

Peter BENDER, Paderborn

(Wie) Kann man die Schriftliche Division verstehen?

"Die Schriftliche Division kann man nicht erklären", antwortet Roland, im Sommer 2002 am Ende seiner Grundschulzeit angelangt, auf meine entsprechende Frage. Anlass für diese Frage war die zu der Zeit stattfindende Erarbeitung eines neuen Grundschul-Lehrplans in Nordrhein-Westfalen, in deren Zuge die Mathematik-Kommission sich auch Gedanken darüber machte, welche Rolle die (normierte) Schriftliche Division (SD) zukünftig im Pflicht-Kanon spielen sollte. Nach einer beispielhaften, vom beratenden Mitglied Christoph Selter initiierten, halb-öffentlichen E-Mail-Diskussion mit zahlreichen Expertinnen und Experten im deutschsprachigen Raum, bei der sich überraschenderweise eine klare Mehrheit für die Beibehaltung der Schriftlichen Division im Pflicht-Kanon ausgesprochen hatte, rang sich die Kommission schließlich zu folgender Zielsetzung durch:

"Das Verfahren der schriftlichen Division durch einstellige und wichtige zweistellige Divisoren (z.B. 12, 20, 25, 50) soll verstanden werden".

Diese hat sie mit dem erläuternden Kommentar versehen, dass "nicht von allen Schülern Geläufigkeit zu verlangen" sein soll und "die Schüler schließlich — etwa bei Leistungsfeststellungen — selbst entscheiden können sollen, ob sie schriftlich oder halbschriftlich / mündlich dividieren".

Mit diesen Erläuterungen wollte man wohl auch der Minderheit gerecht werden, die sich für die Entfernung der SD aus dem Pflicht-Kanon ausgesprochen hatte. Damit ist man aber in mehrere Widersprüche geraten: Zwar sollen alle Kinder das Verfahren verstehen (was dann natürlich nicht von der Form des Divisors abhängen kann), aber nur von einem Teil (von welchem eigentlich?) wird die "geringer wertige" Leistung der Geläufigkeit verlangt. Auch muss es, wenn man denn das o.a. Ziel anstrebt, Leistungsfeststellungen geben, die sich genau auf die SD richten.

Dieses Dilemma der Kommission wird sich in der zukünftigen Schulrealität vermutlich von selbst auflösen: Lehrerinnen & Lehrer (L&L) werden das Thema zum Zwecke der Zeitersparnis zunehmend einfach beiseite lassen.

1. Die Schriftliche Division in der zeitgenössischen Grundschule

Dass das Schriftliche Rechnen erheblich an Bedeutung verloren hat, seitdem Taschenrechner in der Breite verfügbar sind (und so weit "die" Schule sich mit dieser Tatsache abgefunden hat), ist heute die herrschende Meinung in der Mathematik-Didaktik. Trotzdem wird es i.A. noch immer intensiv in der Schule behandelt, allerdings "offiziell" nicht mehr zwecks automatisierter Beherrschung, sondern mit den Zielen

- des Verstehens und dabei des Durchschauens unseres Zahlensystems,
- des Denkens in Algorithmen (auch im Hinblick auf Computer!),
- der Einsicht in die Ökonomie des Formalismus,
- der Förderung der Mündigkeit (Unabhängigkeit von Hilfsmitteln),
- der Vorbereitung auf viele Inhalte in den weiterführenden Schulen usw.

Ob diese Ziele bei einer Reduktion auf die beiden "Vorwärts"-Rechenarten 'Addition' und 'Multiplikation' für die Erarbeitung einer normierten Endform erreicht werden können, sei dahingestellt. Jedenfalls werden nach wie vor auch die beiden anderen Grundrechenarten 'Subtraktion' und 'Division' mehrheitlich gemäß der Lehrpläne in dieser Weise behandelt.

Allerdings erhalten die meisten Schülerinnen & Schüler (S&S) nicht die Chance, namentlich das Verfahren der SD zu "verstehen", sei es, dass sie einer ungeeigneten Unterrichtsmethode (mit zu wenig Gelegenheit für die Verständnis-Bildung) oder einem ungeeigneten didaktischen Hintergrund (z.B. Überbetonung der Algorithmus-Ausführung, Suggestierung von ungünstigen Grundvorstellungen und -verständnissen usw.) ausgesetzt sind. Dies wiederum führe ich nicht zuletzt darauf zurück, dass zahlreiche L&L mangels einer soliden mathematischen Ausbildung selbst ein unzureichendes Verständnis der SD haben und/oder ihnen die Erarbeitung eines Verständnisses bei den S&S zu anstrengend bzw. aufwändig ist.

2. Ganzheitlich-analytisches Denken als Lernziel

Dass auch die SD, als Abschluss des Arithmetik-Unterrichts, bis zum Ende der Grundschulzeit behandelt werden sollte, ergibt sich für mich aus folgendem Lernziel für den Mathematik-Unterricht, das m.E. eines der wichtigsten ist und die Potenz zur (natürlich nicht automatischen) Ausstrahlung über den pädagogischen Raum 'Schule' hinaus hat:

Situationen analytisch durchdringen, sie ganzheitlich betrachten und strukturieren, dabei einen vollständigen Überblick gewinnen, einen Raum definieren, komplettieren und abgrenzen, Neues in Bekanntes einordnen, einen Gedankengang, eine Theorie vollenden.

Eine solche Erziehung zum ganzheitlich-analytischen Denken sollte idealer Weise dazu führen, dass "die" S&S im 4. oder 5. Schj., nachdem sie die vier Grundrechenarten und bei einigen die schriftliche Form und damit dort einen gewissen Abschluss kennen gelernt haben, nun auch wissen wollen, wie dies bei der Division aussieht. Hierfür muss man auf die Strukturen der (Schriftlichen) Multiplikation (SM) zurückgreifen, und dabei ist diese für sich und in ihrem Zusammenspiel mit der Division (letztlich alle vier Grundrechenarten überhaupt) besser zu durchschauen. — Hier hat man eine getreue Realisierung des alten Wittmannschen **operativen Prinzips**.

3. Die Subtraktion als ein Grundverständnis für die Division

Dieses liefert direkt als ein **Grundverständnis für die Division die wiederholte Subtraktion des Divisors** in unmittelbarer Entsprechung zur fortgesetzten Addition bei der Multiplikation. Der **schriftlichen Form** liegt dann die gemäß der dezimalen Struktur **maximal verkürzte fortgesetzte Subtraktion** zu Grunde, wieder entsprechend der Multiplikation.

Beim Kopfrechnen wird das Wesen der Division als Subtraktion am wenigsten deutlich, da ihre explizite Behandlung erst einsetzt, wenn bei der Multiplikation die Ablösung von der Addition und der Übergang zu auswendig gekonnten Zahlensätzen bereits angelaufen ist. — Bei der halbschriftlichen Division (hsD) und der SD liegt das subtraktive Wesen eigentlich auf der Hand, springt aber i.A. nicht direkt ins Auge, im halbschriftlichen Modus, weil die Zerlegung des Dividenden (wie oft bei Subtraktionen) additiv aufgeschrieben und aufgefasst wird, im schriftlichen, weil es von dem komplizierten Algorithmus überlagert wird. — Mit einer leichten Umformung der normierten Formen kann die Parallelität von SM und SD recht suggestiv gemacht werden:

$$\begin{array}{r} 337 \cdot 218 \\ \underline{674} \\ 674 \\ \underline{337} \\ 7077 \\ \underline{2696} \\ 73466 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 73466 : 337 = 218 \\ \underline{674} \\ 606 \\ \underline{337} \\ 2696 \\ \underline{2696} \\ 0 \end{array}$$

Die SD unterscheidet sich, über ihren Verbindlichkeitscharakter hinaus, von der hsD dadurch, dass die abzuspaltenden Beträge **nicht nach Einfachheit im Aufbau** auszusuchen sind, sondern von links nach rechts die Zehnerstellen des Dividenden zu durchlaufen sind und jedes Mal das **maximal mögliche Vielfache des Divisors** abzuspalten ist. Gemeinsam ist beiden Modi in den herkömmlichen Formen aber, dass echte Multiplikationen zur Ermittlung des jeweils abzuspaltenden Betrags erforderlich sind. — Dass der hsD ein gewisses Flair der Leichtigkeit anhaftet, liegt letztlich daran, dass es seine Verbreitung etwa zeitgleich mit dem Verzicht auf komplizierte Divisoren beim Dividieren überhaupt erfahren hat. Dabei bräuchte man, wie Hartmut Spiegel vorschlägt, bei der SD mit einstelligen Divisoren den ganzen Wust der Multiplikations- und Subtraktions-Aufgaben nicht hinzuschreiben, sondern könnte direkt das Ergebnis einzeilig entwickeln, wiederum genau wie die Multiplikation mit einem einstelligen Faktor.

Für mich ist dies Teil der perfekten Analogie zwischen SM und SD: Bei der Multiplikation wird von den kleinen hin zu den großen Stellen abwech-

selnd multipliziert (als abgekürzte Addition) und addiert und so das Produkt **aufgebaut**; bei der Division wird von den großen hin zu den kleinen Stellen abwechselnd ebenfalls multipliziert (nun als abgekürzte Subtraktion) und subtrahiert und so der Dividend (das Produkt wieder) **abgebaut**.

Quintessenz: (i) "Die Schriftliche Division verstehen" beinhaltet "sie als **maximal abgekürzte wiederholte Subtraktion des Divisors** verstehen".

(ii) Es ist so weit zu subtrahieren, bis der Rest kleiner als der Divisor, aber noch nicht negativ ist. Die Anzahl der Subtraktionen ist die Ergebniszahl, und dazu gehört gegebenenfalls die Angabe eines etwaigen Rests.

(iii) Je nach Zahlenmaterial ist die wiederholte Subtraktion **abzukürzen**, indem man jeweils viele Schritte zu Großschritten zusammenfasst. So lange deren Umfang ins Belieben der Rechnenden gestellt ist, liegt **hsD** vor.

(iv) Um die **SD** handelt es sich, wenn die Folge der Großschritte der Folge der Stellen im Dividenten von "groß" nach "klein" entspricht und jeder Großschritt das jeweilige Maximum ist.

Wenn ein Grundschulkind die SD in diesem Sinn "verstanden" hat, dann sollte es entlang einer konkreten Aufgabe die Erläuterungen (i) bis (iv) abgeben und sich bei (i) bis (iii) sogar von der Aufgabe lösen können.

Aus Zeit- und Platzmangel kann ich die beiden Grundverständnisse der Division '**Aufteilen**' und '**Verteilen**' jetzt nicht in die Analyse einbeziehen.

4. Kurz-Bericht über die Interviews mit vier Grundschul-Absolventen

Ausgehend von einer Aufgabe zur hsD habe ich die Frage aufgeworfen, nach welchen Kriterien sie die zu dividierenden Teile abspalten, und nach einleuchtenden Antworten auf die Möglichkeit hingelenkt, den Divisor sehr oft einzeln abzuziehen. Mit starken Impulsen durch mich kamen sie dazu,

- das häufige Abziehen des Divisors 12 bzw. 337 zu durchdenken, und zwar sowohl in einer konkreten Aufteil-Situation, als auch beim arithmetischen Aufschrieb,
- die Anzahl der Subtraktionen als das Ergebnis zu erkennen,
- die einzelnen Subtraktionen zu Großschritten zusammenzufassen und
- die Entsprechungen zu halbschriftlichen Vorgehensweisen sowie zum schriftlichen Normalverfahren zu sehen.

Das gelang in jeweils 45 Minuten nur im Ansatz, d.h. im gelenkten Gespräch, aber nicht bis zur selbstständigen schriftlichen oder mündlichen Dokumentation eines kompletten, langfristig stabilen Durchschauens. Da wäre, zumal bei durchschnittlichen S&S, einiges mehr an einschlägigem Unterricht erforderlich, günstiger Weise kontinuierlich ab dem 3. Schj. mit einem souveränen Abschluss eventuell im 5. Schj.