dass lim(0,9; 0,99; 0,999; ...) = 1 ist; und $0,\overline{9} = 1$ ist dann nur eine andere Schreibweise für diesen Limes.

Insgesamt fürchte ich, dass noch so sorgfältige Bemühungen, auf der Sekundarstufe I unter Vermeidung des expliziten Grenzwert-Begriffs mit "konkrete[n] Handlungen und Handlungsfolgen (...) infinitesimale Prozesse [zu] induzieren", wozu Hering (1989) zahlreiche Beispiele geliefert hat, widersprüchlich und damit weitgehend zum Scheitern verurteilt sind.

2.6 Ungünstige Schreibweisen

Schreibweisen wie '$\lim\limits_{n\to\infty}$' mit dem Spezialfall '$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$' unterstützen die Vorstellung vom letzten Element. Dabei ist diese Schreibweise überflüssig; 'lim' genügt (passend: 'lim $\sum\limits_{k=1}^{n}$'). Selbst wenn man meint, den Lauf-Index n schreiben zu müssen, was man bei (a_n) in der Form $(a_n)_n$ oder $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ auch nur macht, wenn er nicht eindeutig ist, dann gibt eine Form wie '$\lim\limits_{n}$' oder '$\lim\limits_{n\in\mathbf{N}}$' weniger Anlass zu Missverständnissen, ist aber genauso klar.

Etwas anderes ist es mit der Schreibweise ' $\lim\limits_{x \to x_0}$ ' bei der Analyse von Funktionen: dort ist die Angabe eines Grenzwerts im Definitions-Bereich (einschließlich seinem Rand) erforderlich. Man muss hoffen, dass wer so weit im Curriculum fortgeschritten ist, keine Probleme mehr mit der Annahme eines letzten Folgen-Glieds hat, so dass man ihr oder ihm wohl die übliche Schreibweise zumuten kann. Dabei ist auch $x \to \infty$ zuzulassen, was nicht als Konvergenz gegen ∞ , sondern als Wachsen über alle Grenzen zu interpretieren ist.

2.7 'Durchlaufen' einer Folge

Das Durchlaufen einer Folge muss den Sekundarstufen-I-S&S zu einem **Erlebnis** gemacht werden (so altmodisch dieser Ausdruck klingen mag), und zwar zunächst in **N** :

Wenn man die natürlichen Zahlen durchläuft, kommt man an eine Zahl, wo man ein ganzes Buch braucht, um sie (wohlgemerkt: im Zehner-System; und nicht als Strich-Liste!) aufzuschreiben. Für die nächste braucht man wieder ein ganzes Buch, für die nächste wieder usw. Man kommt an Zahlen, für die man eine ganze Bibliothek, sämtliche Moleküle der Erde, sämtliche Moleküle des Universums braucht, und hat immer noch erst endlich viele, also nichts im Vergleich zur Menge derer, die noch fehlen, **dem Wesentlichen**. Wenn man bedenkt, dass das alles schon bei der Menge der Primzahlen so ist, die im Vergleich zu **N** verschwindend klein ist, wo es vorkommen kann, dass zwischen zwei Primzahlen Trillionen und Aber-Trillionen Nicht-Primzahlen liegen! Nun betrachtet man einmal eine Null-Folge, etwa $(\frac{1}{10^n})$, wo dieselben Effekte auftreten. Usw.

— Ohne solche GV&V von **Folgen**, die auch später immer wieder verlebendigt werden müssen, ist eine adäquate GV&V von **Grenzwerten** m.E. kaum möglich.

2.8 'Erleben' der Konvergenz mit dem Computer?

Auf dem **Computer** lassen sich solche GV&V nur ungenügend 'realisieren', da dessen übliche Arithmetik nicht für das Schreiben langer Zahlen vorgesehen ist. Insbesondere lässt sich mit ihm **nicht Konvergenz 'erleben'**; denn er kann noch so viele Glieder einer Folge ausgeben, — es sind immer nur endlich viele. Seine Leistungsfähigkeit ist sowieso an endliche Verfahren gebunden, wobei in der Praxis die Endlichkeit wegen der üblicherweise nur erforderlichen Genauigkeit aus ökonomischen Gründen erwünscht ist und durch Abbruch-Bedingungen erzwungen wird. Gerade in diesem Zusammenhang ist es für die S&S wichtig einzusehen, dass zu einem Algorithmus Endlichkeit gehört. Sobald nämlich der Computer in einen potentiell unendlichen Prozess gerät, schlägt — paradoxerweise — seine Dynamik in Statik um, deutlich sichtbar z.B. wenn eine Folge stagniert, und zwar unabhängig vom Grenzwert bzw. sogar unabhängig von der Existenz eines solchen (s. Herget 1990 u.v.a.).

Mit bzw. **nach** der Ausbildung eines ordentlichen Grenzwert-Begriffs ist der Computer heutzutage unverzichtbar für Berechnungen aller Art in der Analysis und ihren Anwendungen, aber auch nützlich zum Erleben-Lassen numerischer Effekte wie die oben genannten oder auch unterschiedlicher **Konvergenz-Geschwindigkeiten**, z.B. bei den beiden Folgen $((1+\frac{1}{n})^n)$ und $(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})$, nachdem man sich durch theoretische Argumentation von der Gleichheit ihrer Grenzwerte überzeugt hat. Es sei betont, dass auch Konvergenz-Geschwindigkeit sich nur auf endliche Folgen-Stücke beziehen kann.

2.9 Folgen als Abbildungen von N in R

Ob man lediglich drei oder mit Hilfe des Computers drei Trillionen Glieder der Folge betrachtet; was man noch vor sich hat, wird nie weniger. Man kommt dem Grenzwert im **topologischen** Raum **R** zwar beliebig nahe, aber beim Durchlaufen der Folge (abgesehen von den künstlichen Fällen, wo der Grenzwert selbst Folgen-Glied ist) kommt man ihm keine Spur näher, weil er in der Folge gar nicht enthalten ist.

Dass hier **zwei Arten von Nähern** vorliegen, wird erst richtig durchsichtig, wenn man **Folgen als Abbildungen** von **N** in **R** auffasst. Der Grenzwert ist ein Häufungs-Wert der Werte-Menge; aber er hat (abgesehen von den genannten künstlichen Fällen) kein Urbild im Definitions-Bereich **N** , und es kann keine Rede davon sein, dass man sich ihm (via Urbild) durch irgendein Durchlaufen des Definitions-Bereichs irgendwie nähert. (Das Paradoxon von Zenon beruht genau auf diesem Konflikt zwischen dem Nähern im Definitions-Bereich **N** und dem im Werte-Bereich **R** .)

Mit der Funktions-Auffassung wird auch klar, dass die Grenzwert-Eigenschaft einer Zahl bezüglich einer Folge gar nicht von der Abfolge der natürlichen Zahlen abhängt, sondern nur von der Werte-Menge dieser Folge. Jede Folge, die aus einer gegebenen konvergenten Folge durch Permutation der Glieder hervorgeht, hat denselben Grenzwert wie diese. — Diese überraschende Tatsache stellt die Bedeutung der **dynamischen**, prozesshaften, iterativen, algorithmischen (und was der Schlagwörter mehr sind) **Sichtweise vom Grenzwert** doch tiefgehend **in Frage**.

2.10 Der Grenzwert als Abbildung aus der Menge der konvergenten Folgen nach R

Es kommt noch eine andere Form funktionalen Denkens ins Spiel, nämlich wenn man 'lim' als eine Funktion aus der Menge der konvergenten Folgen nach **R** auffasst und fragt: Was passiert im Werte-Bereich, wenn man den Definitions-Bereich in gewisser Weise durchwandert bzw. Elemente des Definitions-Bereichs miteinander verknüpft u.ä.?

Bekannte Vorschläge wie die Namensgebung 'Beiwert' (die ich noch aus anderen, vorhin bereits besprochenen Gründen für günstiger halte) zielen darauf ab, diesen **Zuordnungs-Charakter** zum Ausdruck zu bringen. Dieser sollte m.E. durchaus formal **expliziert** werden. Da wird nicht Formalismus um seiner selbst willen getrieben, sondern die Universalität des Funktions-Begriffs erfahren, sowie die Grenzwert-Sätze strukturiert und Gleichungen durchsichtig gemacht, in denen 'lim' auftritt.

Schreiben S&S solche Gleichungen auf, so herrscht häufig ein arges Durcheinander (vgl. Bikner & Herget 1984 u.a.): Ob 'lim' vor einen Term geschrieben wird, fällt der Beliebigkeit anheim. Schon die Rede vom Term ist eigentlich nicht korrekt und trägt zur Verwirrung bei. Es sind **Folgen**, von denen da der **Grenzwert** gebildet wird, und dies sollte grundsätzlich in der Schreibweise zum Ausdruck gebracht werden, nämlich durch die Klammern. Etwa $\lim(\frac{14 \cdot n^2 + 6 \cdot n}{7 \cdot n^2 + 5})$ bedeutet 'Grenzwert der Folge $(\frac{14 \cdot n^2 + 6 \cdot n}{7 \cdot n^2 + 5})$ '. Streng genommen müsste noch ein weiteres Klammern-Paar geschrieben werden, nämlich die Funktions-Klammern, also $\lim((\frac{14 \cdot n^2 + 6 \cdot n}{7 \cdot n^2 + 5}))$. Diese lässt man aber weg, und die übrigbleibenden sind die Folgen-Klammern.

Durch den sog. **Grenz-Übergang** werden Beziehungen zwischen Folgen zu Beziehungen zwischen Zahlen, etwa $\lim(\frac{14 \cdot n^2 + 6 \cdot n}{7 \cdot n^2 + 5}) = \lim(\frac{14 + \frac{6}{n}}{7 + \frac{5}{n^2}}) = \frac{14}{7}$ $= 2$. Die Rede vom Grenz-Übergang unterstützt FV&V, wenn man dabei an das Ergebnis des Durchlaufens der Folge denkt; sie ist nur treffend als Bezeichnung für den Übergang von der Menge der konvergenten Folgen (Definitions-Bereich) in die Menge der Grenzwerte (Werte-Bereich).

So ökonomisch eine lim-**Gleichungskette** wirkt, in die sämtliche Rechnungen hineingesteckt sind (z.B. die Herleitung der Produkt-Regel für die Ableitung), so sehr verschleiert sie oft, aufgrund welcher Beziehungen die einzelnen Gleichheits-Zeichen gelten. Meistens wird der Grenz-Übergang nur bei einer einzigen Gleichung gebraucht, und alle anderen sind algebraisch-arithmetischer Natur, die zwar auch zwischen Folgen, aber zunächst zwischen den Folgen-Gliedern bestehen. Um dies zu betonen, sollte man vor dem Hinschreiben der lim-Gleichungskette zuerst diese elementaren Beziehungen fixieren, etwa: Weil für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Gleichung $\frac{14 \cdot n^2 + 6 \cdot n}{7 \cdot n^2 + 5} = \frac{14 + \frac{6}{n}}{7 + \frac{5}{n^2}}$ gilt, deswegen ist ...

2.11 Disparatheit zwischen mathematischer und kognitiver Begrifflichkeit, bis hin zu Paradoxien

In der Sekundarstufe II und im Studium ist es immer noch schwierig genug, den eventuell erworbenen mathematischen Konvergenz-Begriff in der Alltags-Welt zu verankern (ganz abgesehen von der Fortdauer und sogar Verstärkung von FV&V aus der Sekundarstufe I).

Sobald etwa eine Folge in Form einer **Reihe** gegeben ist, bereitet es eine zusätzliche Schwierigkeit, z.B. einzusehen, dass man mit unendlich vielen (besser: ... noch so vielen ...) positiven Summanden eine bestimmte Schranke nicht übertrifft.

Oder **stetige Verzinsung:** Klar ist, dass der Endwert eines Kapitals nach einem Jahr immer größer wird, je mehr unterjährige Zins-Zeitpunkte man einschiebt, ab denen die Zinsen bis jeweils dahin jeweils mit verzinst werden. — Wird der Endwert beliebig hoch, wenn man die Abstände zwischen den Zins-Zeitpunkten beliebig klein macht? — Die Frage klingt gar nicht so abwegig, wenn man sich die rasende Geschwindigkeit vorstellt, mit der eben erst entstandene Zinsen direkt schon wieder mit verzinst werden. — Sie stellt eine Anwendung der Folge $((1+\frac{1}{n})^n)$ dar und ist wegen deren Konvergenz direkt mit 'nein' zu beantworten.

Hat man dann die mögliche Konvergenz von Reihen mit dem Argument plausibel gemacht, dass weiter hinten ja insgesamt fast nichts mehr hinzukommt, muss man diese Plausibilität mit der **harmonischen Reihe** wieder erschüttern, die divergiert, obwohl bei ihr auch weiter hinten insgesamt fast nichts mehr hinzukommt. — Ich möchte jetzt aber nicht die harmonische Reihe analysieren, sondern Ihnen eine geniale Einkleidung von Graham, Knuth & Patashnik (1989, 260ff) (nach einem Hinweis aus dem Darmstädter Didaktischen Tageblatt 96 vom Mai 1991) vorstellen, die zugleich große Zahlen veranschaulicht:

Auf einem **Gummi-Band** der Länge 1 m kriecht ein ausdauernder **Wurm** vom einen Ende los mit einer Geschwindigkeit von $1\ \frac{\text{cm}}{\text{min}}$ in Richtung des anderen Endes. Dort hält sich der Besitzer des Bandes auf. Dieser ist ebenso ausdauernd wie der Wurm und hat außerdem einen schlechten Charakter. Sein Lebens-Inhalt besteht darin, den Wurm zu frustrieren: Am Ende jeder Minute streckt er das Band, und zwar so, dass es 1 m länger ist als vorher. Bei dieser Streck-Operation verbleibt der Wurm auf seiner **relativen** Position auf dem Band. Also hat der Wurm

nach 1 Minute Kriechen	1 cm hinter sich,	99 cm vor sich,
nach dem Strecken des Bands $(\cdot\frac{2}{1})$	2 cm hinter sich,	198 cm vor sich,
nach 2 Minuten Kriechen	3 cm hinter sich,	197 cm vor sich,
nach dem Strecken des Bands $(\cdot\frac{3}{2})$	4,5 cm hinter sich,	295,5 cm vor sich,
nach 3 Minuten Kriechen	5,5 cm hinter sich,	294,5 cm vor sich,
nach dem Strecken des Bands $(\cdot\frac{4}{3})$	$7\frac{1}{3}$ cm hinter sich,	$392\frac{2}{3}$ cm vor sich,

usw.

Die Strecke, die der Wurm noch vor sich hat, wird also immer länger. — Wird er das andere Ende erreichen? — Der Wurm hat zurückgelegt:

nach 1 Minute $\frac{1}{100}$ des Bands,

nach 2 Minuten $\frac{1}{200} + \frac{1}{100}$ des Bands,

nach 3 Minuten $\frac{1}{300} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}$ des Bands,

...,

nach n Minuten $\frac{1}{100}\cdot(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+...+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1})$ des Bands.

Da die harmonische Reihe divergiert, gibt es ein n, so dass $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \geq 100$. Der Wurm erreicht also das andere Ende, und zwar (nur mit dem Computer zu berechnen) nach $n =$ 15.092.688.622.113.788.323.693.563.264.538.101.449.858.497 Minuten. Das sind etwa $287 \cdot 10^{33}$ Jahrhunderte. Das Band hat dann eine Länge von $1{,}6 \cdot 10^{27}$ Lichtjahren und ist damit viel länger als das Universum. Seine Moleküle sind so weit auseinander, dass die Erde jeweils bequem zwischen zwei passt.

Zum Prüfstein wirklichen Verstehens werden dann die Paradoxien:

Zenon: Natürlich holt **Achilles** die **Schildkröte** trotz zehnfacher Geschwindigkeit nie ein, wenn der Abstand die Strecke beträgt, für die er 1 Zeiteinheit braucht und wir den Wettlauf zu den Zeitpunkten 1; 1,1; 1,11; 1,111; ... beobachten: Der Einhol-Zeitpunkt $\frac{10}{9}$ ist zwar Grenzwert dieser Folge, aber wird in ihr nicht erreicht. Achilles kommt der Schildkröte noch nicht einmal beliebig nahe, wenn wir z.B. als Zeitpunkte $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \ldots$ wählen. — Diese Wahl der Zeitpunkte kann man sich als Drehen eines Films vorstellen, wobei zu jedem der gewählten Zeitpunkte ein Bild belichtet wird. Dabei wird das Prinzip der **Zeit-Lupe** verwendet: Die Abstände zwischen den Aufnahmen werden kürzer gemacht, hier: **immer** kürzer, und der Film dann mit konstanter Geschwindigkeit abgespielt. Im Film werden beide, Läuferin und Läufer, immer langsamer, der Einhol-Zeitpunkt wird durch die Zeit-Lupe immer weiter hinausgezögert und bei beiden oben beschriebenen Filmen (dem klassischen und dem mit den Zeitpunkten $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \ldots$) nie erreicht, egal wie lang man sie laufen lässt. In der realen Zeit und im Film bei vielen anderen Folgen von Zeitpunkten (es muss nur $\frac{10}{9}$ überschritten werden) überholt Achilles selbstverständlich die Schildkröte.

Zwischen 0 und $\frac{10}{9}$ gibt es eben überabzählbar viele Zeitpunkte, unter denen man sich nur abzählbar viele heraussuchen und diese als Folge auffassen muss, um den Effekt zu erreichen, dass man, wenn man diese Folge von Zeitpunkten (als Beobachterin oder Beobachter) durchläuft, nie den Zeitpunkt $\frac{10}{9}$ erreicht und damit nie die Situation, wo Achilles die Schildkröte einholt oder ihr gar voraus ist. Diese Folge von Zeitpunkten muss weder monoton sein, noch konvergent sein, noch gegen $\frac{10}{9}$ konvergieren, sie muss nur im halb-offenen Intervall $[0; \frac{10}{9}[$ liegen.

Noch eklatanter ist das Beispiel des **hüpfenden Balls**, bei dem jede und jeder beobachten kann, dass er nach endlicher Zeit liegen bleibt. Wenn man einmal alle Stör-Effekte der Realität und quanten-physikalische Argumente ausschließt und nur eine geometrische Abnahme der Höhe (etwa mit dem positiven Faktor p (<1)) und eine geometrische Abnahme der Zeit (etwa mit positivem q (<1)) zwischen je zwei Boden-Berührungen annimmt, so haben sogar noch viele Sekundarstufen-II-Lehramts-Studierende der Mathematik im Hauptstudium die Vorstellung, dass ein Ball, den ein Neanderthaler hüpfen ließ, noch heute und in alle Ewigkeit hüpfen müsste, obwohl sie den Grenzwert $\frac{1}{\substack{\cancel{q-1}\\ 1-q}}$ der geometrischen Reihe sehr wohl kennen.

Sie unterscheiden nicht zwischen der realen Zeit (die hier mit $\mathbf{R}$ identifiziert ist) und einer Zeit auf der Meta-Ebene, die beim **gleichförmigen** Durchlaufen der Folge, also von $\mathbf{N}$, vergeht (vgl. Kaput 1979). Auch bei diesem Beispiel hilft die Vorstellung von einer Film-Aufnahme in Zeit-Lupe, und erst recht eine gewisse Formalisierung: Selbstredend können in endlicher Zeit unendlich viele Vorfälle (Boden-Berührungen) hintereinander geschehen: Wird die Gesamt-Zeit durch die Boden-Berührungen in lauter Intervalle zerlegt, hat das erste die Länge 1 sec und jedes folgende die 0,8-fache Länge seines Vorgängers, dann ist in 5 sec alles vorbei.

3. Ein kurzes Schlusswort

Die beschriebenen Paradoxien oder auch die Gleichheit $0,\overline{9} = 1$ sind m.E. Prüfsteine für wirkliches Durchschauen des Folgen- und des Grenzwert-Begriffs. Wer meint, solche Probleme Sekundarstufen-II-S&S nicht zumuten zu können, kann mit seinem ganzen Analysis-Unterricht zu Hause bleiben, weil sie oder er den (meisten) S&S damit die Fähigkeit zum infinitesimalen Denken abspricht.

Literatur

Bender, Peter (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 44, 238–243

Bender, Peter (2000): Zwei Kulturen im Bildungswesen — und der Beitrag der Mathematiklehramts-Ausbildung zu ihrer Integrierung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000. Hildesheim: Franzbecker, 97–100

Bikner, Angelika & Wilfried Herget (1984): Fehler im Analysisunterricht. In: mathematiklehren 5, 54–57

Blum, Werner & Günter Törner (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

Davis, Robert B. & Shlomo Vinner (1986): The Notion of Limit. Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. In: Journal of Mathematical Behavior 5, 281–303

Fischbein, Efraim (1989): Tacit Models and Mathematical Reasoning. In: For the Learning of Mathematics 9, Heft 2, 9–14

Graham, Ronald L., Donald E. Knuth & Oren Patashnik (1989): Concrete Mathematics — A Foundation for Computer Science. Reading, Mass., u.a.: Addison-Wesley

Herden, Gerhard, Norbert Knoche & Ulrich Pickartz (1983 & 1984): Eine Untersuchung zur Diskussion über Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff. In: Journal für Mathematik-Didaktik 4, 263–305 & 5, 211–237

Herget, Wilfried (1990): Konvergenz-Experimente mit dem Computer. In: mathematiklehren 39, 49–56

Hering, Hermann (1989): Begriffsentwicklung und präformales Beweisen bei infinitesimalen Prozessen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 10, 123–140

Hischer, Horst & Harald Scheid (1995): Grundbegriffe der Analysis. Heidelberg: Spektrum

Hörmann, Hans (1976): Meinen und Verstehen. Frankfurt: Suhrkamp

Hofe, Rudolf vom (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In Journal für Mathematik-Didaktik 13, 345–364

Hofe, Rudolf vom (1996): Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik. In Journal für Mathematik-Didaktik 17, 238–264

Hofe, Rudolf vom (1998): Probleme mit dem Grenzwert — Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. In Journal für Mathematik-Didaktik 19, 257–291

Kaput, James J. (1979): Mathematics and Learning: Roots of Epistemological Status. In: Jack Lochhead & John Clement (Hrsg.): Cognitive Process Instruction. Research on Teaching Thinking Skills. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 289–303

Ministerium für Schule, Weiterbildung, Wissenschaft und Unterricht Nordrhein-Westfalen (1999): Richtlinien und Lehrpläne Sekundarstufe II. Frechen: Ritterbach

Sierpinska, Anna (1987): Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. In: Educational Studies in Mathematics 18, 371–397

Sierpinska, Anna (1990): Some Remarks on Understanding in Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 10, Heft 3, 24–36

Weinert, Franz E. (1996): Thesenpapier zum Vortrag "Ansprüche an das Lernen in heutiger Zeit". München: Manuskript

Abb. 1

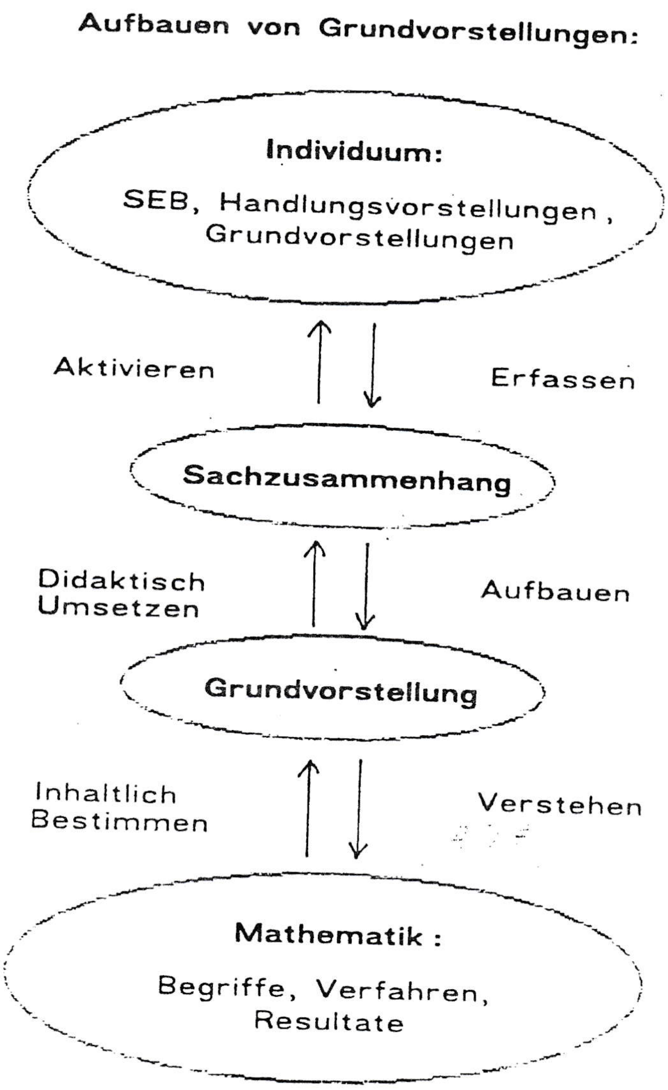

Abb. 2 (nach vom Hofe 1992)