Prof. Dr. Peter Bender
U-GH Paderborn Fb 17

Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Lehramts-Ausbildung — Erste Ergebnisse einer Evaluation

Zusammenfassung: In Paderborn wird in der Elementar-Geometrie für die SI- und Primar-Erst- bis Dritt-Semester seit einiger Zeit von Kollegen RINKENS die DGS CINDERELLA i.V.m. dem Internet eingesetzt. Im Rahmen eines Projekts, das vom Land NW finanziert wird, wollen wir die Wirksamkeit dieses Einsatzes erforschen. Dazu haben wir in einer Pilot-Studie im WS 00/01 bei den Studierenden in umfangreichen Interviews Erfahrungen, Eindrücke und Wirkungen mit Hilfe von Fragen und Aufgaben-Bearbeitungen erkundet. Im Vortrag wurde über die (qualitative) Forschungs-Methode sowie über einige Ergebnisse berichtet: U.a. scheint sich zu bestätigen, dass sich das kognitive Potential des Zug-Modus eher erst nach deutlichen Hinweisen durch die Lehr-Person entfaltet.

1 Ausgangs-Situation

Aufgrund der Software-, Hardware- und Medien-Entwicklung in den letzten Jahren kommt für die universitäre Lehre zunehmend der Einsatz des Computers in Betracht. In Paderborn wurde diese Entwicklung durch das einschlägige BIG-Projekt der BERTELSMANN-Stiftung und der HEINZ-NIXDORF-Stiftung zusätzlich vorangetrieben. Man muss nicht mit den gesellschafts-, bildungs- und hochschul-politischen Zielen der BERTELSMANN-Stiftung (als Teil des BERTELSMANN-Konzerns) einverstanden sein; aber im Wunsch nach Verbesserung der Lehre auch durch den Einsatz Neuer Medien besteht Übereinstimmung.

HANS-DIETER RINKENS hat hier mit der Lehr-Veranstaltung ‚Elementar-Geometrie' Pionier-Arbeit geleistet. Dabei handelt es sich um eine 3+2-stündige fach-inhaltliche Pflicht-Veranstaltung für Sekundarstufe-I- und Primarstufen-Mathematik-Studierende, die besonders von den SI-Leuten i. d. R. im 1. Semester besucht wird. RINKENS hat sie jetzt mehrfach hintereinander durchgeführt und auf den konsequenten Einsatz der DGS umgestellt. Zunächst verwendete er CABRI GEOMETER mit einer Powerpoint-Präsentation und ist inzwischen auf CINDERELLA wegen dessen Internet-Fähigkeit und eben das Internet umgestiegen. — Innerhalb des Programm der Landes-Regierung NW „Wirksamkeitsforschung — Neue Medien in der Hochschullehre" wollen wir, und zwar federführend DOROTHEE MACZEY unter Mitarbeit von HAUKE FRIEDRICH und MAREIKE OBERTHÜR, die Wirkung der Neuen Medien auf diese und demnächst auch auf andere Veranstaltungen erforschen. Eine engere Zusammenarbeit ist mit den Arbeits-Gruppen von HANS-WOLFGANG HENN in Dortmund und von THOMAS WETH in Nürnberg auf den Weg gebracht. Ich berichte heute aus der Pilot-Phase im letzten Wintersemester (00/01).

Nicht zuletzt gilt unser Forschungs-Interesse der geometrie-didaktischen Seite. So haben wir unser Projekt unter drei große Fragestellungen eingeordnet:

— Wie wird der Medien-Einsatz an sich auf der intellektuellen, emotionalen und sozialen Ebene wahrgenommen?
— Wie verändert sich das Lernen von Geometrie in einer multimedialen Umgebung?
— Wie verändern sich die Auswahl der Inhalte und die geometrischen Begriffe selbst? (Mit dieser letzten Frage ist die Dozenten-Seite angesprochen, und sie wird mehr langfristig verfolgt.)

Zur Veranstaltung hatten sich 33 Personen angemeldet, 2/3 LSI und 1/3 LP. Bei LSI war das Verhältnis zwischen Männern und Frauen etwa ausgeglichen; bei LP war ein einziger Mann dabei. 31 Personen schrieben die Klausur mit, davon 24 mit Erfolg. Bei einem ersten Durchgang im Dezember 2000 nahmen 17 Personen an den Interviews teil; von diesen wollten sich dem zweiten Durchgang im Februar 2001 nur noch 6 und zusätzlich eine neue Person unterziehen. — Zwar handelt es sich bei unserer Klientel nicht um Mittelstufen-Schülerinnen und -Schüler (S&S), und insbesondere liegt bei ihnen kein Erst-Lernen vor; aber das Lehr-Lern-Niveau ist (unter Beachtung der besonderen Umstände an der Hochschule) durchaus dem in einer gymnasialen Klasse vergleichbar, zumal vom schulischen Geometrie-Unterricht i. a. wenig Substanz übrig geblieben ist. — Unabhängig davon hatten wir uns von den Studierenden (aufgrund ihrer Lebens-Erfahrung und ihrer beruflichen Interessen) eine höhere Belastbarkeit bei den Interviews, einen weiteren Horizont für unsere Fragestellungen und substanziellere Aussagen zu den eigenen Denk-Prozessen versprochen (und wurden in dieser Erwartung letztlich bestätigt).

Auch die Schule ist übrigens alles andere als eine freie Wildbahn, in der die S&S unbeeinflusst von Lehrerinnen- und Lehrer- (L&L-) Vorgaben und unbeeindruckt von etwaigen Forschungs-Aktivitäten ihren alltäglichen, für das nackte Überleben notwendigen Lern-Prozessen nachgehen. REINHARD HÖLZL (1994, 2000) hatte mit seinen Untersuchungen zum Geometrie-Lernen versucht, diesem Ideal möglichst nahe zu kommen, und sowohl i. W. auf eine methodische Aufbereitung, als auch auf Eingriffe während der Arbeit verzichtet. Wegen dieser Didaktik-Ferne (die für die eingetretenen schwachen Ergebnisse mit verantwortlich gemacht wurde) musste er einige Kritik einstecken. Nun war gerade diese Didaktik-Ferne ein wesentlicher Bestandteil seines Ansatzes, ging es ihm doch darum, die seit langem virulente Forschungs-Frage zu überprüfen, wie erfolgreich der Computer selbstständiges Lernen unterstützen oder gar bewirken könne, und eines seiner Ergebnisse lautet eben, dass auch in DGS-orientierten Lern-Umgebungen erhebliche didaktische Anstrengungen erforderlich sind.

Unsere Veranstaltung ist dagegen eine Mathematik-Vorlesung mit den üblichen Möglichkeiten für selbstständiges Arbeiten, nämlich Erledigen der Haus-Aufgaben und Vorstellen der Lösungen in den Übungen, und die DGS hat weniger eine pädagogische und eher eine didaktische Funktion. Auf der didaktischen Ebene wiederum spielt die Selbstständigkeit doch noch eine wichtige Rolle, weil Kollege RINKENS Wert legt auf selbstständiges geometrisches Problem-Lösen und den Erwerb von Strategien dafür. Dem scheinen die Talente der DGS entgegen zu kommen: Beim stetigen Bewegen und Verformen von Figuren können Auffälligkeiten beobachtet werden. Mit vorgegebenen und selbst zu definierenden Makros kann die Strategie des Zerlegens eines Problems in Teil-Probleme realisiert werden (bei CINDERELLA damals allerdings noch nicht möglich). Genaues, schnelles, sauberes und farbiges Arbeiten entlastet von technischem Aufwand und macht den Kopf frei für Höheres, eben für das Problem-Lösen. Usw. — So jedenfalls lauten die Hoffnungen.

Zur Veranstaltung gab es ein Skript, das sowohl ins Internet gestellt war, als auch für alle Studierenden gedruckt vorlag, in dem allerdings die Beweise u. ä. nicht im Detail ausgeführt sind. Der Dozent rief jeweils die vorbereiteten geometrischen Situationen aus dem Internet ab, projizierte sie mit einem Beamer an die Wand und bearbeitete sie dann mit CINDERELLA, wozu er Erläuterungen mit Worten und mit Kreide an einer herkömmlichen Wand-Tafel abgab. Die Übungen wurden vom Assistenten HAUKE FRIEDRICH geleitet. Sie fanden, in zwei Gruppen, in einem Pool-Raum statt, in dem 11 Computer kreisförmig angeordnet sowie durch ein sog. pädagogisches Netzwerk verbunden sind und so verbale Kommunikation gefördert wird. Ein Teil der Haus-Aufgaben war mit CINDERELLA zu bearbeiten; wer nicht zu Hause über diese DGS verfügte, konnte sie in diesem Pool-Raum benutzen.

Inzwischen haben wir 20 Laptops zur Verwendung durch die Studierenden angeschafft und wollen im kommenden Durchgang auch für die Vorlesung ein pädagogisches Netzwerk einrichten, so dass dort dann, abgesehen von der Sitz-Ordnung, partiell ähnliche Verhältnisse wie in der Übung bestehen.

2 Forschungs-Methode

Offensichtlich kommen quantitative Methoden (inklusive der Abschluss-Klausur) für unser Vorhaben nicht in Frage (was übrigens in unserer Kommunität aus Gründen fehlender

Repräsentativität, Unabhängigkeit und Validität meistens der Fall ist, und zwar auch dann, wenn diese Methoden eingesetzt werden). Wir gingen vielmehr qualitativ vor und führten mit den Studierenden Interviews (aus Ökonomie- und Anregungs-Gründen immer zu zweit), video-grafierten diese, transkribierten sie punktuell und werteten sie punktuell interpretierend aus, wobei wir uns auf Erfahrungen aus FRIEDRICHs Dissertation stützen konnten. Unser Vorgehen trägt Züge der sog. Grounded Theory in sich (s. z. B. STRAUSS & CORBIN, 1996), u. a. indem wir lokal und global das Prinzip der teilnehmenden Forschung realisieren und die zwischendurch gewonnenen Erkenntnisse in die weitere Exploration einfließen lassen. Den Interviews lag ein detaillierter Katalog von Fragen und Aufgaben zugrunde, wobei ich mir eben als Interviewer die Freiheit nahm, je nach Verlauf die Fragen leicht abzuwandeln, auch einmal welche wegzulassen oder das Gespräch intervenierend voranzutreiben.

Wir wenden die interaktionistische Annahme der „Existenz von allgemein geteilten Regeln sozialen Handelns, die mit einem eigenständigen Geltungs-Anspruch versehen sind, und einer darauf fußenden objektiven latenten Sinn-Struktur der Interaktion" (im Sinne OEVERMANNs, 1986, 22ff) auf die Interview-Situation an. Den objektiven Charakter sehen wir dadurch als erheblich verstärkt an, dass es um einen engen, stark rationalisierten Bereich geht, nämlich um das Lernen von Geometrie und um die Elementar-Geometrie bezogen auf die Vorlesung, und dass die Beteiligten bewusst darüber sprechen. Dennoch ist die Sinn-Struktur des Gesprächs etwas anderes als eine schein-objektive mathematische Begrifflichkeit, und sie ist zunächst wirklich nur latent.

Abb. 1

Ein Interpretations-Beispiel: Eine der beiden Aufgaben war die sog. Kanal-Aufgabe: Im Innern eines fixen spitzen Winkel-Felds (=‚Kanal') mit den beiden Schenkeln g' und h' (mit Träger-Geraden g und h) befindet sich ein fixer Punkt A. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck soll so eingepasst werden, dass der Scheitel mit A und die beiden Basis-Ecken mit je einem Schenkel des ‚Kanals' inzidieren. Die Aufgabe war in der Veranstaltung als Muster-Beispiel für die Anwendung der Ortslinien-Strategie behandelt worden: Man wählt einen Punkt von h', etwa C_t, als eine Basis-Ecke und konstruiert dazu ‚das' gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, d. h. die zweite Basis-Ecke B_t. Man hat nun alle Forderungen aus der Aufgaben-Stellung erfüllt, bis auf eine, nämlich dass B_t ja auf g' liegen soll (Abb. 1). (WETH nennt dieses Vorgehen explizit die (n-1)-Strategie, zwar fast ein Synonym zur Bezeichnung ‚Ortslinien-Strategie', aber eben ein anderes Merkmal hervorhebend: von n Forderungen werden zunächst n-1 erfüllt.)

Abb. 2

Es ist nun klar, dass beim (kontinuierlichen) Durchlaufen der Punkte C_t auf h' in funktionaler Abhängigkeit davon unter permanenter Erfüllung der n-1 Forderungen eine (ebenso kontinuierliche) Abfolge von Punkten B_t entsteht, und man hat die Hoffnung, dass es wenigstens einen Punkt C_t gibt, für den der zugehörige Punkt B_t auf g liegt. Dass es einen solchen Punkt C_t gibt, und wo B_t dann genau liegt, ‚sieht' man (nicht logisch, sondern wirklich visuell) mit Hilfe der Ortslinien-Vorrichtung der DGS: Sie zeigt den Ort (die Werte-Menge) an, der für die Punkte B_t zur Verfügung steht, wenn die Punkte C_t auf die Gerade h (den Definitions-Bereich) beschränkt sind. Offensichtlich handelt es sich um eine Gerade d senkrecht zu h (Abb. 2), für die man nur noch ihren Schnittpunkt B_{t0} mit h finden muss, um dadurch ihren gesuchten Schnittpunkt B mit g und damit die komplette Konstruktion zu erhalten. B_{t0} hat man leicht bestimmt: Man errichtet das Lot von A auf h und trägt daran einen Winkel von 45° in die ‚richtige' Richtung an.

Die zentrale Frage aber lautet: Woher weiß man, dass die Orts-Linie für B eine Gerade ist? Die Orthogonalität bezüglich h ist übrigens entbehrlich: Wenn man die Geraden-Eigenschaft hat, genügt es, für zwei verschiedene Punkte C_{t1} und C_{t2} die beiden (ja auch) verschiedenen Bild-Punkte B_{t1} und B_{t2} zu konstruieren und durch diese d zu legen. Dieses fachliche Vorgehen zieht das fundamentale didaktische Problem nach sich: Die Lernenden müssen, kurz gesagt, erkennen, dass für die Linie, die hier wie eine Gerade aussieht, ihr Gerade-Sein tatsächlich nachzuweisen ist. Mit einer curricularen Lösung dieses Problems steht und fällt m. E. der große Versuch, den Geometrie-Unterricht mit Hilfe von DGS zu retten.

Abbildungs-geometrisch ist der Beweis nicht sehr schwierig: Man betrachtet die Rotation um A um 90° in die richtige Richtung, die ja jeder Basis-Ecke C_t ihre zugehörige andere Basis-Ecke B_t und der Geraden h eine ganz bestimmte Gerade d (um 90° gedreht) zuordnet. Da alle Punkte C_t auf h liegen, liegen alle Punkte B_t auf d. Es ist außerdem klar, dass die Rotation eine Bijektion zwischen h und d liefert.

(Bei den bisherigen Überlegungen habe ich an mehreren Stellen Fragen der Orientierung mit einer gewissen Nonchalance übergangen. Spätestens jetzt müsste man etwas genauer hinsehen, um sich zu vergewissern, dass diejenige Hälfte d' von d, die aus der Halb-Geraden h' durch besagte Rotation hervorgeht, tatsächlich den Schenkel g' irgendwo schneidet. Den Schenkel h' schneidet d' nämlich z. B. nicht notwendig. Dass wenigstens die Gerade d den Schenkel g' schneidet, ergibt sich direkt aus der vorausgesetzten Spitzheit des Winkel-Felds. Teilt man nun die Ebene in 4 kongruente Quadranten mit Mittelpunkt A und einer Achse parallel zu h, kann man recht leicht zeigen, dass in der Tat d’ und g’ einen Schnittpunkt haben. — Im Kontext der Veranstaltung wirkt dieser ganze Orientierungs-Komplex ein wenig spitzfindig, und er wurde von keiner Seite problematisiert. Aber zu einer vollständigen Bearbeitung der Aufgabe gehört eigentlich in der Tat mindestens noch die Diskussion, ob bzw. wann es sicher eine Lösung gibt.)

Im Verlauf der Vorlesung war die Aufgabe recht früh gestellt worden, und der Abbildungs-Kalkül stand noch nicht zur Verfügung, so dass die Geraden-Eigenschaft der Orts-Linie etwas mühsam mit Kongruenz-Betrachtungen hergeleitet werden musste. Jedoch ist die abbildungs-geometrische Argumentation nur scheinbar einfacher; denn sie benutzt ja, allerdings unausgesprochen, die Geraden-Treue von Kongruenz-Abbildungen. Dass diese (bei dem üblichen, nicht abbildungs-axiomatischen, Aufbau) hier eigentlich noch bewiesen oder wenigstens problematisiert werden müsste, und wie intensiv die S&S dies einsehen und durchführen sollen, ist ein Grund-Problem der klassischen Abbildungsgeometrie-Didaktik, das von manchen Anhängerinnen und Anhängern allerdings gar nicht erkannt wurde. Da scheint mir der Bewusstseins-Stand der DGS-Didaktik heute erheblich höher zu sein. Zumindest in der didaktischen Diskussion ist klar: Was beim Ziehen oder bei Orts-Linien visuell deutlich wird, muss noch auf irgendeinem Niveau logisch-mathematisch bewiesen bzw. plausibel begründet werden.

Die große didaktische Aufgabe besteht, wie gesagt, darin, dieses Bewusstsein auch bei den Lernenden zu erzeugen. Hier sind dann unsere Studierenden doch nicht mit ‚normalen’ Mittelstufen-S&S zu vergleichen: Diese Beweis-Erfordernis wurde in der Vorlesung immer wieder verbalisiert und vor-exerziert, und sie haben in den Interviews alle zum Ausdruck gebracht, dass sie sie voll akzeptieren. Wir haben versucht herauszufinden, ob diese Einsicht in die Beweis-Erfordernis ‚echt’ oder nur übernommen ist. — Dazu nun endlich das eigentliche Interpretations-Beispiel:

Die Kommilitonin J hatte eigentlich direkt mit der Konstruktion beginnen wollen (2 Basis-Ecken C_{t1} und C_{t2} ergeben B_{t1} und B_{t2} usw.) und wurde von mir in die Richtung gedrängt, doch mit Orts-Linien zu arbeiten. Als dies geleistet ist und das ‚richtige’ Dreieck durch Ziehen erzeugt ist, frage ich, ob das jetzt eine Konstruktion im Sinne der Vorlesung sei. J verneint dies mit dem Hinweis: „Ja, wenn ich das jetzt per Hand machen würde, also nur mit Bleistift und Lineal und Zirkel, und so würd’ das noch nicht funktionieren; weil, ich hab’ ja jetzt die Orts-Linie erzeugt, obwohl ich nur einen Punkt hatte, und das kann man ja nicht, wenn man ... das jetzt mit Lineal macht und Zirkel. D. h. ich bräuchte eigentlich zwei

Punkte; deswegen bin ich da drauf gekommen, dass man zwei Dreiecke braucht; dann hat man zwei Punkte, und kann dann die Orts-Linie da durch konstruieren, wenn man das jetzt meinetwegen mit ‘nem Lineal macht, die zwei Punkte verbinden.“ J hat zwar unter allen Interviewten mit am meisten Durchblick gezeigt. Trotzdem wollten wir bei der Analyse nicht sofort als selbstverständlich hinnehmen, dass die Ortslinien-Zeichnung des Computers, gestützt auf einen Punkt, und die klassische Geraden-Konstruktion mit Papier und Bleistift, gestützt auf zwei Punkte, bei ihr wirklich einen unterschiedlichen logisch-mathematischen Status haben; sondern wir hielten uns zunächst die Interpretations-Option offen, dass für sie der Unterschied auch lediglich auf der medialen Ebene liegen könnte. Als sie dann jedoch im weiteren Verlauf ihre ursprünglich vorgesehene Konstruktion auf dem Bildschirm durchführt und dabei ausdrücklich davon spricht, dass die noch angezeigte Orts-Linie gelöscht werden könnte, gestanden wir ihr nun die Einsicht in diesen Status zu. Allerdings sind wir bei einer Nach-Analyse noch einmal ins Zweifeln gekommen, weil wir zwischenzeitlich die Beobachtung, dass ihr zwar die Konstruktion, nicht aber die Begründung von deren Korrektheit gelungen war, ernster nehmen als im ersten Durchgang.

Wegen der gebotenen Ausführlichkeit ist aus ökonomischen Gründen bei bis jetzt über 20 Stunden Film-Material die Interpretation nur punktuell möglich. Wesentlich ist dabei, dass für uns die Gegenstände mit ihren fachlichen (Geometrie) oder didaktischen (Geometrie-Lernen) Strukturen auf die Sinn-Struktur der Gespräche einen erheblichen Einfluss haben. Dabei kann dahin gestellt bleiben, ob und wie die Bedeutung der Gegenstände für die einzelnen Beteiligten irgendwann einmal (sozial, durchaus in einem gesteuerten Prozess) konstituiert wurde und wie weit sie bei den verschiedenen Beteiligten übereinstimmt. Aber eigentlich ist nicht einzusehen, dass man sich trotz Kenntnis von ersichtlich relevanten nicht-soziologischen Strukturen auf die soziologischen beschränkt (womit wir in einen klaren Gegensatz zu Vertreterinnen und Vertretern der reinen interaktionistischen Lehre geraten).

3 Einige Ergebnisse

Heutzutage liegen bei so gut wie allen Studierenden zum Zeitpunkt ihres Hochschul-Eintritts Computer-Erfahrungen vor, immer zur Text-Verarbeitung und zu Spielen, manchmal aus einer Informatik-AG in der Schule, nur einmal aus dem Geometrie-Unterricht. Zwar kam immer Geometrie in der Schule vor, z. T. auch dieselben Inhalte wie in der Vorlesung, aber, anders als jetzt, i. W. ohne Beweise bzw. Begründungen (jedenfalls der Erinnerung nach).

Die Interviewten vermitteln insgesamt eine ausgeprägte Zufriedenheit mit der Art und Weise, wie der Computer in die Veranstaltung integriert ist. Das Verhältnis zu Dozent und Assistent sowie zum Rest der Gruppe ist durch die Arbeit mit dem Computer nicht beeinträchtigt. Die Kommunikation in Übung und Vorlesung (so weit dort angebracht) leidet nicht. Allerdings möchte niemand den Computer-Einsatz forciert haben oder gar auf die Anwesenheit des Dozenten verzichten. Die dafür vorgebrachten Argumente kann man unter der Überschrift „es fehlt die persönliche Ansprache“ zusammenfassen. Ich bin überzeugt, dass dies auch bei einer Gruppen-Größe von 500 so gesehen würde. — Die immer wieder (von interessierter Seite wie z. B. der Fern-Universität Hagen) zu vernehmende Prophezeiung, dass in wenigen Jahren die Mehrzahl der Lehr-Veranstaltungen für die Mehrzahl der Studierenden ohne professorale Anwesenheit stattfinden wird, zweifle ich an, und ich meine außerdem, dass es gegen die Interessen und das Wohl der Studierenden verstoßen würde sowie meinen Vorstellungen von guter Lehre zuwiderliefe. Zu der gehört m. E. nämlich persönliche Ansprache. Das gilt insbesondere bezüglich Menschen, die einen Beruf anstreben, bei dem sie es mit Menschen zu haben (was natürlich für die Schule der Zukunft auch nicht mehr denk-notwendig sein muss, wofür wir im Bildungs-System uns aber nachdrücklich einsetzen sollten).

Zwar befürworten die Studierenden durchweg den Einsatz von DGS in der Schule, aber eher in gemäßigter Form. Insbesondere halten sie die Beherrschung des Umgangs mit Zirkel und Lineal nach wie vor für wichtig und stellen sich tendenziell eher die Arbeit in einem eigenen Computer-Raum vor, als dass der Computer im Klassen-Raum ständig zur Verfügung steht. — Diese letzte Aussage könnte allerdings ein Indiz dafür sein, dass die Einschätzung weniger auf soliden didaktischen Überlegungen beruht (was auch niemand behauptet hat), sondern eher auf eigenen Schul-Erfahrungen. Wir sind gespannt, wie die nächste Kohorte sich äußert, die ja dann die dauernde Verfügbarkeit eines eigenen Geräts erlebt haben wird.

Ich hatte auch nach den Vorzügen und Nachteilen der DGS, dem Bild von Geometrie mit und ohne DGS, nach dem ontologischen Status von Punkten, Figuren, Orts-Linien, gezogenen Figuren, nach heuristischen Strategien mit und ohne DGS gefragt. — Ich beschränke mich jetzt auf die Frage: „Warum zieht man?“

Da wurde zögerlich, und auch nur von einem Teil der Studierenden angeführt: „um zu sehen, was passiert“, „um Hinweise für die Lösung zu erhalten“, „um Sonder-Fälle herzustellen“, „um Vermutungen auszuprobieren“, „um zu beobachten, was gleich bleibt und was sich verändert“. Wohl wurden einige Themen aus der Vorlesung genannt (Flächen-Gleichheit beim PYTHAGORAS-Satz, EULERsche Gerade, Strahlen-Satz, Blickwinkel-Aufgabe), wo mit Hilfe des Ziehens eine Invarianz oder eine gesetzmäßige Veränderung aufgezeigt wurde. Jedoch war letztlich kaum jemand in der Lage, den wesentlichen Gehalt der genannten didaktischen Funktionen einmal an einem Beispiel überzeugend darzustellen. — Dieses Unvermögen, solche in der Vorlesung erworbenen Schlagwörter mit Substanz zu füllen, kennen wir ja aus vielen Examens-Situationen, und wir müssen es erst recht Erst-Semestern zugestehen. Vielleicht hat — aus hochschul-didaktischer Sicht — der Dozent den Studierenden zu wenig Eigenständigkeit zugebilligt; vielleicht war er (woran ich eher glaube) noch zu zurückhaltend und hat zu sehr darauf vertraut, dass sich solche Einsichten bei den Studierenden beim eigenen Tun bzw. beim Mit-Vollziehen seines Tuns unausgesprochen von selbst einstellen.

Abb. 3

Entsprechend wurde von den Studierenden bei dem aus der Vorlesung bekannten Beweis des Umfangswinkel-Satzes (Abb. 3) wenig Souveränität gezeigt: Gegeben ist ein fixer Kreis mit Mittelpunkt M, zwei fixe Kreis-Punkte A und B, einer der beiden von A und B bestimmten Kreis-Bögen d (ohne A und B). Für alle Punkte C_t auf d ist dann das Maß des Umfangs-Winkels BC_tA dasselbe. Und zwar folgt dies daraus, dass dieses Maß immer halb so groß ist wie das ‚des’ Mittelpunkt-Winkels BMA. (Dabei ist von den beiden Mittelpunkts-Winkeln BMA immer derjenige zu nehmen, in dem d nicht liegt, so dass der zu betrachtende auch gestreckt oder überstumpf sein kann; und: für C_t=A oder C_t=B ist der Umfangs-Winkel nicht definiert).

Abb. 4 (aus BENDER 1989; Programm und Foto von WALTER DRÖGE, Kassel)

Ich würde ja den Satz in einen größeren Zusammenhang einbetten, den Kreis zunächst gar nicht, sondern nur zwei fixe Punkte A und B in die Ebene zeichnen, dann C_t über die ganze Ebene laufen lassen, beobachten lassen, wie sich das Winkel-Maß ändert, und Kreis-Bögen als Linien konstanten Maßes (ähnlich wie Höhen-Linien auf Landkarten, Isobaren im Wetter-Bericht oder Isokosten-Kurven in der Betriebwirtschafts-Lehre) vermuten lassen (Abb. 4). Hierbei findet ein Proto-Typ funktionalen Denkens statt; es könnte sogar ein kleines Bedürfnis nach dem Beweis entstehen; und man erhält ohne weiteres eine viel allgemeinere Aussage und insbesondere gleich eine Umkehrung des Umfangswinkel-Satzes mitgeliefert, wie sie bei Anwendungen oft gebraucht wird. — Aus systematischen und Zeit-Gründen fängt man allerdings i. a. direkt mit der Kreis-Figur an.

Das habe auch ich in den 1980-er Jahren so gemacht, wo ich diese Veranstaltung mehrfach durchgeführt habe.

Ich weiß noch, dass ich damals bei diesem Beweis jedes Mal an irgendeiner Stelle ins Stocken geraten bin und in meinem Manuskript nachsehen musste. Mit diesem Hinweis möchte ich Verständnis für die Studierenden zum Ausdruck bringen, die durchweg den Beweis nur mit massiver Hilfe, und dann auch nur sehr unvollständig, rekapitulieren konnten. In verschiedenen Stadien des Beweises drängte ich sie zum Ziehen des Punkts C_t auf dem Kreis-Bogen, damit sie auf Sonder-Fälle stoßen, feststellen, ob alle Fälle berücksichtigt sind, oder die Vorgehensweisen von einem Fall auf einen anderen übertragen. — Es geht hier um die Funktion stetiger Bewegungen und Verformungen, einen Beweis zu strukturieren (s. BENDER 1989).

Abb. 5

In der Vorlesung war zunächst der Sonder-Fall betrachtet worden, wo A, M und C_t kollinear sind (Abb. 5). Dann ist BMA Außen-Winkel zum Dreieck C_tMB und damit so groß wie die beiden gegenüber liegenden Innen-Winkel zusammen. Wegen der Gleichschenkligkeit sind diese gleich groß; d. h. der Mittelpunkts-Winkel ist doppelt so groß wie jeder der beiden; einer davon ist der Winkel BC_tM, und dieser ist nichts anderes als der Umfangs-Winkel BC_tA.

Da liegen einige Schwierigkeiten auf der Hand: Der Außenwinkel-Satz muss bekannt und flexibel einsetzbar sein; man muss ein anderes Dreieck als das Ausgangs-Dreieck ABM und den Winkel BC_tM statt des Winkels BC_tA betrachten und dann den Außenwinkel-Satz sehen; dies wird erschwert durch das Vorhandensein der Sehne AB (die man eigentlich tatsächlich weglassen könnte) sowie das Abschneiden des freien Außenwinkel-Schenkels von M durch A durch die Kreis-Linie, wo man doch gewohnt ist, dass solche Schenkel ‚unendlich lang' gezeichnet sind. Würde man übrigens diesen Schenkel tatsächlich länger zeichnen, und zwar als Strahl ab C_t durch M, dann hätte man sogar gleich eine starke Hilfe, wenn man vom Sonder-Fall zum allgemeinen Fall übergeht, wo A nicht mehr auf dem Strahl von C_t durch M liegt (Abb. 6). Allerdings hat man im Sonder-Fall überhaupt keinen Anlass, diesen Strahl zu zeichnen.

Abb. 6

Der allgemeine Fall (Abb. 3) hat visuell eine ganz andere Struktur als der Sonder-Fall: das Dreieck und der Außen-Winkel sind nicht mehr vorhanden. Auf der Basis der Aktionen der

Studierenden haben wir lange diskutiert, ob man darauf kommen müsste, diesen Hilfs-Strahl von C_t durch M einzuzeichnen, aufgrund der beiden folgenden starken Argumente: Man hat ja noch auszunutzen, dass C_tM als Radius so lange ist wie AM und BM, und sollte diese Strecke einfach noch einzeichnen, wodurch man ja zwei Dreiecke des Typs wie im Sonder-Fall erhält (allerdings muss man diese Strecke dann noch zu einem Strahl verlängern); und: die Sonderfall-Strategie besagt hier, dass man die Anwendung des Außenwinkel-Satzes auf den allgemeinen Fall übertragen soll. — Wir sind aber tendenziell zu dem Schluss gekommen, dass man dafür den Beweis bereits i. W. kennen muss (wie das ja die ganze Krux der Problemlöse-Didaktik ist: all' die schönen Strategien eignen sich hervorragend zur nachträglichen Strukturierung einer Aufgaben-Bearbeitung, aber selbst bei den erfahrensten Expertinnen & Experten bewirkt ihr zielstrebiger Einsatz i. a. nicht die direkte Lösung einer wirklich neuen, nicht-trivialen Aufgabe). Und zwar hilft auch die DGS nicht, mit der man den Punkt C_t nur ein kleines bisschen hin und her bewegen und dabei genau hingucken könnte: der Sonder-Fall transformiert sich nicht ohne Weiteres in den allgemeinen Fall, und der Hilfs-Strahl taucht nicht ohne Weiteres auf.

In der Tat ist es wohl für alle Beteiligten am günstigsten, wenn man den Beweis einfach i. W. vorführt und ihn danach mit Hilfe des Ziehens noch einmal im Überblick rekapituliert. Das war ja die Ausgangs-Situation in den Interviews. Die Beweis-Führung durch die Studierenden war nicht wichtig, und so wurden der Sonder-Fall und der ‚normale' allgemeine Fall (spitzer Umfangs-Winkel und Addition der beiden Teil-Winkel) von mir selbst abgehandelt. Die Studierenden sollten lediglich noch nach der Zerlegung in die beiden Teil-Dreiecke durch Ziehen von C_t, und zwar um den ganzen Kreis (auch auf dem kurzen Bogen), alle Fälle in Augenschein nehmen. Den stumpf-winkligen Fall registrierten sie nach mehr oder weniger deutlichem Hinweis noch, aber nicht den Fall, wo die Winkel zu subtrahieren sind. Sie zogen viel zu schnell und verlangsamten die Bewegung zwar nach eindringlicher Aufforderung, hatten den Subtraktions-Fall sogar vor Augen, aber nahmen ihn nicht wahr.

Normalerweise bin ich skeptisch, wenn L&L davon berichten, was ‚die' S&S leisten oder nicht, weil sie das in der gewöhnlichen Klassenraum-Situation eigentlich immer nur höchstens von einigen wenigen wissen können. Aber unsere Beobachtungen beruhen ja auf Zweier-Interviews (wo sich allerdings nicht immer beide geäußert haben und ich in manchen Interviews gar nicht zur Behandlung dieser Aufgabe gekommen bin). Leider kann ich Ihnen hier keine Original-Aufnahmen vorführen, weil wir den Studierenden versprochen haben, diese nur zitierend zu verwenden.

4 Einige bis jetzt aus der Untersuchung gewonnene Erkenntnisse

4.1 Die Studierenden bringen i. a. nicht die Muße auf, überlegt und gezielt Änderungen der Situation vorzunehmen und Auffälligkeiten zu beobachten. Dafür ist gewiss die Interview-Situation mit verantwortlich. Aber ich erkenne auch den Bully-Effekt, d. h. dass der Computer zu Aktionen unabhängig von einem Sinn herausfordert. M. E. wird dieser Effekt durch den in der modernen Pädagogik geförderten S&S-Aktionismus nur verstärkt. Not täte stattdessen Erziehung und Training zum gezielten Beobachten über eine längere Zeit, mit einer gewissen Muße, mit starker Hilfestellung und recht straffer Anleitung wenigstens am Anfang. In diesem Anfangs-Zustand befinden sich offensichtlich auch unsere Studierenden. Das Ziehen und Beobachten ist ihnen noch lange nicht zur zweiten Natur geworden, auch wenn der Dozent es intensiv betrieben hat und betreiben ließ und es aus unserer Introspektion heraus selbstverständlich zu sein scheint.

4.2 Was uns bei der Suche nach geeigneten Aufgaben für die Interviews aufgefallen ist: Es fehlt immer noch ein DGS-bezogenes Klassifikations-Schema und eine entsprechende Übersicht für solche Aufgaben.

Wie schon HÖLZL bemerkte, sind für die Begründung einer durch Ziehen entdeckten Auffälligkeit oft abbildungs-geometrische Argumente angemessen. Dabei besteht die Gefahr, dass die Beweis-Lücke lediglich dort hin verschoben wird: Während i. a. die Geraden-Eigenschaft einer durch Ziehen erzeugten Orts-Linie zunächst zu Recht in Frage gestellt wird, neigen Viele dazu, sie beim Bild einer Geraden unter einer affinen Abbildung ohne Weiteres anzunehmen. Diese Lücke lässt sich jedoch innerhalb der Abbildungs-Geometrie ein für alle Mal schließen, und man kann ab dann auf die Geraden-Treue zurückgreifen (wie in der Kanal-Aufgabe) und auf aufwändige Kongruenz-Betrachtungen verzichten.

4.3 Unseren Studierenden war i. a. klar, dass eine visuell mit der DGS gewonnene Vermutung (inklusive Korrektheit einer Konstruktion), wenn sie denn zu einer Behauptung erhoben wird, zu begründen ist; — sei es, dass diese Erfordernis ihnen suggeriert wurde, sei es, dass sie sie wirklich verinnerlicht haben. Und mit der Existenz und der Harmonisierung zweier so unterschiedlicher Kulturen innerhalb der Geometrie hatten sie offenbar keine mentalen Probleme. Diese Harmonisierung dürfte, wie HÖLZL und Andere beobachtet haben, bei Mittelstufen-S&S nicht so bruchlos vonstatten gehen; vielmehr dürften sich die Motivierungs-Probleme für die begründende Geometrie, einem didaktischen Herzstück des Geometrie-Unterrichts, durch die Arbeit mit DGS noch verschärfen.

4.4 Der Bruch ist wegen des unterschiedlichen ontologischen Status der geometrischen Objekte noch tiefer, als dies in der DGS-Didaktik i. a. wahrgenommen wird: Während Abbildungs-Geometrie und Punktmengen-Auffassung schon immer untrennbar verbunden sind und auch die Kongruenz-Geometrie mit der mathematisch universellen Idee statischer Mengen gut zurechtkommt, sind die Objekte der DGS nun beweglich. Die mathematische Formalisierung erfordert einen erhöhten Begriffs-Aufwand, indem es jetzt, in der Mengen-Funktionen-Sprache, um stetige Abbildungen eines reellen Intervalls I in die Euklidische Ebene E bzw. allgemein bezüglich Figuren F um stetige Abbildungen IxF $\rightarrow$ E geht, die längen-treu (flächen-treu, geraden-treu o. ä.) bezüglich F sind. Wenn man da z. B. von der Bewegung des Punkts C redet, meint man das Durchlaufen der kontinuierlichen Abfolge der Bilder C_t (=C(t)), t von 0 bis 1, mit C_0 = C o. ä.

Bei diesem Problem handelt es sich keineswegs nur um mathematischen Formalismus, vielmehr geht es massiv um Grund-Vorstellungen und Grund-Verständnisse für diese Begriffe. Man kann ihm im Unterricht lange oder auf Dauer aus dem Weg gehen; aber ich meine, dass es, jedenfalls unter Voraussetzung gewisser niveau-voller Ziele, konstituierender Bestandteil eines Geometrie-Curriculums ist und unabhängig davon, ob es sich von selbst aufdrängt, diskutiert werden müsste.

4.5 Die von SCHUMANN (1991 und später) und Anderen immer betonte und von mir zwar akzeptierte, aber zugleich bagatellisierte Abhängigkeit der Begriffs-Bildung vom Werkzeug konnte man schön an folgendem Umstand sehen: Der sog. Spur-Modus ist z. B. in CABRI vorhanden und fehlte (zu der Zeit noch) in CINDERELLA. In ihm wird beim Ziehen eines Punkts die Bewegungs-Spur eines davon abhängigen Punkts in Real-Zeit erzeugt. Man sieht also jederzeit die direkte lokale Wirkung des Ziehens. (Dass die Spur dabei nur punktweise erzeugt wird und die Orts-Linie noch hinein gesehen oder gezeichnet werden muss, erscheint mir zwar unwesentlich, ist aber vielleicht auch nicht ganz bedeutungslos.) In CINDERELLA konnte man jedenfalls eine Orts-Linie nur auf einen Schlag erzeugen (dies ist natürlich in CABRI auch möglich). D. h. der Zusammenhang zwischen Ziehen und Orts-Linie wird nicht so deutlich. Dies identifizierten wir als eine mögliche Ursache für die auffällige Zieh-Abstinenz vieler Interviewten.

Literatur

BENDER, PETER (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht — unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen und Verformungen. Hauptvortrag auf dem 7. Workshop zur Visualisierung in Klagenfurt 1987. In: HERMANN KAUTSCHITSCH & WOLFGANG METZLER (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner 1989, 95–145

HÖLZL, REINHARD (1994): Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

HÖLZL, REINHARD (2000): Dynamische Geometrie-Software als integraler Bestandteil des Lern- und Lehr-Arrangements. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, 79–100

OEVERMANN, ULRICH (1986): Kontroversen über sinnverstehende Soziologie. Einige wiederkehrende Probleme und Mißverständnisse in der Rezeption der „objektiven Hermeneutik“. In: AUFENANGER, STEFAN & MARGRIT LENSSEN (Hrsg.): Handlung und Sinnstruktur. Bedeutung und Anwendung der objektiven Hermeneutik. München: Kindt, 19–83

SCHUMANN, HEINZ (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler & Stuttgart: Teubner

STRAUSS, ANSELM & JULIET CORBIN (1996): Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Psychologie Verlags Union