Schul-Geometrie und Computer-Geometrie

Peter Bender, Paderborn

Abstract: *With the use of so called dynamical geometry software (DGS) in school arise several epistemological and didactical problems: Laying the accent on plane figures can be seen as a step back compared with the attempts in the last decades to relate geometry in school to the students' everyday lives, to applications, and to other disciplines. Whereas conventional Euclidean geometry could be treated adequately in the language of (static) point sets, it now consists of moving and deforming geometric forms, which entails a more complicated language including mappings with the time as a parameter. This also results in a change in students' mental concepts, this change being not yet investigated satisfactorily by geometry didactics. Experience shows that the variations of geometric situations effected by the students with the help of the drag mode of DGS are not self explanatory at all. There is a need for much guidance by the teacher and a contemplative (instead of the well-known computer actionist) atmosphere in the class room.*

1. Computer-, Schul- und Lebenswelt-Geometrie

Aus didaktischer Sicht kann man **grob drei Ebenen** mathematischer Begrifflichkeit und überhaupt mathematischen Tuns unterscheiden:

— eine fach-inhaltliche i.e.S. (Universitäts-Mathematik),

— eine erkenntnis-theoretische (Stoff-Didaktik i.w.S.) und

— eine psychologische (Kognition der Lernenden) Ebene.

Bei dieser Fokussierung (unter Vernachlässigung der sozialen Kategorie) stellt Unterricht vor allem eine Harmonisierung der **zweiten und dritten Ebene** dar, wobei es sich um Akte der Gegenseitigkeit handelt mit einem Primat der epistemologischen Begriffs-Ebene (den allerdings manche Vertreterinnen & Vertreter moderner Pädagogik, insbesondere solche, die sich als Konstruktivistinnen & Konstruktivisten verstehen, ablehnen). Die Universitäts-Mathematik hat natürlich Einfluss auf die Epistemologie, allerdings nur zusammen mit anderen Feldern wie Anwendungen, Historie, Alltags-Gebrauch, pädagogische Dimension, soziale, kognitive Aspekte usw. Auf Unterricht kann sie nur in sehr vermittelter, vager Weise wirken; in den Zeiten der sog. Neuen Mathematik vor 30 Jahren hat man dies schmerzhaft erfahren müssen. Dennoch ist es mir wichtig, auf dieser Tagung einiges über fach-inhaltliche Hintergründe von sog. Dynamische-Geometrie-Software (DGS) zu erfahren, weil ich mir eine Bereicherung der Stoff-Didaktik verspreche.

Wenn wir über das **didaktische** Potenzial von DGS reden, so dürfen wir nicht die historische Tatsache außer Acht lassen, dass zum weltweiten Niedergang des Geometrie-Unterrichts trotz seines freundlichen Images u.a. die **Reduktion auf lebenswelt-fremde** Konstruktions- und Beweis-Aufgaben geführt hat, und dass daran auch der groß angelegte Versuch mit der Abbildungs-Geometrie wegen deren begrifflichen Schwierigkeiten nichts ändern konnte. In der Geometrie-**Didaktik** hat man in den letzten Jahrzehnten diese Entwicklung aufhalten und umkehren wollen, indem man z.B. **den Lebenswelt-Bezug, die Räumlichkeit und universelle mathematische Ideen** stärker betonte. Entscheidend waren z.B. bei Bender & Schreiber (1985) die **zweck-gerichteten Gebrauch und Herstellung** geometrischer Formen, Beziehungen und Veränderungen **als Konstituenten geometrischer Begriffe**. Davon findet man in den aktuellen DGS (durchaus einsehbar) nichts. Vielmehr feiert die alte Papier-und-Bleistift-Geometrie (selbstredend mit einigen Erweiterungen, insbesondere Bewegung & Verformung der Figuren) fröhliche Urstände. Gerade die **Verformbarkeit** wiederum hat einen **lebenswelt-fernen** Zug: Man findet sie (natürlich) in CAD-Systemen, bei mit ästhetischer oder geometrie-didaktischer Absicht gespannten Gummi-Bändern oder bei einem aufzublasenden Luft-Ballon und natürlich oft extrem unrealistisch in den sich mehr und mehr ausbreitenden virtuellen Welten (Zeichentrick-Filme, computer-animierte Filme, Computer-Spiele, Werbe-Spots, Video-Clips usw.). **Aber in der realen Welt** funktionieren bewegliche Maschinen und sonstige Vorrichtungen aus elementar-geometrischer Sicht nach wie vor nur, weil ihre in den Gelenken beweglichen Teile selbst starr sind (einfache Beispiele: Storchen-Schnabel, Scheiben-Wischer, Otto-Motor). Dies lässt sich zwar alles in DGS darstellen, aber steht nicht im Zentrum des Interesses.

— Vermutlich u.a. deswegen nicht, weil die meisten Kolleginnen & Kollegen, die sich mit Computergeometrie-Didaktik befassen, in der **Tradition der gymnasialen Geometrie** stehen. Diese gehört selbstverständlich **auch** in ein modernes Geometrie-Curriculum, aber eben im Verbund mit anderen Formen des Geometrie-Treibens. Leider **fehlt** ein solches Curriculum; und hier sehe ich die Computergeometrie-Didaktik in der Pflicht, die ja durchaus Vorschläge zur radikalen Veränderung des Unterrichts macht. Ich unterstelle, dass niemand in der allgemeinbildenden Schule ausschließlich mit DGS gearbeitet haben möchte, und da müsste schon einmal ein **DGS-einbeziehendes Curriculum entwickelt** werden, und zwar vom 1. bis zum 13., oder wenigstens bis zum 10. Schuljahr, das nicht vom Rechner, sondern von den Schülerinnen und Schülern ausgeht, mit rechner-bezogenen und (besonders in den ersten Jahren eher) rechner-losen Aktivitäten, mit Alternativen (die eventuell auch für unterschiedliche Schul-Arten gedacht wären), mit Begründungen, die für die eine oder andere Alternative sprächen, usw. Dieses Curriculum wäre zunächst nicht für eine flächen-deckende Realisierung, sondern, verbunden mit praktischen Erprobungen, für die didaktische Diskussion gedacht. Ich habe Verständnis für Jede & Jeden, die & der hier zögert. Das ist eine Heiden-Arbeit, viel umfangreicher und schwieriger als Schulbuch-Schreiben (wo man wenigstens noch von der Konkurrenz abschreiben kann) und zugleich viel undankbarer, weil man nichts daran verdient, aber aus allen Ecken angegriffen wird.

2. Grund-Vorstellungen & Grund-Verständnisse für Figuren und deren Bewegungen und Verformungen

Ebene als Punkt-Menge: Wohl wird die Auffassung der Ebene als Punkt-Menge durch den Bildschirm mit seinen Pixeln gestützt (unbeschadet der natürlich schon immer fehlenden Idealisierung zu 'echten' Punkten), ebenso der Begriff der Abbildung als einer Funktion mit der Ebene als Definitions- und Werte-Bereich durch die **übergangslose** Erzeugung einer Bild-Figur auf einen Schlag nach einer Abbildungs-Vorschrift (Verschiebung gemäß einem Pfeil, Schräg-Spiegelung an einer Achse in einer Richtung, Inversion an einem Kreis usw.).

Fraglich ist aber, was man sich unter der **Bewegung** (oder Verformung) einer Figur vorzustellen hat, wo sich doch bei einer Punkt-Menge nichts verändert. — Nun, nicht die Figur, sondern der Status der Punkte (bzw.: Pixel), gefärbt zu sein und sich damit zu einer Figur zusammenzufügen, bewegt bzw. verändert sich von Moment zu Moment, und nur dadurch bewegt bzw. verändert sich scheinbar das von der Betrachterin & dem Betrachter fokussierte Objekt (Bender 1982, 1989, 1991, 1996, 1998).

Solche **Metaphern** stoßen in der Kommunität leider auf wenig Resonanz. Da interessiert man sich anscheinend mehr für elaboriertere Aufgaben-Lösungen fortgeschrittener Probandinnen & Probanden (tun wir in Paderborn mit unserem Evaluations-Projekt zur Elementargeometrie Vorlesung ja jetzt auch; s. Bender 2001), während die didaktische Kategorie der **Grund-Vorstellungen & Grund-Verständnisse** (s. Bender 1991 und vom Hofe 1992) m.E. erheblich unterschätzt wird, auch und gerade in der Computer-Didaktik.

Verdoppelt wird diese **Punktmengen-Metapher** bei geometrischen Abbildungen (inklusive Ortslinien-Konstruktionen): Die Bewegungen &Verformungen von Figuren im Definitions-Bereich ziehen über die Funktions- bzw. Konstruktions-Vorschrift (bzw. über die Reaktion des Computers, zu der eine explizite Vorschrift gesucht ist) ebensolche im Werte-Bereich nach sich (dies ist das Grund-Muster **funktionalen Denkens**). Diese Bewegungen (& Verformungen) müssen sorgfältig unterschieden werden von den Abbildungen (s.o.), die leider auch 'Bewegungen' genannt werden und deren Begriffs-Bildung weniger durch DGS als durch die grafischen Möglichkeiten des Rechners überhaupt unterstützt werden kann.

Ich kann mir kaum ein **Beispiel funktionaler Abhängigkeit** in der Elementar-Geometrie vorstellen, dessen Durchschauen nicht durch eine Implementierung auf einer **DGS gefördert** werden könnte: Höhen-Schnittpunkt eines Dreiecks in Abhängigkeit von einer Ecke; Flächen-Inhalt eines Dreiecks in Abhängigkeit von einer Ecke, Veränderung des Bild-Punkts unter einer Kreis-Inversion bei Wanderung des Ur-Punkts usw. Besonders fasziniert mich immer der Umfangswinkel-Satz mit seinem Umfeld.

Mit solchen Aktivitäten frönt man einem (im Bewusstsein der Didaktik allerdings kaum verankerten) Grund-Ziel mathematischer Betätigung:

Sich einen **Überblick über eine Situation verschaffen**; eine Situation komplett darstellen, inklusive Sonder- und Rand-Fällen, Grenzen, Gegen-Beispielen usw.

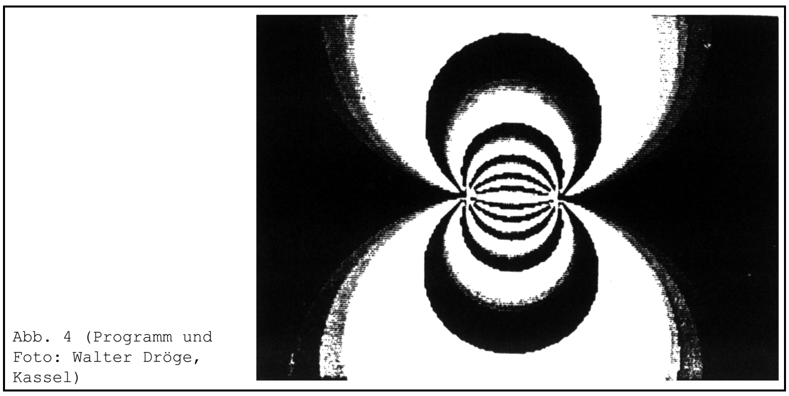

Abb. 1 (aus Bender 1989, 105)

Die Verhältnisse beim Umfangswinkel-Satz kann man z.B. durch Farb-Intensität o.ä. wiedergeben (unterschiedliche Winkel durch unterschiedliche Farben oder Grau-Töne; **Abb. 1**) oder in natürlicher Weise durch Säulen über der Ebene (größere Winkel durch höhere Säulen). Da hat man dann ein direkt einleuchtendes Beispiel für eine wesentliche Singularität, nämlich in den beiden fixen Dreiecks-Punkten A und B , und wenn man orientierte Winkel betrachtet, sieht man auch einmal eine ganze Strecke, nämlich die zwischen diesen beiden Punkten, wo diese Winkel-Funktion in natürlicher Weise unstetig ist.

Modifiziert man noch den elementar-geometrischen Winkel-Begriff mit seinen Maßen zwischen -180° und 180° und geht zum Begriff des Dreh-Winkels mit beliebigen reellen Maßen über, dann drängt sich beim Wandern mit dem Punkt C_t in der Ebene (unter Meidung von A und B) die Idee der (viel-blättrigen) Überlagerung auf. So erhält man einen anschaulichen Prototyp für das Problem der Unvereinbarkeit von Stetigkeit und Eindeutigkeit, das bei der Entwicklung einer DGS fundamental ist (s. Gawlick und Kortenkamp, beide in diesem Band).

Dem Grund-Ziel mathematischer Betätigung, eine Situation vollständig zu erfassen, dient auch die **Kristallisierung (flüchtiger) Bewegungen &Verformungen zu (stabilen) Formen**, d.h. Verwandlung der Zeit- in eine Orts-Größe bzw. eines Parameters in eine Variable. Die stetige Bewegung & Verformung einer Figur $\mathbf{F}$ ($\subseteq \mathbf{E}^2$) stellt man ja einfach als

$b: \mathbf{F} \times [0;1] \rightarrow \mathbf{E}^2$

dar, und die Verwandlung des Zeit-Parameters in eine Orts-Variable ergibt

$b \times id: \mathbf{F} \times [0;1] \rightarrow \mathbf{E}^3$,

z.B. für die Rotation eines Quadrats um seinen Mittelpunkt eine Schrauben-Fläche (**Abb. 2**). Es war seinerzeit nötig, diese Dinge auszuführen, weil auch im Kolleginnen- & Kollegen-Kreis der Unterschied zwischen sog. 'Bewegungen' (Permutationen der Ebene) und 'realen' Bewegungen nicht immer geläufig war. Allerdings bin ich bei kartesischen Koordinaten geblieben und habe nicht daran gedacht, Anfangs- und End-Lage zu identifizieren und die entstehenden Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

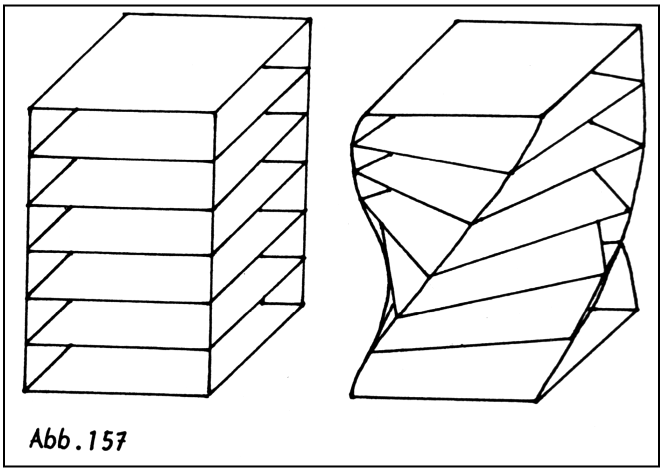

Abb. 2 (aus Bender & Schreiber 1985, 173)

Mathematisch sind diese Bewegungen & Verformungen, vor jeder DGS, **schon immer virulent; aber auch geometrie-didaktisch** beschäftigt man sich schon lange mit Bewegungen & Verformungen mit Hilfe von Figuren-Scharen. Kusserow (1928) müsste auch Jüngeren bekannt sein, weil er 1985 noch einmal nachgedruckt wurde. Wenigstens wird hin und wieder Treutlein (1911) zitiert, aber es gibt noch ältere Lehr-Bücher mit Bewegungs- & Verformungs-Geometrie, z.B. Müller (1874ff) und Kruse (1875) oder letztlich Clairaut (1741).

Aus medialer Sicht könnte man an dieser Stelle vorbringen: Die vollständige Erfassung einer Situation sei ja schon dadurch gegeben, dass ein Film von der Bewegung & Verformung existiert oder gar lediglich eine DGS-Situation im Internet abgelegt ist, aus der heraus man jederzeit die Bewegung & Verformung konstruieren kann; das Medium besitze also die Qualität, die explizite mathematische Behandlung zu ersetzen. — Dieses Argument sticht deswegen nicht, weil einerseits auch schon eine simple Zeichnung dieses Potential hätte und andererseits die Erfassung der Situation ja gerade darin besteht, so weit wie möglich aus etwas begrifflich, zeitlich und räumlich Disparatem etwas begrifflich, zeitlich und räumlich Simultanes zu machen (durch Kontrast-Bildung, Vergleichzeitigung, visuelle Darstellung usw.). Die mit dem Quadrat erzeugte Schrauben-Fläche erfüllt dieses; sie **enthält nicht nur** ein **Bewegungs- & Verformungs-Potenzial, sondern sie ist**

geronnene Bewegung & Verformung, die direkt **wieder verflüssigt** werden kann, indem man die dritte Variable wieder in die Zeit verwandelt. Praktisch kann man diesen Körper als Papier-Stapel, d.h. als eine (wie bei der DGS letztlich auch) diskrete Abfolge von Zuständen auffassen, die man mit dem Daumen-Kino so schnell aufeinander folgen lässt, dass sich für das menschliche Auge eine kontinuierliche Veränderung abspielt (Prinzip des Zeichentrick-Films). In den Klagenfurter Visualisierungs-Workshops in den 1980-er Jahren, federführend von Hermann Kautschitsch veranstaltet, wurden dazu viele praktische und theoretische Erkenntnisse gewonnen, die zur Kenntnis zu nehmen der Computer-Gemeinde heute noch gut tun würde, die allerdings auch in dem Bericht über die deutsch-sprachige Geometrie-Didaktik der (damals) letzten 20 Jahre (Graumann u.a. 1996) nur mit **einer** (!) Zeile (S. 178) gewürdigt wurden.

3. Die Erfordernis von Vorgaben und von Muße

Eine andere **alt-bewährte Methode der Visualisierung** von Bewegungen & Verformungen besteht in einer **cartoon**-artigen Abfolge von Bildern einiger wesentlicher Stationen, und diese ist Lern-Prozessen ausgesprochen förderlich (so in der Tendenz z.B. Lewalter 1997). Ich mache dafür vor allem die **Muße** verantwortlich, die der Betrachterin oder dem Betrachter hier faktisch zur Verfügung gestellt wird (u.a. Bender 1989, 1998). Diese Muße hat weniger mit dem Homo ludens zu tun, den Horst Hischer (1994) im Sinn hat, und sie ist mit Anstrengung verbunden, und zwar ist sie Voraussetzung für die zum Durchschauen oder auch nur sinn-haften Beobachten von Auffälligkeiten erforderliche Konzentration.

In der **Geringschätzung** dieser Muße hat sich ja **'die' Computer-Didaktik mit 'der' modernen Pädagogik** in ihrem (m.E. übertriebenen) Streben nach Schülerinnen- & Schüler-Zusammenarbeit und -Eigen-Aktivität sowie Lehrerinnen- & Lehrer-Zurückhaltung **getroffen**. Der **Bully-Effekt** (dauernde Herausforderung zu irgendwelchen Aktionen auf dem Bildschirm, s. Bender, 1987, 42) des Computers wird durch die Vermeidung von Vorgaben und die erzwungene Zusammenarbeit eher verstärkt. Die drastischen Szenen, die Krummheuer (1989) beschrieben hat, wurden zwar damit abgetan, dass es sich um Haupt-Schülerinnen & -Schüler und die veraltete, weil imperative, Programmier-Sprache Basic gehandelt hätte. Aber allmählich setzt sich doch die Einsicht durch, dass das aktionistische allgemein-pädagogische und computer-didaktische Paradigma auch seine Mängel hat. — Ein Anzeichen sind für mich die **elektronischen Arbeitsblätter**, wie sie Heinz Schumann (1998), Hans-Jürgen Elschenbroich (2000) und Andere seit einiger Zeit propagieren, weil diese durch ihre Vorgaben erst Chancen zum zielgerichteten, ertragreichen Arbeiten eröffnen; ein anderes die jüngsten Feld-Beobachtungen von Hans-Georg Weigand (in diesem Band) zur Wichtigkeit von Muße.

Aktivität und Muße stehen in einem **dialektischen Zusammenhang**, der dem Lernen und überhaupt menschlichem Fortkommen förderlich ist, der vielleicht gerade am Computer besonders sinnfällig gemacht werden kann und den in Form einer Synthese zu fördern eine nicht-triviale zentrale pädagogische und didaktische Erziehungs-Aufgabe ist.

Einen **analogen** Zusammenhang sehe ich **zwischen den Veränderungen und den Invarianten** beim Variieren einer Situation (speziell auch mit DGS). In der Tat wird die Wahrnehmung dabei von Veränderungen dominiert. Dies ist ein fundamentales biologisches Phänomen, unerlässlich für das Überleben eines jeden Individuums. Gerade beim funktionalen Denken sollen auch die bewirkten Veränderungen durchaus Objekt der Aufmerksamkeit sein, und es ist Aufgabe der Lehrerinnen & Lehrer, zum Sehen der Invarianten zu erziehen. Dabei gibt es **Invarianten**, die den Veränderungen **direkt** gegenüberstehen, z.B. die Winkel-Summe beim Verändern eines Dreiecks; aber auch solche, denen wiederum **die Veränderungen unterworfen** sind. Allerdings will ich die Dialektik hier nicht vertiefen, sondern eigentlich lediglich darauf hinweisen, dass es verschiedene Stufen von Invarianz gibt, insbesondere auch auf der Stufe der Veränderlichkeiten.

Normalerweise werden Schülerinnen & Schüler **diesen elaborierten Invarianz-Begriff nicht** erwerben. Vielmehr wird man froh sein über eine Verinnerlichung des funktionalen Denkens in 1. Ordnung als heuristische Strategie: Variiere eine Situation, und beobachte, was sich wie verändert und was gleich bleibt; finde Orts-Linien! Was Orts-Linien sind, wird man im Unterricht exemplifizieren müssen und nicht exaktifizieren können. Bei der Mehrzahl der Schülerinnen & Schüler wird man auch kaum darüber hinauskommen, mehr oder weniger klar vorzugeben, **was sie verändern und was sie beobachten** sollen.

Meine eher **zurückhaltende Einschätzung der heuristischen Fähigkeiten** von gewöhnlichen Geometrie-Lernenden speist sich aus verschiedenen Quellen: Alle psychologischen Befunde (z.B. Weinert 1996) sprechen dafür, dass sich die Fähigkeit zur Meta-Kognition sowohl **im gesamten Leben eines Menschen, wie beim Eindringen in einen Lern-Stoff erst spät** ausbilden. Natürlich kann man die Schülerinnen & Schüler dazu bringen, dass sie über Lösungs-Wege für gewisse Aufgaben-Typen verfügen, und zwar umso besser, je enger der Typ ist. Aber schon wenn es um einen **ganzen Bereich** wie die Elementar-Geometrie oder sogar um ein **Überspringen von Bereichen** geht, d.h. je mehr konkrete Handlungs-Anweisungen den Charakter von Strategien annehmen und von meta-kognitiven Elementen durchsetzt werden, desto geringer werden die Erfolge. Man kann zwar **im Nachhinein** die (gemeinsame) Lösung einer Aufgabe anhand einer Liste von Heuristiken analysieren (da gibt es in der didaktischen Literatur die schönsten Beispiele); man kann, wofür ich plädiere, **recht genaue Vorgaben** machen und dabei die Heuristiken durchaus explizieren, oder man muss eben ein **erfahrener Elementar-Geometer** wie Thomas Weth sein, der folgende Aufgabe in wenigen Minuten gelöst hat, weil er die Ortslinien-Strategie mit seinen DGS-Erfahrungen virtuos beherrscht:

Gegeben sind die Gerade g und zwei Punkte A und B in derselben Halb-Ebene. Gesucht ist ein Punkt P auf g, so dass der Winkel APB so groß wie der Winkel BPg ist.

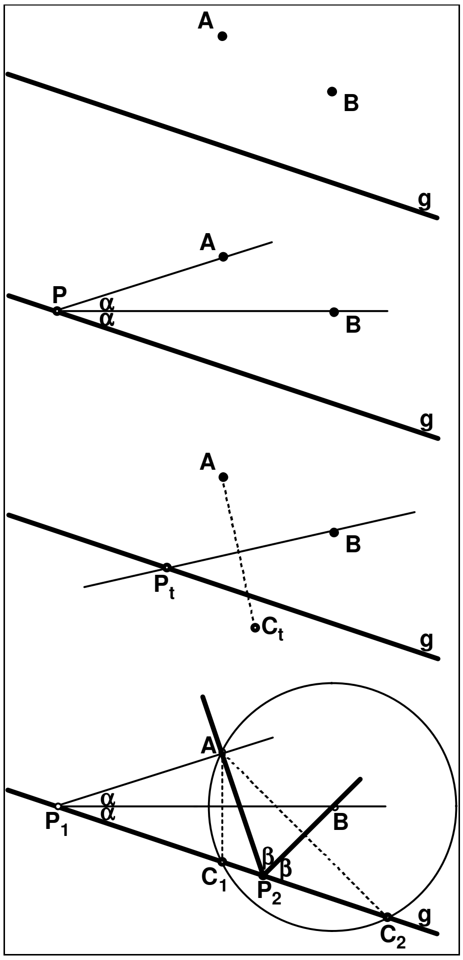

Abb. 3

Lösung: Man wählt einen semi-variablen Punkt P_t auf g, spiegelt A an P_tB und erhält C_t. Man zieht an P_t und erhält als Orts-Linie für die C_t den Kreis um B mit Radius AB. Für dasjenige C_t, das zugleich auf g liegt, ist P_t der gesuchte Punkt. Es ist dann klar, wann es keine, eine oder zwei Lösungen gibt und wie konstruiert werden muss (**Abb. 3**).

Allerdings kann man auch dann, wenn man die Ortslinien-Strategie kennt, noch an **zahlreichen Hürden** scheitern:

Im Prinzip muss man bei einer Konfiguration alle Variablen bis auf zwei fixieren, bei denen die eine von der anderen abhängt; man verändert dann die unabhängige der beiden in einer bestimmten Weise, beobachtet die abhängige (deren Orts-Linie), findet so die Funktions- (bzw. Konstruktions-) Vorschrift, über die die unabhängige die abhängige Variable bestimmt, und löst damit das Problem. Dabei kann man allerdings:

ungeeignete Variablen fixieren (Haupt-Fehler auch bei Fortgeschrittenen); die unabhängige Variable in ungeeigneter Weise verändern; eine ungeeignete oder keine Funktions- (bzw. Konstruktions-) Vorschrift finden; zwar eine geeignete Vorschrift finden, das Problem aber trotzdem nicht lösen.

Dass wir Fachleute beim selbstständigen Geometrie-Treiben von DGS profitieren, steht außer Frage. Gerade dies hat ja Manche & Manchen dazu verleitet, ein solches Profitieren auch bei Schülerinnen & Schülern zu unterstellen. Ich will einen Nutzen für diese nicht in Abrede stellen, aber ich meine, dass man die Erwartungen erheblich herunterschrauben sollte, und zwar vor allem die Selbstständigkeit betreffend.

4. Die Rolle von DGS beim Beweisen

In meinem Klagenfurter Vortrag 1987 (Bender 1989) habe ich folgende **Funktionen stetiger Bewegungen & Verformungen** bei elementar-geometrischen Beweisen entwickelt:

(i) Sie **liefern den Beweis** selbst (z.B. mit Stetigkeits-Argumenten).

(ii) Sie **vertiefen den Glauben** an den Beweis, indem sie ihn plausibel machen.

(iii) Sie **unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit,** indem sie viele Fälle, insbesondere Sonder-Fälle, und Übergänge dazwischen zeigen.

(iv) Sie **erzeugen Vermutungen,** Sätze, Beweis-Ideen, indem sie Veränderungen und Invarianten zeigen.

(v) Sie **visualisieren den Ablauf** eines Beweises und strukturieren ihn.

(vi) Sie **stehen für Handlungen** und machen die geometrischen Operationen dadurch durchsichtiger.

(vii) Sie fördern **funktionales Denken.**

Es gab damals noch keine **DGS,** aber offensichtlich ändert die Nutzung einer solchen nicht nur nichts an diesen **Funktionen,** sondern diese scheinen ihr als **Programm für eine Didaktik** geradezu **auf den Leib geschneidert** zu sein. Ich hatte mir allerdings (ohne es jedoch zum Ausdruck zu bringen, weil es für mich auf der Hand lag) einen Unterricht mit relativ **starker Lenkung** vorgestellt, und das sehe ich **heute, bei DGS-Einsatz, nicht anders.** Diese Erfordernis ist sach-immanent; sie bezieht sich nicht nur auf geometrische Beweise, sondern m.E. im großen und ganzen auf die gesamte Schul-Mathematik, und sie ist insbesondere nicht durch noch so fortschrittlichen Medien-Einsatz zu beseitigen. — Hier eine kleine Anwendung dieses didaktischen Programms auf die DGS-Diskussion:

Natürlich zeichnen sich **gute Lehrerinnen & Lehrer** (im Sinne Weinerts 1996) dadurch aus, dass sie die **Schülerinnen & Schüler zu aktiver Arbeit** veranlassen, je nach Thema und Unterrichts-Phase in unterschiedlichem Umfang. Auch innerhalb eines Themen-Bereichs wie 'Erarbeitung eines geometrischen Satzes' können Möglichkeiten und Erfolgs-Aussichten von Schülerinnen-

&Schüler-Aktivitäten sehr unterschiedlich ausfallen: Experimentier-Aufgaben mit DGS haben ja einen unterschiedlichen Status, je nach dem, in welche inhaltliche (nicht: Unterrichts-) Phase sie eingebettet sind (im folgenden ausgeführt am Beispiel des Umfangswinkel-Satzes über der Sehne mit den fixen End-Punkten A und B und dem variablen Punkt C_t, s. **Abb. 4**):

(i) Zum **Finden einer Vermutung** (vor Aufstellung der Behauptung und dem Beweis: C_t variieren, und entdecken, dass der Winkel in C_t sich verkleinert, wenn C_t sich von AB entfernt, und ungefähr konstant ist, wenn C_t auf einem Kreis-Bogen über AB läuft).

(ii) zur **Strukturierung des Beweises** (z.B. Finden aller Fälle: in welchen Bereichen muss addiert, in welchen muss subtrahiert werden? Und der Kreis-Bogen auf der anderen Seite von AB ist auch noch zu betrachten).

(iii) zum **Durcharbeiten des Satzes** (Folgerungen, Anwendung auf Spezial-Fälle, Lösung von Aufgaben, speziell Konstruktions-Aufgaben, Variation der Voraussetzungen u.ä.: Thales-Satz, Punkt auf einer Straße finden, von der aus eine Häuser-Zeile in größtem Winkel erscheint u.ä.).

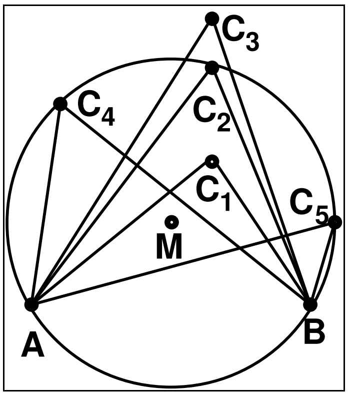

Abb. 4

Bei (iii) müsste man wiederum differenzieren, wie eigenständig die Folgerungen bzw. Konstruktions-Aufgaben bzw. die Variationen der Voraussetzungen sind, weil je nach dem eigentlich doch wieder (i) vorliegt. — Im folgenden geht es lediglich um Tendenzen, die von Satz zu Satz, von Aufgabe zu Aufgabe verschieden stark ausgeprägt sein können:

Je weniger die Schülerinnen & Schüler mit einem Gebiet vertraut sind, umso mehr Hinweise durch die Lehrerinnen & Lehrer dürften erforderlich sein, und dies ist im Prinzip bei (i) am ausgeprägtesten der Fall. Wegen geringer Erfahrungen mit dem Beweisen (die sich im Laufe der Schul-Zeit nicht wesentlich erweitern werden) fehlt i.a. bezüglich (ii) das Problem-Bewusstsein, und auch dort bedarf es m.E. deutlicher Interventionen. Lediglich bei (iii), so lange es sich um satz-nahe Aktivitäten handelt, kann die Aufgaben-Stellung etwas vager oder nach hinreichendem Training sogar weitgehend selbstständig durch die Schülerinnen & Schüler erfolgen.

Abschließend noch ein paar Bemerkungen zur **Leistung** von sog. **randomisierten Beweisen**, wie sie in Cinderella implementiert sind. Hier, wie an anderer Stelle, halte ich es mit Gerhard Holland: Durch den Einsatz des Computers ändert sich auf mathematischer Ebene weder der Begriff des **mathematischen Beweises** noch etwa der der **Euklidischen Geometrie** (die für mich als **das** Modell des Anschauungs-Raums nach wie vor die **Ziel-Geometrie** für die allgemeinbildende Schule ist, auch wenn sie das nicht für virtuelle Welten oder für eine genau genommene Bildschirm-Welt ist). Ich habe zwar betont, dass für die (für die Didaktik wesentliche) erkenntnis-theoretische Ebene die mathematische Ebene **nur eine** Einfluss-Größe unter vielen ist, aber gerade für die beiden genannten Begrifflichkeiten ist sie ausschlaggebend, und ich sehe **nicht, wie** da sinnvoll eine andere Begrifflichkeit gesetzt werden könnte, aber auch **nicht, warum** sie anders gesetzt werden sollte. Dies hat auch Rückwirkungen auf die kognitive Ebene: Da mögen sich unter DGS-Einfluss durchaus andere Grund-Vorstellungen & Grund-Verständnisse ausbilden, aber selbstverständlich haben die Lehrerinnen & Lehrer nach wie vor dafür zu sorgen, dass diese zur epistemologischen Begrifflichkeit passen, und ich würde sie als falsch bezeichnen, wenn sie nicht mehr passen würden.

Wenn z.B. **mit dem Computer Beweise automatisch** geführt werden, so dass kein Mensch sie mehr Zeile für Zeile nachrechnen kann, so ist das **deswegen kein qualitativer Umbruch** in der Mathematik, weil ja bereits jetzt die meisten der jährlich neu erscheinenden 200.000 mathematischen Sätze jeweils nur von den wenigen einschlägigen Fach-Leuten nachgeprüft werden können sowie von noch viel weniger tatsächlich nachgeprüft werden, während sie von der überwältigenden Mehrheit der Mathematikerinnen & Mathematiker, und erst recht vom Rest der Menschheit, geglaubt werden (müssen).

Einen **anderen Status haben sog. randomisierte Beweise;** sie sind nämlich gar keine Beweise, wie Jürgen Richter-Gebert (in diesem Band) ausdrücklich feststellt. Wie jedes andere induktive Vorgehen können sie eine Vermutung widerlegen oder eben **stützen**. Gewiss kann man ein geeignetes Sicherheits-Maß definieren und bei einem bestimmten Randomisierungs-Verfahren beweisen, dass eine bestimmte Aussage (z.B. dass eine bestimmte Zahl Primzahl ist) mit einer gewissen Sicherheit zutrifft. Damit ist die Aussage selbst aber nicht bewiesen, und diese Feststellung entspricht nach wie vor mathematischem Standard, der auch in Zukunft so bestehen wird wie bisher.

Wie der Teufel das Weih-Wasser würde ich es **vermeiden**, Schülerinnen & Schülern gegenüber hier **auch nur andeutungsweise von Beweisen zu reden** (wozu mathematisch unbedarftere Lehrerinnen & Lehrer verleitet sein könnten). Wir haben unsere liebe Mühe und Not, wenn wir es denn überhaupt erreichen, bei Schülerinnen & Schülern einen Sinn für deduktives Schließen zu wecken und dieses mit der Mathematik untrennbar zu verbinden. Dies alles würde zunichte gemacht, und zwar auch und gerade mit Einschränkungen wie "mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit dürfte der Satz richtig sein" oder "der Satz lautet: Die Aussage A stimmt mit der und der Wahrscheinlichkeit", da ja die erforderliche Souveränität im stochastischen Denken erst recht nicht vorhanden ist. Für berufsmäßige Mathematikerinnen & Mathematiker kann es zwecks Weiter-Arbeit an einem bestimmten Thema wichtig sein, von einer Aussage zu wissen, dass sie mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit wahr ist.

In der Schul-Geometrie kann der randomisierte Beweiser (günstiger vielleicht: 'Prüfer') auch eine Funktion haben, indem er nämlich den Schülerinnen & Schülern eine automatische Rückmeldung über die Korrektheit z.B. einer Konstruktion gibt. Da wird natürlich die Vorgehensweise des 'Prüfers', die zu einer solchen Meldung führt, nicht thematisiert, und das Risiko einer Falsch-Meldung ist für den realen Geometrie-Unterricht prinzipiell irrelevant, und es ist außerdem sowieso (so gut wie) null. Wenn man denn über das Arbeits-Prinzip des 'Prüfers' sprechen möchte, so muss dieses klar gegen die deduktive Natur mathematischer Beweise abgesetzt werden, was wiederum das Vorhandensein einer entsprechenden klaren Begrifflichkeit voraussetzt.

Literatur:

Bender, Peter (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14, 9–24

Bender, Peter (1987): Kritik der Logo-Philosophie. In: Journal für Mathematik-Didaktik 8, 3–103

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht — unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen und Verformungen. Hauptvortrag auf dem 7. Workshop zur Visualisierung in Klagenfurt 1987. In: Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, 95–145

Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen — ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht — erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Helmut Postel, Arnold Kirsch & Werner Blum (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, 48–60

Bender, Peter (1996): Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. In: Claudi Alsina u.a. (Hrsg.): 8th International Congress on Mathematics Education. Selected Lectures. Sevilla: S.A.E.M. 'Thales', 57–74

Bender, Peter (1998): Mathematik-didaktische Paradigmen und Computer — unter besonderer Berücksichtigung der Geometrie. In: Gert Kadunz u.a. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien. Stuttgart & Leipzig: Teubner, 33–52

Bender, Peter (2001): Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Lehramts-Ausbildung. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001. Hildesheim: Franzbecker

Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Clairaut, Alexis-Claude (1741): Elémens de géométrie. Paris: Lambert & Durand

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2000): Lehren und Lernen mit elektronischen Arbeitsblättern. Dynamik als Unterrichtsprinzip. Erscheint in: Wilfried Herget, Hans-Georg Weigand & Thomas Weth (Hrsg.): Tagung des AK 'MU und Informatik' in Soest

Graumann, Günter, Reinhard Hölzl, Konrad Krainer, Michael Neubrand & Horst Struve (1996): Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. In: Journal für Mathematik-Didaktik 17, 163–237

Hischer, Horst (1994): Mathematikunterricht im "Bannkreis des Computers" — oder: Wohin führt uns der Computer? In: Horst Hischer (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer. Hildesheim: Franzbecker, 8–18

Hofe, Rudolf vom (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13, 345–364

Krummheuer, Götz (1989): Die menschliche Seite am Computer. Studien zum gewohnheitsmäßigen Umgang mit Computern im Unterricht. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Kruse, Friedrich (1875): Elemente der Geometrie. Berlin: Weidmann

Kusserow, Wilhelm (1928 & 1985): Los von Euklid! Leipzig: Dürr 1928, Nachdruck Paderborn: Schöningh 1985

Lewalter, Doris (1997): Kognitive Informationsverarbeitung beim Lernen mit computerpräsentierten statischen und dynamischen Illustrationen. In: Unterrichtswissenschaft 25, 207–222

Müller, Hubert (1874–1877): Leitfaden der ebenen Geometrie I, II, Leitfaden der Stereometrie I, II. Leipzig: Teubner

Schumann, Heinz (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: Mathematik in der Schule 36, 562–569

Treutlein, Peter (1911): Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts. Leipzig & Berlin: Teubner

Weinert, Franz E. (1996): Thesenpapier zum Vortrag "Ansprüche an das Lernen in heutiger Zeit". München: Manuskript