Peter Bender
Universität Paderborn
27.02.2003
bender@upb.de

Mathematik und gesunder Menschenverstand

0. Einleitung

René Magritte hat 1946 den gesunden Menschen-Verstand (GMV) als ein besonderes Still-Leben dargestellt. Ich werde den GMV jetzt stärker auf die Mathematik beziehen, dabei einen Bogen von der frühen Kindheit bis zum Studium spannen und inhaltlich auch über den Unterricht hinaus gehen. — Dabei werde ich weder genau definieren und theoretisch klären können, was Mathematik, noch was GMV ist.

Nach der Bedeutung des GMV beim Mathematik-Treiben befragt, würden die meisten Angehörigen der Lehrenden-Zunft in Schule und Hochschule diese insgesamt und im eigenen Tun sehr hoch einschätzen. Dem stehen aber täglich Milliarden von realen Akten des Mathematik-Treibens entgegen, bei denen der GMV offensichtlich abwesend ist, und zwar nicht nur von Lernenden, sondern auch von uns, die wir das Verfertigen und Studieren mathematik-bezogener Arbeiten berufsmäßig betreiben.

Oft genug meint man, man hätte nicht die Zeit, um auf dem Einsatz des GMV zu bestehen, oder nicht den Platz (in einem Vorlesungs-Skript, in einer Original-Arbeit). Oft genug fehlt einfach die Disziplin. In der Tat braucht der GMV Zeit, Raum und Disziplin, angewandt auf einen selbst und auf Lernende, und dem steht immer wieder Bequemlichkeit — auf beiden Seiten! — entgegen, leider auch oft didaktisches oder fachliches Unvermögen — wohlgemerkt: der Lehrenden. — Unter den Mathematik-Didaktikern, die immer wieder den Einsatz des GMV angemahnt haben, möchte ich einige Kollegen besonders hervorheben, deren Werk ich näher kennen gelernt habe: Hans Freudenthal, Arnold Kirsch, Karl Heidenreich (bis zu seinem Tod in Ludwigsburg), Gerhard Müller und Hans Humenberger (beide in Dortmund).

1. Der Piagetsche Reihen-Versuch

Seit über 50 Jahren hat die Pädagogik insgesamt und die Mathematik-Didaktik im besonderen viel vom Lebens-Werk des Biologen, Erkenntnis-Theoretikers und Kognitions-Psychologen Jean Piaget (1896–1980) mit seinen bahnbrechenden neuen Forschungs-Methoden und seinen tiefen Aussagen zur Intelligenz und ihrer Entwicklung profitiert. Historisch notwendig blieben in seinen Arbeiten allerdings **soziale** Faktoren der Entstehung, Ausprägung und Entwicklung von Intelligenz ausgeblendet, und dem Intelligenz-Begriff fehlt die Komponente des GMV, den man in einer ersten Näherung als eine Verbindung von **allgemeiner Lebens-Erfahrung, Sprach-Verständnis und Menschen-Kenntnis**, angewandt auf Kontexte aller Art, auch mathematische, bezeichnen kann. Damit er sich lokal entfalten kann, braucht es nicht unbedingt eine sozialen Situation; seine Entstehung, Verwurzelung, Verankerung und Weiter-Entwicklung in den kognitiven Strukturen ist aber stark sozial geprägt.

In der Tat leiden die sterilen Umgebungen, in die Piaget die Kinder zum Zwecke der klinischen Interviews bringt, an einem Mangel an Sinnhaftigkeit (auch wenn den jüngeren Kindern zum Durchführen von Mengen-Manipulationen konkrete Objekte und zueinander passende Objekt-Typen vorlegt werden, z.B. Flaschen und Gläser, Eierbecher und Eier, Wanderer und Stöcke und Rucksäcke). Auch die Fragestellungen sind oft nicht dazu angetan, den GMV unmittelbar zu aktivieren, z.B. im **Reihen-Versuch,** der etwa so lautet: Wenn das Kind eine Reihe von Flaschen und dazu eine Reihe von gleich vielen Gläsern in Eins-zu-eins-Korrespondenz aufbaut, dann ist die Anzahl-Gleichheit beider Reihen ohne weiteres einsichtig. Wenn nun eine der beiden Reihen räumlich auseinander gezogen wird, verbunden mit der Frage, welche jetzt mehr Objekte enthält, dann antwortet die Mehrzahl der Kinder bis zum Alter von etwa 6 Jahren, dass in der längeren Reihe mehr Objekte enthalten sind. Für Piaget liegt dies daran, dass die Intelligenz noch nicht genügend ausgebildet ist und das Kind noch nicht in der Lage ist, die Erhaltung der Mächtigkeit einer Menge zu erkennen, wenn die Objekte dieser Menge räumlich weit genug verlagert werden. Dazu gibt er als m.E. tautologische Begründung an, dass Kinder in dem Alter i.a. sich die Umkehrung dieser Manipulation noch nicht vorstellen können. Dagegen folgendes Argument: **Wenn** ein Kind sich die Umkehrung dieser Manipulation vorstellen **kann**, muss es deshalb noch lange nicht die Mächtigkeit einer Menge als konstant ansehen: Wenn es in der einen Richtung mehr Objekte werden, liegt es auf der Hand, dass es bei der umgekehrten Richtung wieder weniger werden und die Anzahl am Schluss wieder dieselbe ist (noch sinnfälliger ist dies bei den ebenfalls berühmten Umfüll-Versuchen).

Ein klassischer Einwand auf anderer Ebene lautet, dass das Kind (durchaus unbewusst) versucht, sich angesichts des offenbar ernsthaften Charakters der ganzen Situation die von einer ersichtlich seriösen erwachsenen Person aufgeworfene Problemstellung sinnvoll zu machen, und die Frage nach dem "mehr" z.B. als Frage nach der räumlichen Ausdehnung statt nach der Anzahl versteht (was im Französischen, der Sprache der Piagetschen Interviews, durch das gemeinsame Wort "plus" besonders stark suggeriert wird) oder ein unbekanntes, undurchschaubares Phänomen unterstellt (ähnlich der Elektrizität, dem Telefon, der Selbstfahr-Kutsche) oder einfach der erwachsenen Person eine **dieser** möglicherweise passende Antwort gibt, zumal wenn nach längerer Befragung seine Konzentrations-Fähigkeit nachlässt. Es muss sich hier also nicht um einen Mangel an logisch-mathematischer Intelligenz handeln; es könnte einfach soziale Intelligenz fehlen, indem jüngere Kinder weniger Lebens-Erfahrung haben und deswegen noch mehr Phänomene für möglich halten.

Ich möchte nun von zwei jungen Kindern berichten, mit denen ich den Reihen-Versuch durchführte. Eine sorgfältige Analyse habe ich in (Bender 2001) ausgearbeitet. Jetzt möchte ich Ihnen lediglich Ausschnitte aus den Video-Aufnahmen vorführen, die für sich selbst sprechen werden. Durch den Einsatz ihres GMV kamen die beiden Kinder zu ganz anderen Ergebnissen, als die Piagetsche Lehre erwarten lässt: Thurid (weiblich, 3 Jahre und 9 Monate alt) und Roland (männlich, 3;5) stellen beide (unabhängig voneinander) fest, dass sich die Anzahl der Objekte, deren Reihe auseinander gezogen wird, **verringert**. Dass dies nichts mit mangelnder logisch-mathematischer Intelligenz (fehlender Einsicht in die Objekt-Identität und Anzahl-Erhaltung) zu tun hat, ergibt sich aus ihren Begründungen.

Bei T (im Juni 1993) wurde Duplo-Material (vergrößertes Lego) verwendet, mit dem sie umfangreiche Spiel-Erfahrung hat: Im Wohnzimmer von Ts Familie stellen T und der Versuchs-Leiter V gemeinsam auf einem Tisch 8 Wägelchen in eine Reihe und setzen auf jedes ein Tier (3 Pferde, 2 Seehunde, 2 Krokodile, 1 Schaf). Danach steigt jedes Tier ab und platziert sich vor seinem Wagen. Mehrfach fragt V , ob es mehr Tiere oder mehr Wagen sind. Für T sind es immer gleich viele ("auch so viele"). Beim ersten Mal, als die Tiere noch auf den Wagen sitzen, zählt sie zusätzlich die Reihe korrekt ab; sie sagt die Zahlwort-Reihe richtig auf und zeigt bei jedem Zahlwort auf einen neuen Wagen (mit Tier). Es könnte sein, dass T die Frage des

V von vorneherein als Frage nach der Anzahl versteht; vermutlich will sie aber mit dem Zähl-Vorgang deutlich machen, dass bei jedem Zähl-Schritt ein Wagen und ein Tier dazu kommen, dass die Gleichmächtigkeit also fortwährend erhalten bleibt (Prinzip der Induktion). Auf weitere Nachfragen und Begründungs-Forderungen zeigt T auf die Szene und erläutert "weil hier auch so gleich Tiere sind" (d.h. man sieht es) und später "weil du auch so viele gehabt ... genommen hast".

Nach dem Auseinanderziehen der Reihe der Tiere und der Frage, ob es jetzt mehr Tiere sind, antwortet sie: "Nee, mehr Wagen." Auf Nachfrage besteht sie auf ihrer Aussage und begründet sie, auf die nun etwas außerhalb der Wagen-Reihe stehenden 3–4 Tiere zeigend, "weil **die** Tiere weg sind". Auf Aussage und Begründung beharrt sie trotz aller Versuche von V , sie zu verunsichern. Dabei wird sie allmählich etwas ungeduldig und ergänzt mit einem (in der Familie so gebräuchlichen) versöhnlich-bedauernden, aber nach längerer Erklärungs-Bereitschaft nun abschließenden "leider" (ist zu konstatieren, dass diese Tiere weg sind).

Als die Reihe der Tiere wieder zusammengeschoben wird, sind die beiden Anzahlen für T wieder gleich; als dann die Reihe der Wagen auseinander gezogen wird, sind es für T mehr Tiere, "weil **die** Wagen weg sind"; und als dasselbe nochmals mit der Reihe der Tiere durchgeführt wird, sind es für T wieder, völlig konsistent, mehr Wagen.

Als V mit seiner Verunsicherungs-Strategie nicht weiter kommt, fordert er T zum Zählen auf. Allerdings paart sich jetzt bei T Unlust mit Schalk: Sie sagt die Zahlwort-Reihe unabhängig von den Gegenständen auf, landet bei 1000, u.ä. V versucht zwar noch, T verbal auf seine Interessen zu trimmen, muss dabei aber zu viel vorgeben und bricht schließlich den Versuch ab (zumal diesem schon anstrengender Weise das Umfüll-Experiment vorausgegangen war).

Wir sehen: Erhaltung der Objekt-Identität und Anzahl-Konstanz sind für T gegeben; außerdem kann sie zählen. In der Reihe, die jeweils auseinander gezogen wird, werden es deswegen weniger Objekte, weil durch diese Operation quasi einige von der Szene entfernt werden. Beim Zusammenziehen werden diese selbstverständlich wieder hinzugefügt, und die ursprüngliche Anzahl ist wieder gegeben.

Im Alter von 4;11 (ein gutes Jahr später) wird mit T der Reihen-Versuch (nun mit 10 Wagen und 10 Tieren) wiederholt. Die Anzahl-Gleichheit nach dem Absteigen begründet sie nun sprachlich elaborierter: "weil man das sieht", und auf Nachfrage, "weil jeder bei seinem Platz steht". Nach dem Auseinanderziehen (und auch, wenn man die Reihe der Tiere noch viel weiter auseinanderziehen würde) sind nun die beiden Anzahlen "immer noch gleich". Der Aspekt der abgegrenzten Szene spielt jetzt keine Rolle mehr. Die Erhaltung der Objekt-Identität und damit die Anzahl-Konstanz bleibt jetzt als alleiniges Argument: "weil ich es gesehen habe" und weiter: "weil, vorher standen sie auf den Plätzen, und jetzt nicht mehr". Mit der Frage, ob ein Tier oder ein Wagen übrig bliebe, wenn man die Reihe der Tiere wieder zusammen schöbe, kann T schon gar nichts mehr anfangen: "Wie meinst du das?"

Bei R (im August 1995) handelte es sich um Spielzeug-Autos (alle etwa gleich groß, im Mittel ca. 10 cm lang), die er gerade auf dem Boden neben einem stilisierten Stadtplan geparkt hat und die er gleich auf dem Tisch aufbauen soll, sowie um Lego-Männchen, mit denen er ebenfalls umfangreiche Spiel-Erfahrung hat. Zunächst stellt er auf Nachfrage durch korrektes Zählen (wie seinerzeit T) die Anzahl 7 der Autos fest und bemerkt, dass eines kaputt ist, worauf V (in Anknüpfung an Rs vorausgegangene Tätigkeit) meint: "Das lassen wir trotzdem mitspielen". Nun stellt er die Autos in eine Reihe auf den Tisch und vor jedes Auto ein Männchen. Auf die Frage: "Sind das mehr Männchen oder mehr Autos oder gleich viele"; antwortet R : "Gleich viele"; und begründet, mit einem Finger auf die Szene zeigend und diesen dabei hin und her bewegend: "Weil das viele Männchen und viele Autos sind." — Ersichtlich will er nicht äußern, dass allgemein zwei Mengen mit jeweils vielen Elementen gleichmächtig seien, sondern er will sagen, dass es hier genau so viele Männchen wie Autos sind. Dieses Argument wiederum bedeutet etwas anderes als die Wiederholung der ursprünglichen Antwort-Alternative (wie durch die Finger-Bewegung zusätzlich klar wird), nämlich den Hinweis auf die Eins-zu-eins-Korrespondenz von Autos und Männchen.

Als dann die Reihe der Männchen auseinander gezogen ist, stellt R fest, dass es nun mehr Autos sind, mit der Begründung: "Weil da zwei Männchen 'raus sind". Als V fragt: "Und wenn man sie jetzt wieder vor die Autos stellt?", antwortet R , diese Situation antizipierend: "Dann sind's wieder viele" (= gleich viele).

Bei **dieser** Form des Reihen-Versuchs haben **diese** beiden etwa 3-1/2-jährigen Kinder ganz anders reagiert, als Piagets Lehre nahe legt. Sie haben Mengen (im Umfang ≤10) korrekt und sicher abgezählt. Für sie waren Objekt-Identität und Anzahl-Konstanz gegeben. Das Umfeld, in dem der Versuch durchgeführt wurde, die Gegenstände und deren Verwendung sowie der Versuchs-Leiter und das Filmen, — alles dies war ihnen vertraut, so dass sich die Situation nahtlos an ihr Alltags-Leben anschloss und sie ohne Weiteres ihren GMV einsetzen konnten.

2. Kapitäns-Aufgaben

Die Abwesenheit von erkennbarem Sinn und in Verbindung damit eine feindliche Atmosphäre für den GMV weltweit im üblichen Mathematik-Unterricht wird von Stella Baruk in ihrem berühmten Buch "Wie alt ist der Kapitän?" (1985 & 1989) heftig kritisiert.

Allerdings ist die Durchdringung des Mathematik-Unterrichts mit Sinn alles andere als trivial. Z.B. ist Anwendungs-Bezug, und zwar durchaus auf der Basis von authentischen Beispielen, (wie auch ich ihn schon — wohlfeil — gefordert habe) zwar möglicherweise förderlich, aber weder hinreichend, noch notwendig. Zu beachten ist nämlich: Wohl bereitet Schule auf ein Leben in der Gesellschaft vor und ist darüber hinaus selbst Teil der Lebens-Welt. Aber sie ist gerade nicht der Ernst-Fall, sondern sie ist **der** Schonraum in unserer Gesellschaft; sie vermittelt, genau genommen, nur gefilterte, geglättete, beschönigte, — eben vermittelte — Realität; und es ist — für alle offensichtlich — immer eine pädagogische Absicht vorhanden, die allerdings oft von den S&S inhaltlich nicht durchschaut wird und (was redlicherweise festgestellt werden muss) nicht durchschaut werden kann, möge es sich um eine noch so authentische Sach-**Aufgabe** (!), einen noch so emanzipatorischen **Unterrichts**- (!) Stil, ein noch so autonomes **Schul**- (!) Projekt handeln.

Dies alles wissen ABC-Schützinnen und -Schützen genau so wie Abiturientinnen und Abiturienten, und aus diesem Grund brechen sie nicht in "ein gewaltiges allgemeines Gelächter" (wie Baruk es von ihnen fordert) aus, wenn ihnen eine sog. Kapitäns-Aufgabe vorgelegt wird wie: "Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen; wie alt ist der Kapitän?". Sondern "man bekommt" von Denjenigen, die sie durchschauen, "eine höfliche ablehnende Antwort" (auch von Erwachsenen, 34f), weil sie eben die völlig ungewohnte Absicht der Herausforderung zum Gelächter **nicht** durchschauen. Die Anderen dagegen "akzeptieren in schreckenerregender Weise das Nichtakzeptierbare" (33; alles in der Diktion Baruks) und halten die Aufgabe für sinnvoll. — In den höflichen Antworten erblicke ich ein durchaus positives Sozial-Verhalten und im Rechnen mit den Zahlen eine typische Aktivität in der Vermitteltheits-Pädagogik-Schonraum-Situation, wo ohne großes Nachdenken ein Sinn auf der Meta-Ebene konstruiert wird und die Rede von "irrsinnig", von "verrückt" (44) oder von der "psychiatrischen Station" (29) nicht angebracht ist.

Wer hier die ausgetretenen Pfade heimlich und unerwartet verlässt, hat kein Recht sich zu mokieren, keinen Anlass zu klagen und verhält sich **unfair**, wenn sie oder er sich über die Berichte aufregt oder amüsiert, wie S&S unvorbereitet und vertrauensvoll in eine von Erwachsenen gestellte Falle tappen.

Dies hat Christoph Selter in Heidelberg schon vor Jahren ganz deutlich gemacht, als er seinen Weg von einer "Erschütterung bis ins 'pädagogische Mark'" bis hin zu einer "optimistischeren Einschätzung des geistigen Potentials" der Kinder beschrieb; und in seinem Vortrag vorhin hat er ja überzeugende Belege für dieses Potenzial gerade bei der Bearbeitung von Kapitäns-Aufgaben beigebracht (Selter 1994).

Viele der Kolleginnen und Kollegen, die Baruks Auffassungen (vielleicht nicht in der Diktion, aber im Duktus) teilen, halten m.W. dagegen folgende Aufgabe sehr wohl für didaktisch wertvoll: "Auf einem Bauern-Hof gibt es Hasen und Hühner. Insgesamt sind es 26 Tiere, und sie haben zusammen 70 Beine. Wie viele Hasen und wie viele Hühner sind es?" In Sachen "Sinnhaftigkeit" hat sie der Kapitäns-Aufgabe eigentlich nichts voraus; und **wie** sollen die S&S den mathematik-didaktischen Unterschied erkennen, wo sie doch beides Mal aus gegebenen Zahlen über einen im Text versteckten Zusammenhang mit bekannten Operationen neue Zahlen ermitteln sollen?

Um nicht missverstanden zu werden: Ich hätte schon gern, dass S&S Kapitäns-Aufgaben mit der Reaktion "die Antwort ist durch die gegebenen Fakten nicht bestimmt" erledigen, dass der Mathematik-Unterricht eine emanzipatorische Wirkung hat und man dort etwas "für das Leben lernt". Aber solche Ziele sind eben durch den Vermitteltheits-Pädagogik-Schonraum-Charakter von Schule beschränkt und kanalisiert; — und das ist gut so. Wo die "offizielle" Rechen-Methodik (und die Pädagogik überhaupt) bis in die 1960-er Jahre diesen Charakter mehr oder weniger bewusst ausgelebt hat, merken deren Kritikerinnen und Kritiker, die seitdem mit den unterschiedlichsten Verbesserungs-Ansätzen auf den Plan getreten sind, nur nicht, dass sie, wohl etwas subtiler, aber dennoch: nichts anderes tun; und eigentlich auch nichts anderes tun können.

3. Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert

Ein Großteil der Erinnerung an unseren Rechen-Unterricht besteht im Memorieren solcher Regeln, die man auswendig kennt, ohne sie wirklich verstanden zu haben, und die einem im Leben noch nie in der Allgemeinheit begegnet sind. Ohne in die Rechtfertigungs-Debatte einsteigen zu wollen, und unter Fortlassung subtilerer Argumente stelle ich fest: Wenn man überhaupt das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen in einem gewissen Umfang behandelt, dann gehört die Division von Brüchen als Abschluss dieses Gebiets dazu gemäß einem ganz grundsätzlichen Ziel des Mathematik-Unterrichts, nämlich

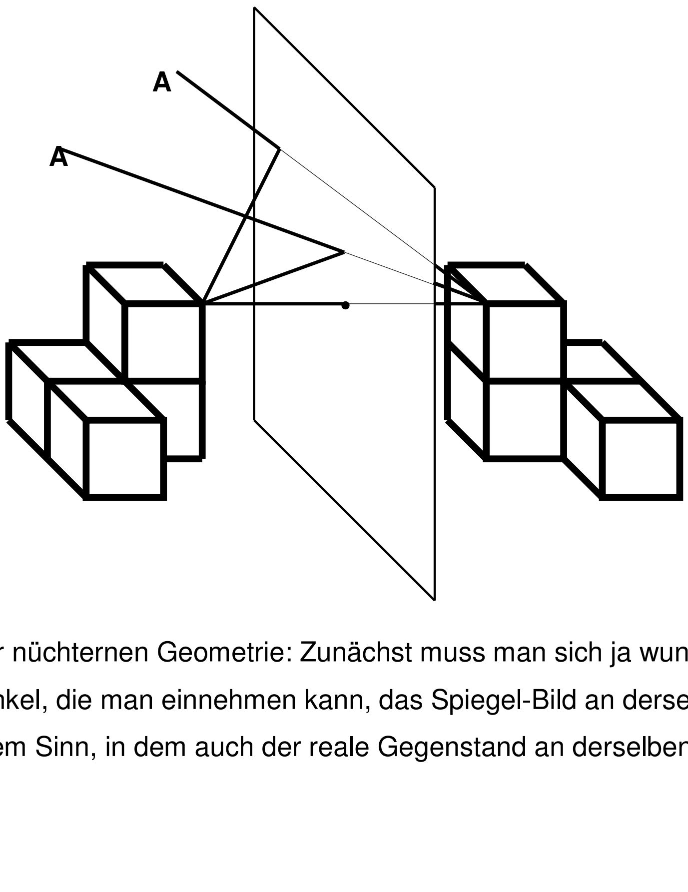
Situationen analytisch durchdringen, sie ganzheitlich betrachten und strukturieren, dabei einen vollständigen Überblick gewinnen, einen Raum definieren, komplettieren und abgrenzen, Neues in Bekanntes einordnen, einen Gedankengang, eine Theorie vollenden.

Ein Sach-Kontext könnte sein: 30 l Kakao in einem Kanister sollen in Fläschchen zu je 1/4 l abgefüllt werden. — Hier liegt die Grundvorstellung vom Dividieren als Aufteilen nahe. Umformulierung der Aufgabe: Wie oft passt 1/4 l in 30 l ? Nun ist ja 1/4 l definitions-gemäß der Teil, der 4-mal in 1 l passt, und somit passt er $30{\cdot}4$-mal in 30 l . — Wenn nun 3/4 l-Flaschen abgefüllt werden sollen, dann sind die Portionen also 3-mal so groß, und die vorher erhaltene Anzahl ist noch durch 3 zu dividieren. D.h. 3/4 l passt $30{\cdot}4/3$-mal in 30 l , d.h. $30 : 3/4 = 30 \cdot 4/3$.

Ich will die didaktischen und methodischen Probleme nicht bagatellisieren. Seit über 100 Jahren beschäftigt sich die Rechen-Didaktik mit ihnen, und ich habe Verständnis für jede Lehr-Person, die sich aus Zeit- und Anstrengungs-Gründen mit dem Merk-Sätzchen zufrieden gibt. Aber wenn man inhaltliche Vorstellungen vom Dividieren (hier als Aufteilen) sowie vom Nenner und vom Zähler hat, ist das **Verstehen** dieses Merk-Sätzchens eine (zugegeben: nicht-triviale) Sache des GMV.

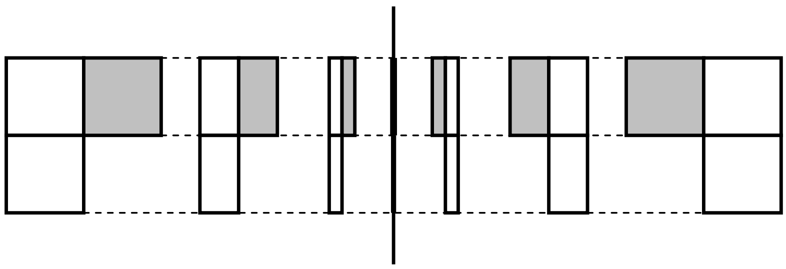
4. Warum meinen wir, dass der Spiegel 'links' und 'rechts' vertauscht, sogar dann noch, wenn wir wissen, dass er 'vorne' und 'hinten' vertauscht?

Das Phänomen des Spiegelns ist in der Bildenden Kunst immer wieder dargestellt worden, und natürlich halten sich die Künstlerinnen & Künstler oft gerade nicht an die Gesetze der Physik. So hat Edouard Manet bei seiner "Bar in den Folies-Bergère" (1882) aus realistischer Sicht einiges falsch gemacht, und dazu gibt es tiefgründige Interpretationen, die dem Werk besser gerecht werden als meine Reduktion auf die Geometrie jetzt. — Oder: Das Gemälde "Las Meniñas" ("Die Hoffräulein") von Diego Velázquez (1656) kann man sich überhaupt nur richtig erschließen, wenn man weiß, dass es als **Spiegel-Bild** einer realen Situation gemalt ist, in der der Maler **Künstler, Betrachter und Betrachteter** zugleich ist. Die These vom Spiegel-Bild wurde erst 1982 vom Kunst-Historiker Hermann Ulrich Asemissen auf Grund zahlreicher Indizien substanziiert, z.B. des Scheitels der Infantin Margarita auf der anderen Seite als auf sonstigen Gemälden, und, ausschlag-gebend, eines Vergleichs des dargestellten Saals des Alcázars mit einer originalen Grundriss-Zeichnung, bei dem sich die Darstellung als spiegel-verkehrt erwies.

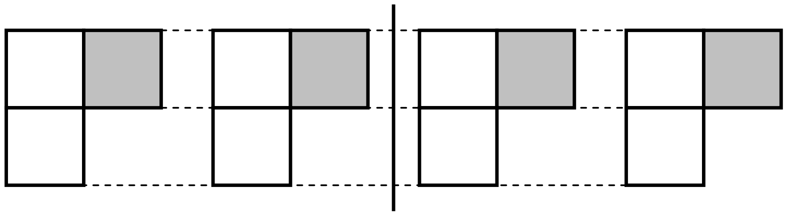


Doch nun zur nüchternen Geometrie: Zunächst muss man sich ja wundern, dass für alle Blick-Winkel, die man einnehmen kann, das Spiegel-Bild an derselben Stelle erscheint (in dem Sinn, in dem auch der reale Gegenstand an derselben Stelle erscheint). Das ist hier in der Zeichnung angedeutet. Man kann dieses Faktum leicht konstruktiv überprüfen, wenn man die Sache zweidimensional mit einer Spiegel-Achse (statt -Ebene) und ebenen Figuren betrachtet.

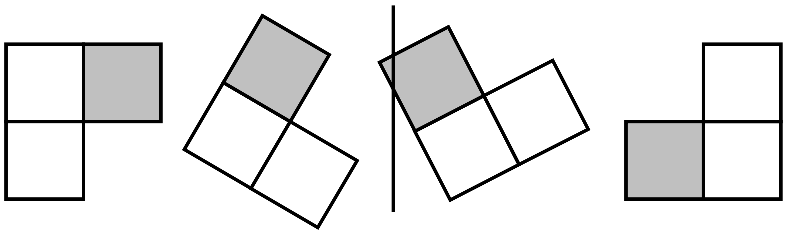
Aus dieser Blickwinkel-Überlegung resultiert auch die mathematische Konstruktion des Spiegel-Bildes: Von jedem Ur-Punkt aus fällt man das Lot auf die Spiegel-Ebene, verdoppelt dieses und erhält den Bild-Punkt. Je näher ein **Ur-Punkt** dem Spiegel ist, umso näher ist auch (in der virtuellen Raum-Hälfte) der **Bild-Punkt** dem Spiegel. Man kann sich diesen Vorgang zur Not als eine stetige Bewegung aller Punkte von ihrer Ur-Lage in die Bild-Lage vorstellen: Man räumt ihnen eine Sekunde Zeit ein, sich auf dem direkten Wege in die Spiegel-Ebene zu begeben; die weiter entfernten müssen also schneller als die näher liegenden sein. Dabei wird die Figur immer dünner, und im Spiegel hat sie die Dicke Null und ist zwei-dimensional geworden. Die Punkte kriegen nun eine weitere Sekunde Zeit, in der sie ihre Aktion mit der selben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Figur wird sozusagen durch sich selbst hindurch gedrückt, wird wieder dicker, und schließlich versammeln sich alle Punkte an den entsprechenden Stellen im virtuellen Raum: Das (kongruente) Spiegel-Bild ist entstanden.



Gewöhnt sind wir eine solche Orts-Änderung einer Figur zu einer anderen Raum-Stelle als Verschiebung, wo alle Punkte sich mit gleicher Geschwindigkeit in die selbe Richtung bewegen, mit dem Ergebnis wie in der "Verbotenen Reproduktion" von René Magritte (1937), wo der Betrachter im Spiegel seinen eigenen Hinterkopf sieht. So ist also die Aussage zu verstehen, dass der Spiegel gar nicht 'links' und 'rechts' vertauscht, sondern 'vorne' und 'hinten'. Bei der Spiegelung an einem Gewässer wird 'unten' und 'oben' vertauscht, und bezüglich dem Wasser-Spiegel ist das ja 'vorne' und 'hinten'.



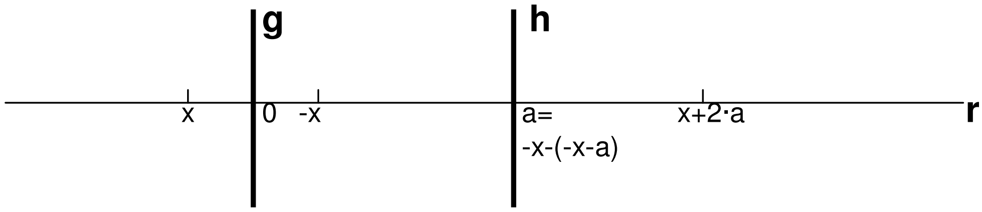
Warum haben wir aber, auch wenn wir das jetzt wissen, das Gefühl, dass der Spiegel trotzdem 'links' und 'rechts' vertauscht? Nun kommt der GMV richtig in Fahrt: Wenn wir einen Menschen, auch uns selbst, und eigentlich beliebige Objekte im Spiegel sehen, so liegt für uns nicht nur eine Verschiebung zu Grunde, sondern das Objekt hat sich außerdem um 180 Grad gedreht, denn es wendet uns ja jetzt seine Vorder-Seite (statt des Hinter-Kopfs wie im Bild von Magritte) zu. Aus langer Erfahrung wissen wir, dass bei einer solchen **realen** Drehung 'links' und 'rechts' ihre Plätze vertauschen; und dass dies beim Spiegel-Bild gerade nicht so ist, fällt uns auf: Im Vergleich zur Erwartung beseitigt (oder verhindert) der Spiegel also die 'Links'-'rechts'-Vertauschung dieser Drehung, und das sehen wir genau als 'Links'-'rechts'-Vertauschung durch ihn.



Dass wir dem Spiegel-Bild — unbewusst — eine Drehung um 180 Grad unterstellen, liegt wiederum daran, dass in unserer Anatomie (ebenso im Großen und Ganzen bei Tieren sowie bei Fahrzeugen) der Unterschied zwischen 'vorne' und 'hinten' aus guten Gründen ganz deutlich ausgeprägt ist, während 'links' und 'rechts' ebenfalls aus guten Gründen im Prinzip kongruent sind (bis auf Ausnahmen wie die Winker-Krabbe, deren Männchen eine kleine Schere als Fress-Werkzeug und eine große, auffällig gefärbte zum Anlocken der Weibchen und Abschrecken anderer Männchen haben). Die 'Vorne'-'hinten'-Vertauschung bei der Spiegelung ist dermaßen dominant, dass wir mit dieser unvermeidlich eine 180-Grad-Drehung assoziieren und uns dann nur noch auffällt, dass 'links' und 'rechts' ihre damit eigentlich verbundene Vertauschung nicht mitgemacht haben.

Mit einem rotations-symmetrischen Körper-Bau wie bei den Seesternen und einer entsprechend rotations-symmetrischen Anordnung der Augen wären wir wahrnehmungs-psychologisch vermutlich eher darauf eingestellt, ohne Weiteres zu erkennen, dass der Spiegel 'vorne' und 'hinten' vertauscht.

5. Hintereinander-Ausführung zweier Spiegelungen an parallelen Achsen in der Ebene

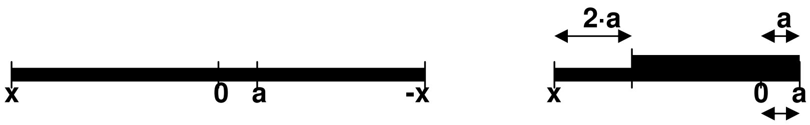


Bekanntlich ergibt sich hierbei eine Verschiebung, deren Vektor doppelt so lang wie der Abstand der beiden Achsen ist. Das lässt sich leicht einsehen: Seien g die Erst- und h die Zweit-Achse mit Abstand $a \geq 0$. Dann legen wir die Zahlen-Gerade r senkrecht zu den beiden Achsen g und h , so dass g sie in 0 und h sie in a schneidet. Für irgend einen Punkt in der Ebene mit der Koordinate x hat sein Bild unter der Spiegelung an g die Koordinate $-x$ und den Abstand $-x-a$ zu h . Spiegelung an h bedeutet: Von $-x$ einmal $-x-a$ subtrahieren; dann ist man auf h ; und dann noch einmal $-x-a$ subtrahieren; dann hat man den endgültigen Bild-Punkt mit der Koordinate $-x-2\cdot(-x-a) = x+2\cdot a$, um $2\cdot a$ gegenüber dem Ur-Punkt verschoben.

Das Elegante und Ökonomische, aber zugleich Anspruchsvolle an dieser arithmetisierten Lösung besteht darin, dass man keine Fall-Unterscheidung anstellen muss, in welchem der vier durch die Achsen und ihre gegenseitigen Spiegel-Bilder ausgezeichneten Bereiche der Ur-Punkt liegt. Die Rechnung gilt für beliebige x . — Trotzdem bleibt die Frage nach dem tieferen Grund, warum da das Doppelte des Achsen-Abstands herauskommt, offen. Und ein Ziel des Mathematik-Unterrichts lautet m.E., dass in einer solchen Situation die Frage nach dem tieferen Grund gestellt wird.

Diese hängt eng mit dem Phänomen zusammen, dass man beim Falten von Handtüchern oder von rechteckigem Papier Schwierigkeiten hat, die gegenüber liegenden Ränder genau zur Deckung zu bringen. In der Tat ist es so: wenn Sie die Mittel-Achse um den Abstand a verfehlen, liegen die Ränder schon um den Abstand $2\cdot a$

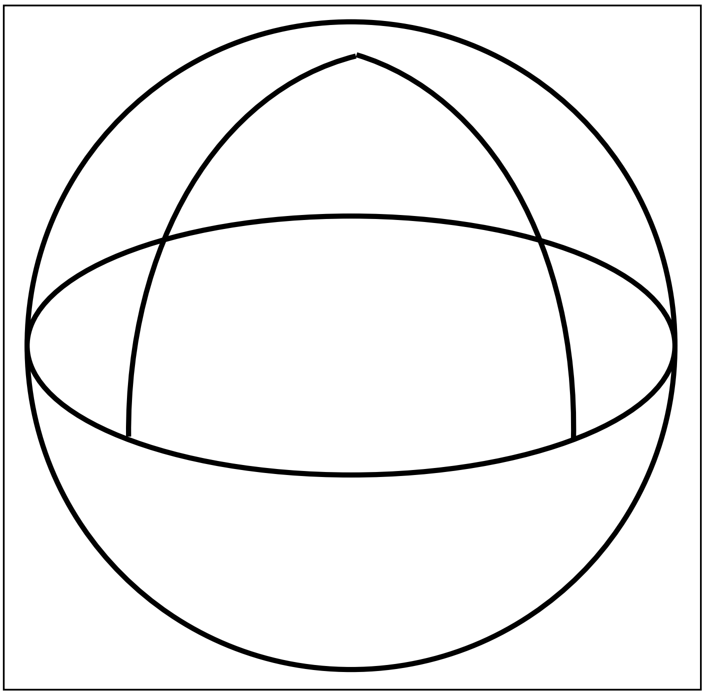
auseinander. Wir schauen uns die Sache von der Seite an: Die genaue Mittel-Achse kriegt die Koordinate 0 und der eine Rand die Koordinate x . Das Spiegeln an der Mittel-Achse realisieren wir durch Klappen der einen Handtuch-Hälfte auf die andere, und wir erhalten die Koordinate des anderen Rands als -x . Wenn wir nun die -x-Hälfte auf die andere klappen wollen, aber nicht die Mittel-Achse, sondern eine Achse im Abstand a als Falt-Achse erwischen, so haben wir diese 'Hälfte' zunächst einmal überhaupt von 0 bis a um a verkürzt, und wenn diese 'Hälfte' dann auf der anderen liegt, fehlt zusätzlich noch einmal ein Stück der Länge a , nämlich das von a wieder bis 0 . Insgesamt fehlt also nach dem Falten ein Stück der Länge 2·a zwischen den Rändern. — Die Handtuch-Dicke vergrößert diesen Abstand außerdem noch.



Gelöscht: <sp>

Offensichtlich muss man hier noch einige fachlich-didaktische Tücken beachten. Als Abbildungs-Geometer sträuben sich mir die Haare, wenn die Hintereinander-Ausführung von Kongruenz-Abbildungen durch Falten von endlichen realen Körpern dargestellt wird, und ich würde eine solche Veranschaulichung erst spät in ein Abbildungsgeometrie-Curriculum einbringen, wenn sich die angestrebten abstrakten Begriffe bereits einigermaßen gefestigt haben. — Abstraktheit läuft dem GMV keinesfalls zuwider, — es ist nur so, dass gerade dort (wie hier an diesem Beispiel) überhaupt erst die richtigen Herausforderungen an diesen auftreten, und gerade dort kann und muss er sich beweisen. Umgekehrt ist Anschaulichkeit keine Garantie für eine Affinität zum GMV. Als negatives Beispiel die folgende Fehl-Veranschaulichung einer Beweis-Figur zum Dreiecks-Inkreis als der Querschnitt einer Tüte mit Eis-Bällchen, die sich gegenseitig durchdringen.

6. Kugel-Geometrie!



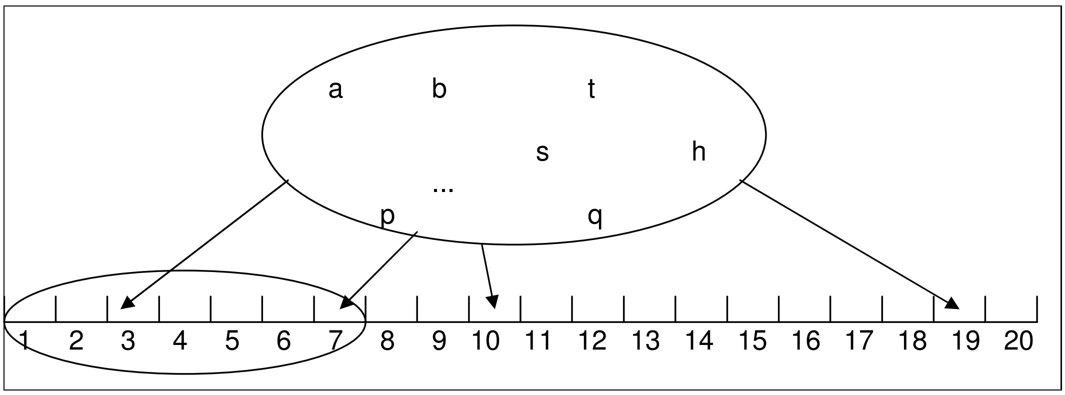
Die Vorzüge dieses Gebiets sind gar nicht hoch genug einzuschätzen. Es steht fast konkurrenzlos da im Dienste der Raum-Anschauung, leistet einen wesentlichen Beitrag für Geografie, Astronomie usw., und bietet sich heute besonders durch die zunehmende Drei-Dimensionalisierung der Computer-Grafik inklusive virtueller Welten in Spielen und Filmen an. Man muss da nicht so weit gehen und räumliche Trigonometrie treiben. Es genügt, bis zu den fundamentalen Unterschieden zur euklidischen Geometrie vorzudringen: Geraden schneiden sich immer, die Winkel-Summe im Dreieck ist immer größer als 180 Grad; es gibt keine ähnlichen nicht-kongruenten Dreiecke, und der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Überschuss der Winkel-Summe über 180 Grad. Diese Fakten brauchen wir zur Aktivierung des GMV, weil wir ohne dieses Kontrast-Programm auf der Kugel die Rolle des Parallelen-Axioms, der Winkel-Summe im Dreieck, der Kongruenz-Sätze u.v.a. in der euklidischen Ebene gar nicht richtig einschätzen können.

7. Wie viele k-elementige Teil-Mengen hat eine n-elementige Menge ($0 \le k \le n$)?

Die Frage wird durch den Binomial-Koeffizienten $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ beantwortet. Diesen baut man gern über das Pascalsche Dreieck auf. Den Beweis führt man dann formal mit der vollständigen Induktion, eine wichtige Beweis-Technik und eine bedeutende Facette der Struktur der Menge der natürlichen Zahlen. Heute möchte ich für einen anderen Zugang plädieren, nämlich über den Term selbst. Vehement widerspreche ich dem leider üblichen Bild von Mathematik, dass es da um das Auswendig-Lernen von Formeln geht, die man nicht versteht und nicht verstehen braucht, in die man nur Werte einsetzen muss, um irgend etwas auszurechnen. Formeln sind vielmehr die sparsame Zusammenfassung eines Gedanken oder eines ganzen Gebiets; sie stellen geronnene Ideen dar, und der vornehmste Umgang mit ihnen ist neben der funktionalen Analyse, sie selbst zu erzeugen bzw. sie komplett zu durchschauen. Und da ist der GMV gefragt (wie auch schon bei der Division durch einen Bruch).

Fakultäten sind auf das Engste mit Permutationen verbunden: Man hat $n!$ Möglichkeiten, n Objekte in einer Reihe anzuordnen. — Wo immer **ich** Fakultäten sehe, frage ich nach den zu Grunde liegenden Permutation; so auch hier:

Ich ordne alle n Elemente der Menge in einer Reihe an und habe dafür $n!$ Möglichkeiten. Bei jeder dieser Möglichkeiten fasse ich die Elemente auf den ersten k Plätzen zu einer Teil-Menge zusammen und erhalte so sämtliche k-elementige Teil-Mengen. Allerdings habe ich dabei jede solche Teil-Menge mehrfach gezählt, und zwar habe ich sie für jede der Permutationen ihrer k Elemente gezählt und für jede der Permutationen der n-k Elemente in der Komplementär-Menge gezählt. Jede der so entstehenden k-elementigen Teil-Mengen ist beim Zählen aller $n!$ Permutationen insgesamt $k!\cdot(n\text{-}k)!$-mal gezählt worden. Also gibt es gemäß der Quotienten-Regel $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ Teil-Mengen vom Umfang k einer Menge vom Umfang n. — Wenn da jetzt sämtliche Permutationen der ersten und der letzten Elemente weg-"dividiert" wurden, ist dann überhaupt noch etwas übrig? — Selbstverständlich: genau die Permutationen, wo Elemente von vorne nach hinten und entsprechend welche von hinten nach vorne gelangen. Und das sind dann auch genau diejenigen, wo neue k-elementige Teil-Mengen entstehen und wo dann wirklich gezählt werden muss.



Es versteht sich von selbst, dass in einer echten Lehr-Lern-Situation die Angelegenheit nicht so lapidar wie eben gerade abgehandelt werden kann.

8. Ist $0,\overline{9} < 1$ oder $0,\overline{9} = 1$?

Wenn diese Frage im 7. Schuljahr auftaucht, kann sie aus Sicht des GMV nicht zufriedenstellend beantwortet werden. Dies liegt nicht an der fehlenden intellektuellen Reife der Lernenden, sondern daran, dass zunächst adäquate Grund-Vorstellungen und Grund-Verständnisse von Folgen und Grenzwerten ausgebildet werden müssen, und zwar nicht gerade an einem solchen von vielen vagen Vorstellungen überlagerten Beispiel, sondern mit einer gewissen Kontext-Freiheit.

Früher fand dies im 11. Schj. statt. Im neuen Lehrplan 'Mathematik' von Nordrhein-Westfalen von 1999 wird ein "anschaulich geprägter und nicht formaler Grenzwert-Begriff" für ausreichend, "eine Theorie der Folgen" für nicht angemessen erklärt und eine genauere Behandlung dem Leistungskurs anheim gestellt (16). Für mich wird damit dem GMV im Analysis-Unterricht der Boden unter den Füßen weg gezogen. Wirklich verstehen lässt sich Analysis nur auf der Basis von infinitesimalem Denken, d.h. in unendlichen reellen konvergenten Folgen als einer Facette des topologischen Umgebungs-Begriffs.

9. Das Dreitüren-Problem

"Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet ein Preis: ein Auto. Hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir: Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten "Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Nun fragt der Moderator: Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei?"

Das Problem entstammt der amerikanischen Fernseh-Show "Let's make a Deal" und führte 1990 in Amerika und kurz danach auch bei uns zu einer heftigen Diskussion zwischen zwei Lagern. Die **Einen** (die ich die "Gleichgültigen" nennen möchte) sagen: Nachdem der Moderator eine Ziegen-Tür aussortiert hat, stehen die Chancen 1:1, dass sich hinter der gewählten Tür das Auto befindet; es ist egal, ob ich bei meiner Wahl bleibe oder zu der anderen noch geschlossenen Tür wechsle. Die **Anderen** (die "Wechsler") halten dagegen, dass **nur bei einer der** anfangs möglichen **drei Wahlen**, nämlich wenn man **gleich die richtige** Tür gewählt hat, **Bleiben** günstiger ist, während **bei den beiden anderen Wahlen Wechseln** günstiger ist; die Gewinn-Chancen beim Wechseln gegenüber denen beim Bleiben sich also wie 2:1 verhalten und man deswegen wechseln soll.

Vor kurzem hat nun ein Mathematiker-Kollege (Steinbach 2000) in etwas besserwisserischer Weise den "Streit endgültig beigelegt", wie er schreibt, und beiden Parteien Recht gegeben. Wenn ich jetzt gemäß dem alten jüdischen Witzchen einwenden würde, dass doch nicht Beide Recht haben können, würde er vielleicht zur Antwort geben: "Und **Sie** haben auch Recht." — Jetzt war ich unfair; denn er hat Beiden nur zum Teil Recht gegeben; und auf der Grundlage seiner Ausführungen hat **er Recht** und **ich** mit meinem Einwand **nicht**.

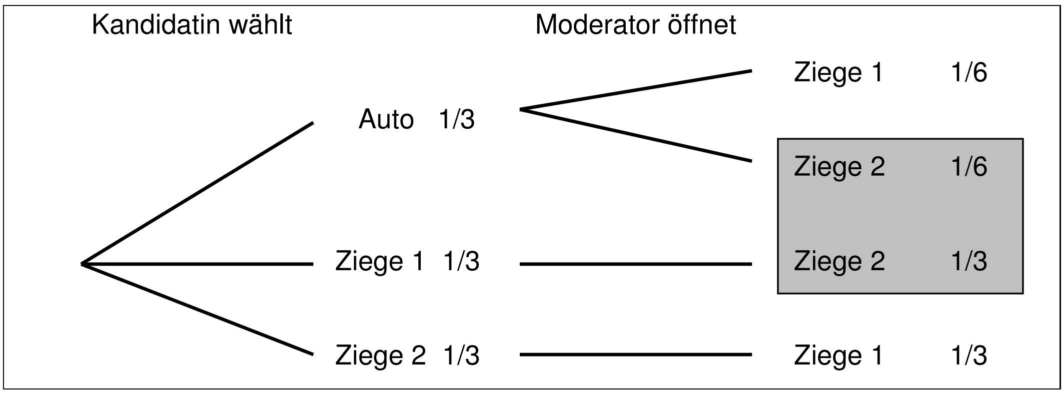
Er kritisiert nämlich **mit Recht**, dass die Situation nicht in der Vollständigkeit beschrieben sei, wie sie für eine Parteinahme durch einen Mathematiker erforderlich sei. Er vermisst insbesondere eine Aussage darüber, ob die Kandidatin davon ausgehen kann, dass der Moderator wirklich nach folgender Regel vorgeht: Hat sie die Auto-Tür gewählt, öffnet er zufällig eine der beiden anderen Türen; hat sie eine der beiden Ziegen-Türen gewählt, öffnet er unvermeidlich die andere Ziegen-Tür.

Die Wechsler haben jedenfalls den Text **so** interpretiert, und, wie ich die Diskussion verfolgt habe, haben die Gleichgültigen ihn auch so interpretiert. Und wenn man beim ganzen Arrangement bis zur entscheidenden Frage des Moderators Zufalls-Walten unterstellt, hat eine der Parteien Recht, ohne dass noch eine Zusatz-Interpretation erforderlich wäre, nämlich die Wechsler-Partei, was ich gleich noch demonstrieren werde.

Die Forderung des Mathematiker-Kollegen nach einer ausführlicheren Situations-Beschreibung ist im Grundsatz kontra-produktiv. Es ist hier einfach etwas GMV erforderlich, der ja, wie ich am Anfang gesagt habe, auch eine wesentliche sozial-kommunikative Komponente hat, um zu verstehen, wie das Gegenüber einen Text interpretiert. Ich habe, wie gesagt, den Eindruck gehabt, dass hier, abgesehen vielleicht von mathematisch interessierten Ausnahmen, die ich spitzfindig nennen möchte, in der Diskussion eine gemeinsam geteilte Interpretation vorlag, und dass die Gleichgültigen, wohl auf Grund ihrer vordergründigen Intuition, einem Denk-Fehler aufsaßen. — Die **ausführlichere** Gestaltung eines solchen Textes birgt nämlich grundsätzlich **zwei Gefahren**: Mit **zunehmender** Ausführlichkeit wird die Pointe und ihre Aufklärung **zunehmend** explizit gemacht, und der Reiz geht verloren. Oder: der Text wird so aufwändig, dass er unübersichtlich und damit ungenießbar wird.

Mit dem GMV haben die Wechsler ihren Standpunkt bereits begründet: **nur bei einer der** anfangs möglichen **drei Wahlen**, nämlich wenn man **gleich die richtige** Tür gewählt hat, ist **Bleiben** günstiger. — Allerdings hat man dieses Argument doch auch **schon, ehe der Moderator** reagiert hat! Was ist da anders? — Nun, wenn man sofort nach der ersten Wahl wechselt, hat man ja noch zwei Türen zur Auswahl, auf die die Gewinn-Chancen des Wechselns gleichmäßig zu verteilen sind, so dass sie bei beiden genau so groß sind wie bei der ursprünglich gewählten Tür. Wechseln bringt also so viel und so wenig wie Bleiben (was sowieso offensichtlich war). Wenn aber durch den Moderator eine der Türen, zu der man wechseln kann, **ausgeschlossen** worden ist, dann ist die **Gewinn-Chance** durch das Wechseln auf die **andere Tür konzentriert**, und nun **lohnt** sich das Wechseln.

Allerdings haben die Gleichgültigen ihre Auffassung scheinbar auch plausibel gemacht. Da könnte man sich doch zur Unterstützung des GMV einfach einmal gewisser Standard-Hilfsmittel wie des Baum-Diagramms bedienen:



Für die Ziege 2 (entsprechend für die Ziege 1) ist, auf das Ganze gesehen, die W'keit 1/2 , dass ihre Tür vom Moderator geöffnet wird, und davon stammt 1/3 aus dem Ereignis, dass die Kandidatin die Auto-Tür gewählt hatte, und 2/3 aus dem Ereignis, dass sie zuerst eine Ziegen-Tür (nämlich die der Ziege 1) gewählt hatte.

Dieses wollten in der Diskussion, und zwar, wohlgemerkt unter der selben Interpretation wie die Wechsler, die Gleichgültigen nicht wahr haben, nämlich dass die anfängliche Chancen-Gleichheit der Türen durch die Information über eine Tür in eine Chancen-Ungleichheit der beiden anderen Türen verwandelt wird. Die Heuristik stellt viele Strategien (Heurismen) bereit, eine solche Paradoxie plausibel zu machen. Hier könnte man z.B. die Zahl der Türen mit Ziegen erhöhen.

Eine Computer-Simulation könnte zwar das Lager der Wechsler stärken. Aber logisch gesehen stellt sie nur eine Umsetzung des gezeigten Baum-Diagramms in ein Computer-Programm dar. Wenn man dieses Diagramm in das Programm hinein steckt, dann müssen auch die entsprechenden Ergebnisse herauskommen, es sei denn, der Zufalls-Generator des Programms ist schlecht. Die folgende Simulation mit 1000 Durchgängen habe ich mit einem in Büros verbreiteten, sehr leistungsfähigen und für die Schule bestens geeigneten Tabellenkalkulations-Programm (nämlich Excel) durchgeführt. Man beachte, dass da z.B. auch 1 Million Durchgänge in kurzer Zeit möglich sind. Dabei ist unterstellt, dass das Auto hinter Tür 3 steht, und die offenen Entscheidungen sind mit dem Zufalls-Generator von Excel gefällt worden. Dabei habe ich in drei Spalten drei Strategien unterstellt: Wechseln, Bleiben und zufällig Entscheiden, ob Wechseln oder Bleiben, mit relativen Gewinn-Häufigkeiten von etwa 2/3 , etwa 1/3 und etwa 1/2 als Ergebnis.

Nr.	**Tür-Wahl** Kandidatin	Moderator	**Wechsel** zu Tür	Anzahl Gewinne	Anteil Gewinne	**Bleiben** bei Tür	Anzahl Gewinne	Anteil Gewinne	**Egal** Tür	Anzahl Gewinne	Anteil Gewinne	Tür1 Zie1	Tür2 Zie2	Tür3 Auto
0														
1	1	2	3	1	1,0000	1	0	0,0000	3	1	1,0000	1	0	0
2	2	1	3	2	1,0000	2	0	0,0000	2	1	0,5000	1	1	0
3	1	2	3	3	1,0000	1	0	0,0000	1	1	0,3333	2	1	0
...														
991	2	1	3	683	0,6892	2	308	0,3108	3	502	0,5066	339	344	308
992	1	2	3	684	0,6895	1	308	0,3105	3	503	0,5071	340	344	308
993	2	1	3	685	0,6898	2	308	0,3102	3	504	0,5076	340	345	308
994	3	2	1	685	0,6891	3	309	0,3109	3	505	0,5080	340	345	309
995	1	2	3	686	0,6894	1	309	0,3106	3	506	0,5085	341	345	309
996	1	2	3	687	0,6898	1	309	0,3102	3	507	0,5090	342	345	309
997	3	1	2	687	0,6891	3	310	0,3109	3	508	0,5095	342	345	310
998	3	2	1	687	0,6884	3	311	0,3116	3	509	0,5100	342	345	311
999	2	1	3	688	0,6887	2	311	0,3113	2	509	0,5095	342	346	311
1000	1	2	3	689	0,6890	1	311	0,3110	3	510	0,5100	343	346	311

Insofern ist die Computer-Simulation keine Überprüfung des Ansatzes, sondern des eingebauten Zufalls-Generators. Der Zwang zum Programmieren könnte aber zu einer gewissen Klärung der Situation führen. Da fällt es nämlich schon schwer, den Gang der Handlung so zu programmieren, dass etwas Anderes als die Wechsel-Strategie herauskommt; — wohlgemerkt: unter den gemachten Annahmen, deren unterschwellige Akzeptanz durch die Diskussions-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer allerdings vom besserwisserischen Kollegen nicht erkannt und deswegen bestritten wurde.

Da fällt mir der Witz von den Ballon-Fahrern ein, die sich im Nebel verirren. Sie landen in unbekanntem Gelände und sind gerade dabei sich zu orientieren, als ein Wanderer vorbei kommt: "Sie haben bestimmt ein Problem. Kann ich Ihnen helfen?" — "Guter Mann, wo sind wir hier?" Dieser, ein Mathematiker, überlegt lange und antwortet schließlich: "Im Korb eines Ballons." — So ist die Universitäts-Mathematik: Sie braucht manchmal lange für ihre Ergebnisse; diese stimmen dann allerdings 100-%ig — und sind in ihrer absoluten Korrektheit oft nicht direkt brauchbar. — Dafür lieben wir sie.

10. Infinitesimales Denken

Die Ungleichung $0,\overline{9}<1$ lässt mir doch keine Ruhe, zumal der Glaube an sie auch unter Mathematik-Studierenden verbreitet ist, die schon vier Semester Analysis hinter sich haben und eigentlich infinitesimal denken können. Wollen wir sie einmal von deren Warte aus analysieren: $0,\overline{9}$ ist ja eine Abkürzung für die Schreibweise 0,999... , und diese wird so verstanden: "Wenn ich diese Schreibfigur durchlaufe, dann fehlt immer noch ein bisschen zur 1 ." — "An welcher Stelle hörst du denn auf, damit du dann die Differenz zur 1 konstatieren kannst?" — "Selbstverständlich höre ich an keiner (dann ja: endlichen) Stelle auf; das geht immer so weiter." — "Ja, wo fehlt denn dann der kleine Rest zur 1 , und wie groß ist er?" — "Na ja, so richtig fest machen kann ich ihn nicht; er wird halt immer kleiner, im Prinzip irgendwo ganz hinten unendlich klein." — "Ist er dann 0 , oder ist er >0 ?"

Spätestens hier muss dann ein unklarer Bereich im mathematischen Weltbild eingestanden werden. Selbstverständlich sind die hyperreellen Zahlen als Ausweg nicht zugelassen. Zum einen sind sie nicht bekannt; zum anderen müsste auch bei ihrer

Bekanntheit die Angelegenheit sich innerhalb der reellen Zahlen erledigen lassen. Es wird i.a. nicht zugegeben; aber oft stecken verschwommene Fehl-Vorstellungen über ein letztes Glied, quasi mit der Nummer ∞, der durchlaufenen Folge dahinter, das man zwar nie erreicht, das aber eben doch vorhanden, von derselben Natur wie die Folgen-Glieder mit **endlichen** Nummern, mit diesen über eine Art Fern-Wirkung verbunden und irgendwie im Prinzip doch erreichbar ist.

Natürlich gibt es allerlei Hilfs-Konstruktionen, mit denen man die Überzeugung $0,\overline{9}=1$ erzwingen möchte, meistens irgendwelche Rechnungen, die funktionieren müssen, aber nur dann funktionieren können, wenn die Gleichheit akzeptiert wird, z.B. $9\cdot 0,\overline{9} = 10\cdot 0,\overline{9} - 1\cdot 0,\overline{9} = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9$. Aber selbst wer diese Schlüsse akzeptiert, wird darauf beharren: "Und es fehlt immer noch ein Rest. Wo der in der Gleichung abgeblieben ist, kann ich allerdings nicht sagen."

Der Fehler liegt letztlich in Folgendem: Die Schreibweise 0,999... wird gar nicht als Zahl aufgefasst, sondern als eine Art Kurzform für die Folge (0,9; 0,99; 0,999; ...) , die man durchlaufen kann und wo bei jedem der unendlich vielen (!) Glieder (allerdings jedes mit einer endlichen Nummer!) noch etwas bis zur 1 fehlt. Bei der arithmetischen Verwendung, noch verstärkt durch die Kurzform $0,\overline{9}$, ist dieser Ausdruck aber als eine wohlbestimmte Zahl zu sehen, und diese ist dann lim(0,9; 0,99; 0,999; ...) = 1 , womit jedenfalls die Studierenden keine Probleme haben. Auch 0,999... ist letztlich **so** zu verstehen, dass da sämtliche unendlich vielen Neunen hingeschrieben sind. Das darf man sich gerade nicht als ein Schreiben nacheinander von vorne bis hinten vorstellen, weil man da ja immer nur endlich weit kommt, oder aber wieder der Fehl-Vorstellung aufsitzt, man könnte beim Durchlaufen einer Folge ein letztes Glied erreichen. Vielmehr muss man sich die unendlich vielen Neunen mit einem unendlich langen Stempel auf einen Schlag hingedruckt vorstellen. Diese Zahl kommt in der Folge nicht vor; sie ist von anderer Natur als alle Folgen-Glieder. Während diese alle <1 sind, ist jene $=1$.

Über diese wesensmäßige Verschiedenartigkeit von Folgen-Gliedern und Grenzwerten setzen sich Lernende und Lehrende (die dadurch mit verantwortlich werden), provoziert auch durch Schreibweisen wie $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{df}{dx}$ oder $\sum_{k=1}^{n} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, immer wieder hinweg mit Redeweisen wie: "bei der Ermittlung der Ableitung werden die Differenzen-Quotienten im Grenz-Übergang zu Differential-Quotienten"; oder: "beim Riemannschen Integral-Begriff nähert man die Fläche unter dem Graph durch die Aufsummierung von immer mehr, immer schmaleren Rechtecken an, bis man sie schließlich als Summe von unendlich vielen Rechtecken der Breite 0 erhält". Während die Wendung "im Grenz-Übergang" bei einem bestimmten Verständnis von diesem, nämlich als Abbildung aus der Menge der konvergenten Folgen in die reellen Zahlen gerade noch akzeptabel ist, ist die Rede von "schließlich" definitiv falsch; — die Wendung "im Grenz-Übergang" übrigens auch, wenn sie wie "schließlich" verstanden wird, was meistens der Fall sein dürfte.

Gelöscht: <sp>

Solche Redeweisen und die mit ihnen verbundenen Vorstellungen sind Gift für den GMV. Wie soll man denn den Ausdruck $\frac{0}{0}$ verstehen, oder wie soll aus der (durchaus unendlich häufigen) Aufsummierung von Flächen-Inhalten 0 ein Flächen-Inhalt >0 werden? Man muss hier Zahlen-Folgen in Form von Differenzen-Quotienten oder Produkt-Summen und deren **Grenzwerte** betrachten. Diese sind Zahlen, aber eben keine Differenzen-Quotienten und keine Produkt-Summen. Ein schönes Beispiel ist die Folge der Treppen in folgender Figur: Jede Treppe hat die Gesamt-Länge 2, und die Treppen-Folge konvergiert mit ihrem Abstands-Maximum gegen die Diagonale. Trotzdem hat diese die Länge $\sqrt{2}$ und ist ersichtlich von anderer Natur als jede, ihr noch so nahe liegende Treppe.

Schon vor dem Grenzwert-Begriff brauchen wir eigentlich einen adäquaten Begriff der unendlichen Folge und von Unendlichkeit überhaupt. Mit dem "undsoweiter" und der liegenden Acht machen wir es uns ein bisschen einfach. — Die mittelalterlichen Mönche sind da einer Vorstellung von Ewigkeit schon ein wenig näher gekommen:

Alle hundert Jahre kommt ein Vöglein zum Berg Ararat geflogen, dem höchsten Berg der damals dem Abendland bekannten Welt, und wetzt sein Schnäblein. Wenn der Berg ganz abgewetzt ist, dann ist eine Sekunde der Ewigkeit vergangen. — Wir wissen, dass das Bild erheblich untertrieben ist: im Vergleich zur Ewigkeit ist noch gar nichts vergangen. Aber der GMV braucht endliche Vorstellungen als Krücken für den Unendlichkeits-Begriff, weswegen ja auch die mathematische Grenzwert-Definition mit endlichen Umgebungen und endlichen Nummern arbeitet und genau deswegen dem GMV zugänglich ist.

Die z.Z. größte bekannte Primzahl lautet $2^{13.466.917}-1$. Um sie als Zahl im Dezimal-System mit ihren über 4,05 Mio Stellen zu schreiben, braucht es drei Bände mit je 450 eng beschriebenen DIN-A4-Seiten zu je 3000 Ziffern! Natürlich ist man überfordert, sich diese Zahl vorzustellen; man braucht ja nur einmal in der allerletzten Zeile des dritten Bands die letzten zehn Ziffern als Zahl zu betrachten und ist dann schon im Milliarden-Bereich. Wir wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt: welche, für deren Aufschreiben man eine ganze Bibliothek, alle Atome der Erde, alle Atome des Weltalls, noch viel mehr Atome bräuchte, und danach gibt es immer noch unendlich viele Primzahlen. Die Primzahlen wiederum bilden eine sehr dünne Teil-Menge der Menge aller natürlichen Zahlen; ihr Anteil an diesen wird immer geringer, je weiter man hinausgeht; man kann sich eine beliebig große Zahl vorgeben und kann dann leicht einen Abschnitt der Menge der natürlichen Zahlen entsprechender Länge angeben, in dem sich keine einzige Primzahl befindet.

Hier wird die Lächerlichkeit **deutlich** zu glauben, man könne eine Folge insgesamt durchlaufen. Man kommt, auch mit dem leistungsfähigsten Computer und beliebig langer Zeit immer nur endlich weit, und das, was vor einem liegt, bleibt immer unendlich umfangreich. In der Tat ist eine **dynamische** Sichtweise auf Folgen **nur** angebracht, wenn es um **Anfangs-Stücke und numerische Aussagen** geht. Für den **Grenzwert-Begriff** braucht man eine ausgeprägt **statische Sicht** der Dinge: Der Grenzwert ist ein Häufungs-Wert der Folge als Menge aufgefasst, und bekanntlich spielt es für diese seine Eigenschaft keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Elemente betrachtet werden bzw. ob sie überhaupt in eine Reihenfolge gebracht werden.

Bei diesem Thema wird besonders deutlich, was sich aber durch alle Bereiche zieht: Zur Idee des GMV gehört die Lehrperson, die selbst mit GMV an Menschen und Dinge, darunter die Mathematik, herangeht, die mit dieser Herangehensweise als Vorbild für die Lernenden fungiert und, ganz im Sinne von Franz E. **Weinert** (1996) mit Wissen, Geschick und Geduld diese bei der Ausbildung und Aktivierung des GMV unterstützt, ja, sie dazu zwingt. Dasselbe gilt auch für die zentralen Ideen und die Grund-Vorstellungen und Grund-Verständnisse eines Gebiets. — Als radikaler Konstruktivist stelle ich fest, dass in der sich "konstruktivistisch" nennenden Pädagogik das Potenzial von Lern-Situationen ohne gezielte massive didaktische Aufbereitung erheblich überschätzt wird.

11. Die Universitäts-Mathematik

Unter dieser Überschrift hatte ich einige unspektakuläre Beispiele aus der universitären Lehre für überflüssige **Sinn-Ferne**, unnötige **Allgemeinheit** und übertriebene **Lückenlosigkeit** auf Kosten des GMV vorbereitet. Sinn-Ferne, Allgemeinheit, Lückenlosigkeit sind lauter existentielle Charakteristika der Wissenschaft 'Mathematik', die **auch** erfahren werden müssen, aber eben nicht auf Kosten des GMV. Aus Zeit-Gründen verzichte ich jetzt darauf, diese Beispiele auszuführen.

Literatur

Bender, Peter (2001): Gesunder Menschen-Verstand, Piaget-Versuche und Mathematikunterricht. In: Christoph Selter & Gerd Walther (Hrsg.): Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller. Leipzig u.a.: Klett Grundschulverlag, 26–34

Baruk, Stella (1985 & 1989): L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques. Paris 1985: Editions du Seuil. Dt. 1989: Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Basel u.a.: Birkhäuser

Ministerium für Schule, Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (1999): Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II. Lehrplan Mathematik. Frechen: Ritterbach

Piaget, Jean & Alina Szeminska (1941 & 1975): La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel 1941: Delachaux et Niestlé. Dt. (1965): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart 1975: Klett

Selter, Christoph (1994): Jede Aufgabe hat eine Lösung. Vom rationalen Kern irrationalen Vorgehens. In: Die Grundschule 26, Heft 3, 20–22

Steinbach, Marc C. (2000): Autos, Ziegen und Streithähne. In: Mathematische Semesterberichte 47, 107–117

Weinert, Franz E. (1996): Thesenpapier zum Vortrag "Ansprüche an das Lernen in heutiger Zeit". München: Manuskript