Peter Bender / Paderborn

(Wie) Kann man die Schriftliche Division verstehen?

"Die Schriftliche Division kann man nicht erklären", beantwortet Roland, im Sommer 2002 gerade am Ende seiner Grundschulzeit angelangt, meine entsprechende Frage.

Aufgabe: Versuchen Sie selbst, einem erwachsenen Menschen in allgemeiner Form zu erklären, wie (und wieso) die Schriftliche Division funktioniert.

1. Der neue Lehrplan in Nordrhein-Westfalen — Dilemma der Kommission

Anlass für diese Frage war die zu der Zeit stattfindende Erarbeitung eines neuen Grundschul-Lehrplans in Nordrhein-Westfalen (NW), in deren Zuge die Mathematik-Kommission sich auch Gedanken darüber machte, welche Rolle die Schriftliche Division zukünftig im Pflicht-Kanon spielen sollte. Nach Befragung zahlreicher Expertinnen & Experten rang sie sich schließlich zu folgender Zielsetzung durch:

"*Das Verfahren der schriftlichen Division durch einstellige und wichtige zweistellige Divisoren (z.B. 12, 20, 25, 50) soll verstanden werden*". (1)

Diese hat sie mit dem erläuternden Kommentar versehen, dass "*nicht von allen Schülern Geläufigkeit zu verlangen*" sein soll und "*die Schüler schließlich — etwa bei Leistungsfeststellungen — selbst entscheiden können sollen, ob sie schriftlich oder halbschriftlich / mündlich dividieren*".

Dank der modernen technischen Möglichkeiten hatte die Diskussion halb-öffentlich stattgefunden, nämlich per E-Mail jeweils an alle Teilnehmerinnen & Teilnehmer. Es ist zu hoffen, dass der Initiator Christoph Selter sie in irgend einer Form "offiziell" publiziert. Ich selbst hatte mich für die Beibehaltung des Pflichtcharakters der Schriftlichen Division im 4. Schj. ausgesprochen; (1) hätte, ohne die Einschränkung für den Divisor, auch von mir stammen können. Allerdings meine ich, dass über die Mehrzahl von Arithmetik- und Sachmathematik-Aufgaben im Endstadium der Grundschule, wo den Schülerinnen & Schülern (S&S) in der Tat der Rechenweg überlassen werden kann bzw. *sollte*, hinaus — auch Aufgaben zu behandeln sind, die der Förderung und der Überprüfung der Erreichung von (1) dienen. Dort müsste dann doch die Schriftliche Division selbst zum Thema gemacht und / oder ihre Verwendung vorgeschrieben werden, und dies wiederum setzt eine gewisse Geläufigkeit voraus bzw. fördert sie.

Es dürfte Kindern kaum zu vermitteln sein, dass sie ein mathematisches Verfahren zwar "verstehen", aber nicht wenigstens ein bisschen "geläufig können" sollen, zumal sie und wir alle überzeugt sind, dass "Verstehen" schwieriger als "Geläufigkeit" ist, und viele von uns (Lehrenden) glauben, dass darüber hinaus "Verstehen" den Erwerb von "Geläufigkeit" erleichtert. Mir erscheint es letztlich paradox, dass das Verstehen der Schriftlichen Division ein Lernziel für Alle sein soll, aber Geläufigkeit nicht von Allen verlangt werden soll. Ist nämlich mit "Geläufigkeit" die automatisierte Beherrschung des Algorithmus gemeint, dann soll sie doch hoffentlich von Niemandem verlangt werden. Ist dagegen etwas weniger Automatisiertes gemeint, das man von einem Teil der Kinder doch verlangen möchte, dann ist nicht so recht zu sehen, von welchen Kindern man es nicht verlangt, obwohl man sie wie alle anderen auch zum Verstehen bringen möchte. — Am Rande sei noch festgehalten, dass "Verstehen", wenn es denn greift, nicht von der Art des Divisors abhängen kann.

Das hier deutlich werdende Dilemma der Kommission, auch denjenigen Kolleginnen & Kollegen (K&K) (vermutlich auch in der Kommission selbst) gerecht werden zu wollen, die gegen die Behandlung der Schriftlichen Division in der Grundschule plädieren (oder eventuell gerade umgekehrt: den anderen?), wird sich in der zukünftigen Schulrealität vermutlich von selbst auflösen: Mehr und mehr Lehrerinnen & Lehrer (L&L) werden dieses Thema zum Zwecke der Zeitersparnis einfach beiseite lassen.

2. Die schriftliche Division in der zeitgenössischen Grundschule

Dass das Schriftliche Rechnen erheblich an Bedeutung verloren hat, seitdem Taschenrechner in der Breite verfügbar sind (und so weit "die" Schule sich mit dieser Tatsache abgefunden hat), ist heute die herrschende Meinung in der Mathematikdidaktik (und wurde von Hartmut Spiegel schon in den 1980-er Jahren festgestellt; s. z.B. Spiegel 1988; s.a. Krauthausen 1993, Schipper 1998 u.v.a.). Trotzdem wird es aus guten Gründen i.Allg. noch immer intensiv behandelt, allerdings — jedenfalls auf der "offiziellen" Ebene — nicht mit dem Ziel der automatisierten Beherrschung, sondern

- des Verstehens und dabei des Durchschauens unseres Zahlensystems,
- des Denkens in Algorithmen (auch im Hinblick auf die Computerei!),
- der Einsicht in die Ökonomie des Formalismus,
- der Förderung der Mündigkeit (u.a. Unabhängigkeit von Hilfsmitteln),
- der Vorbereitung auf viele mathematische Inhalte in den weiterführenden Schulen

usw.; ich möchte die Einzelziele jetzt nicht erschöpfend diskutieren, sondern auf Bauer (1998), Gerster (1994), Padberg (1986 & 2002) u.v.a. verweisen.

Allerdings wird nach den verschiedenen Rechenarten differenziert: Während — erneut: zumindest in der mathematikdidaktischen Kommunität — bei den "Vorwärts"-Rechenarten die ausführliche Erarbeitung der in den Richtlinien eigentlich vorgeschriebenen Endform unangefochten ist, werden bei den beiden anderen, 'Subtraktion' und 'Division', Zweifel laut. Es ist wohl kein Zufall, dass die Merkmale 'vorwärts / rückwärts' (im mathematischen Sinn), 'vorgängig / nachgängig' (im epistemologischen, kognitiven und lebensweltbezogenen Sinn) sowie 'leicht / schwer' (im didaktischen Sinn) alle die selbe Einteilung der vier Grundrechenarten beim Schriftlichen Rechnen ergeben.

Auf der Grundlage dieser Fakten sprechen sich nicht wenige K&K (bei dem o.a. E-Mail-Austausch allerdings nur eine Minderheit) gegen eine Behandlung der Schriftlichen Division aus und empfehlen, die so gewonnene Zeit für nützlichere Aktivitäten im

Grundschul-Mathematikunterricht zu verwenden. In der Tat sind die o.a. Ziele bestimmt auch schon zu erreichen, wenn man nur drei oder gar zwei der Schriftlichen Rechenverfahren verbindlich macht und insbesondere auf die Division verzichtet.

Allerdings wird sie ja in der überwiegenden Mehrzahl der deutschen Grundschulen doch behandelt; und trotzdem erhalten die meisten Grundschulkinder nicht die Chance, sie zu "verstehen", sei es, dass sie einer ungeeigneten Unterrichtsmethode (mit zu wenig Gelegenheit für die Verständnis-Bildung) oder einem ungeeigneten didaktischen Hintergrund (z.B. Überbetonung der Algorithmus-Ausführung, Suggerierung von ungünstigen Grundvorstellungen und -verständnissen — GV&V — usw.) ausgesetzt sind. Dieses faktische Vorenthalten der Gelegenheit zum Verstehen führe ich nicht zuletzt darauf zurück, dass viele L&L selbst ein unzureichendes Verständnis der Schriftlichen Division haben und / oder ihnen die Erarbeitung eines Verständnisses bei den S&S zu anstrengend und aufwändig ist; denn: Auch wenn wir in NW in der Arithmetik- bzw. der Arithmetikdidaktik-Vorlesung die Gelegenheit haben, unsere Studierenden ein Stück voranzubringen, so wurde und wird in Deutschland die Mehrzahl der Grundschul-L&L in Mathematik unzulänglich ausgebildet.

3. Irrelevanz einer "radikal konstruktivistischen Pädagogik"

Aus Sicht einer "radikal konstruktivistischen Pädagogik" allerdings spielen solche Unzulänglichkeiten bei den Lehrkräften wegen deren angeblichen Wirkungslosigkeit keine Rolle, mehr noch: ist Verstehen (in meinem Sinn) keine Kategorie. Man wird zwar nicht viele Personen finden, die diese Auffassung in der Einseitigkeit vertreten, zumal sie damit ihre berufliche Existenzberechtigung in Frage stellen müssten; aber hin und wieder wird in unserer mathematikdidaktischen Kommunität schon damit kokettiert.

Auch die Ansätze, Begriffsbildung im Klassenraum ausschließlich als Ergebnis eines mehr oder weniger autonomen Aushandelns unter den Lernenden zu verstehen, greifen m.E. zu kurz. Vielmehr sind zahlreiche weitere Einflüsse auf die Begriffsbildung zu beachten, die sich der (von mir durchaus geschätzten) interpretativen Analyse einzelner Sequenzen durchaus entziehen, und zwar inhaltliche, zeitliche, personelle und institutionelle, und besonders die Lehrperson mit ihren Arrangements und Äußerungen, und zwar sowohl lokal, als auch global. Dass die Begriffsbildung bei Lernenden sich oft anders entwickelt, als von der Lehrperson angestrebt bzw. von einer curricularen Vorlage vorgesehen, muss nicht als Indiz für fehlenden Einfluss der Lehrperson gesehen werden, sondern scheint mir im Gegenteil oft genug Folge eines geradezu massiven Einflusses zu sein, etwa bei unzulänglichem didaktisch-methodischen Arrangement oder (trotz eventuell mathematischer Korrektheit!) ungeeigneter Begrifflichkeit bei der Lehrperson selbst. Aber auch wenn sie mathematisch sattelfest ist, benötigt sie darüber hinaus eine hohe diagnostische Kompetenz, und zwar sowohl individuellen Begriffsbildungsprozessen, als auch Gruppen-Interaktionen gegenüber, — und, mehr noch, die Fähigkeit und Disziplin immer wieder zur adäquaten Intervention.

Besonders der letztgenannte Gesichtspunkt stellt sehr *hohe Anforderungen* an die L&L (nicht erst an ihre Berufsausübung, sondern schon an ihre *Ausbildung in fachlicher, didaktischer und pädagogischer* Hinsicht) und wird auch die Besten immer wieder *überfordern*. Auch wenn "Intervention" im Vergleich zu "Diagnose" ein schlechteres Image hat, so muss man sich im Klaren darüber sein, dass auch Intervention einen reaktiven Charakter hat, also ein Bild von aktiven Lernenden voraussetzt, und dass zwar *Intervention ohne Diagnose nicht möglich, Diagnose ohne Intervention aber sinnlos* ist.

Diese Überlegungen kann man wieder konstruktivistisch wenden: Gerade wenn man einen direkten Einfluss einer sog. Lehrperson auf die mentalen Wirklichkeitskonstruktionen anderer Menschen bestreitet und trotzdem eine Aktivität wie sog. Unterricht veranstaltet, muss man besondere Sorgfalt für Vorbereitung und Durchführung aufbringen, um die zu Unterrichtenden optimal bei ihren Wirklichkeitskonstruktionen zu unterstützen. "Gutem Unterricht merkt man nicht an, ob er auf einer konstruktivistischen oder einer nicht-konstruktivistischen Weltanschauung beruht." (Terhart 1999, sinngemäß).

4. Ganzheitlich-analytisches Denken als Lernziel

Der nun folgende *Vorschlag* ist die inhaltlich-didaktische Grundlage meines Plädoyers für die o.a. Zielsetzung (1). Die Verbindlichkeit der Schriftlichen Division in der Grundschule leite ich aus folgendem unscheinbar wirkenden, selten erwähnten und dennoch sehr wichtigen Lernziel für den Mathematikunterricht ab:

Situationen analytisch durchdringen, ganzheitlich betrachten und strukturieren; dabei einen vollständigen Überblick gewinnen, einen Raum definieren, komplettieren und abgrenzen; Neues in Bekanntes einordnen; einen Gedankengang, eine Theorie vollenden.

Man kann hinterfragen, ob die Verfolgung dieses Lernziels im Mathematikunterricht einen Ertrag außerhalb des Unterrichts mit sich bringt. Ich persönlich bin von der Möglichkeit eines solchen Transfers überzeugt, räume allerdings ein, dass er nicht trivial ist und dass sowohl entsprechende Vorgehensweisen im Unterricht als solche, als auch die Übertragung solcher Denkweisen in andere Erfahrungsbereiche mehr oder weniger bewusst zu machen sind. Außerdem darf man vielleicht nicht den Mathematikunterricht als den alleinigen und monolithischen Ursprung solcher Beziehungen ansehen, sondern muss ihn seinerseits in Bereiche (allerdings nicht kategoriell) zerlegen, in denen gemeinsam mit vielen außerhalb liegenden Erfahrungsbereichen entsprechende Aktivitäten sich gegenseitig fördernde Rollen spielen. Weder logisch-erkenntnistheoretisch, noch empirisch lässt sich die grundsätzliche Möglichkeit der gegenseitigen Befruchtung unterschiedlicher Erfahrungsbereiche verneinen. Die publizierten Beispiele für fehlgeschlagene oder einfach nicht stattgefundene Transfers waren jedenfalls als "Belege" für deren *Unmöglichkeit* durchweg allzu singulär, lokal und temporär.

Eine Erziehung zum ganzheitlich-analytischen Denken im Sinne des o.a. Lernziels sollte dazu führen, dass "die" S&S im 4. oder 5. Schuljahr, nachdem sie die vier Grundrechenarten und bei einigen die schriftliche Form und damit dort einen gewissen Abschluss kennen gelernt haben, nun auch wissen wollen, wie dies bei der Division aussieht. Auch wenn sie noch nicht souverän genug sind, um diesen natürlichen Abschluss als solchen einzufordern, so sollte die Lehrperson ihn dennoch bieten. Es versteht sich, dass man hierfür auf die Strukturen der (Schriftlichen) Multiplikation zurückgreifen muss und dabei diese für sich und in ihrem Zusammenspiel mit der Division sowie letztlich die vier Grundrechenarten gemeinsam besser zu durchschauen sind. — Hier hat man eine getreue Realisierung des alten Wittmannschen *operativen Prinzips*.

5. Die Subtraktion als ein Grundverständnis für die Division

Dieses Prinzip liefert direkt als ein *Grundverständnis für die Division die wiederholte Subtraktion des Divisors* in unmittelbarer Entsprechung zur Rolle der fortgesetzten Addition für die Multiplikation. Der *schriftlichen Form* liegt dann die unter Beachtung der dezimalen Struktur *maximal verkürzte fortgesetzte Subtraktion*, wieder entsprechend zur Addition bei der Multiplikation, zu Grunde.

(Leider haben Teile der mathematikdidaktischen Kommunität Vorbehalte gegen das erkenntnistheoretisch-didaktische Konstrukt der GV&V. Für dieses ist ein zumindest metaphorischer Lebenswelt-Bezug der jeweiligen mathematischen Struktur konstitutiv, und in gewisser Weise stellt es eine didaktisch orientierte Operationalisierung der Rolle von Metaphern bei der Bildung von Begriffen und beim Umgang damit dar.)

5.1 Kopf-, halbschriftliches und schriftliches Rechnen

Besonders durchsichtig ist der Zusammenhang zwischen Division und fortgesetzter Subtraktion beim *halbschriftlichen Rechnen*. Wenn der subtraktive Charakter bei der Division dabei nicht direkt ins Auge springt, so mag das daran liegen, dass die Zerlegung des Dividenden (wie oft bei Subtraktionen) additiv aufgeschrieben und aufgefasst wird. — Beim *Kopfrechnen* dagegen wird das Wesen der Division als Subtraktion am wenigsten deutlich, da ihre explizite Behandlung erst einsetzt, wenn bei der Multiplikation die Ablösung von der Addition und der Übergang zu auswendig gekonnten Zahlensätzen bereits stattgefunden hat. Diese Zahlensätze werden dann als multiplikative Formen zur Bearbeitung von Divisions-Aufgaben verwendet. — Bei der *Schriftlichen Division* liegt das subtraktive Grundverständnis eigentlich auf der Hand. Eine leichte Umformung des Standard-Aufschriebs verdeutlicht direkt die Analogie zum additiven Grundverständnis der (Schriftlichen) Multiplikation:

337 · 218	73466 : 337 = 218
674	674
6 7 4	6 0 6
337	337
7 0 7 7	2 6 9 6
2696	2696
73466	0

Die klassische Überbetonung der Abarbeitung des Algorithmus verleitet zu einer Fokussierung auf dessen Einzelschritte, so dass das Grundverständnis als wiederholte

Subtraktion des Divisors verschüttet wird. Außerdem tradieren ja viele (Grundschul-) L&L volens nolens ihre eigene Schullaufbahn. Dies alles könnte sich dadurch ändern, dass das halbschriftliche Rechnen mehr und mehr an Gewicht gewinnt und die Schriftliche Division darin stärker verankert werden kann.

5.2 Bezug der Schriftlichen zur halbschriftlichen Division

Nicht jeder halbschriftliche Weg eignet sich als Basis für den Übergang zur Schriftlichen Division, z.B. nicht das zweimalige Halbieren bei einer Division durch 4 , aber gerade die Hauptvariante des halbschriftlichen Dividierens, nämlich das wiederholte Abspalten kleinerer, leichter handhabbarer Beträge, sehr wohl. Die Schriftliche Division unterscheidet sich, über ihren Verbindlichkeitscharakter hinaus, davon eigentlich nur dadurch, dass die abzuspaltenden Beträge *nicht nach Einfachheit im Aufbau* auszusuchen sind, sondern von links nach rechts die Zehnerstellen des Dividenden zu durchlaufen sind und jedes Mal das *maximal mögliche Vielfache des Divisors* abzuspalten ist.

Die Suche jeweils nach diesem Maximum wird mittels multiplikativer Zahlensätze geleistet, wobei es sich um echte Multiplikationen und nicht um multiplikativ geschriebene Divisionen handelt: Es ist eben *nicht nur* ein *Faktor* (die entsprechende Ziffer im Quotienten), *sondern auch* das *Produkt* (der abzuspaltende Betrag) gesucht; man errät quasi diesen Faktor lediglich und ermittelt dann das Produkt. Um diese Komplikation kommt man allerdings *beim halbschriftlichen Dividieren ebenfalls* nicht ganz herum: Auch da ist das Kriterium für die abzuspaltenden Beträge nicht nur Einfachheit, sondern diese sollten ohne Rest durch den Divisor der ursprünglichen Aufgabe zu teilen sein, also auch da sucht man Vielfache.

Dass dem halbschriftlichen Rechnen sogar beim Dividieren ein gewisses Flair der Leichtigkeit anhaftet, liegt letztlich daran, dass es in der Grundschule etwa zeitgleich mit dem Verzicht auf Aufgaben mit kompliziert aufgebauten Divisoren verbreitete. *Mit solchen Divisoren würde auch das halbschriftliche Dividieren beliebig komplex.*

5.3 Bezug der Schriftlichen Division zur Schriftlichen Multiplikation

Umgekehrt stellt die Beschränkung auf einfach aufgebaute Divisoren eine weitere Legitimationsminderung für die Schriftliche Division dar — jedenfalls als automatisiertes Verfahren. Besonders wenn man dem Aufschreiben vor allem die Funktion des Bewahrens von Zwischenergebnissen zuweist, braucht man bei einstelligen Divisoren den ganzen Wust der Multiplikations- und Subtraktionsaufgaben nicht hinzuschreiben, sondern es genügt, lediglich einzeilig direkt das Ergebnis zu entwickeln, und zwar angelehnt an die Multiplikation mit einem einstelligen Faktor:

$468 \cdot 8 = 3744$ $\quad\quad$ $3744 : 8 = 468$

Diese zentrale Idee bei Winnings (1998) "Erarbeitung eines für alle gemeinsamen Divisionsalgorithmus" wird auch von Hartmut Spiegel hoch geschätzt, nicht zuletzt unter Berufung auf entsprechende souveräne Äußerungen von S&S. — Für mich ist dies eine bis zur Schriftform hin perfektionierte Realisierung der Analogie zwischen Multiplikation und Division: Bei der Multiplikation wird von den kleinen hin zu den großen Stellen abwechselnd multipliziert (als abgekürzte Addition) und addiert und so das Produkt *aufgebaut*; bei der Division wird von den großen hin zu den kleinen Stellen abwechselnd ebenfalls multipliziert (nun als abgekürzte Subtraktion) und subtrahiert und so der Dividend (das Produkt wieder) *abgebaut*.

Bei Spiegels und Winnings Vorschlag ist das Prinzip der Schriftlichen Division komplett erhalten. Sie ist lediglich beim Aufschrieb nicht mehr zu sehen. Zusätzlich zur quantitativen Ökonomie bei den standardisierten Schriftlichen Rechenverfahren (Endnullen, Hilfsziffern, gewisse Überträge nicht schreiben, in einer bestimmten Richtung rechnen u.ä.) enthält dieser Vorschlag schon *qualitativ*-ökonomische Züge, indem, unter gewissen Voraussetzungen, der Schriftlichen Division das abschreckende formalistische Image genommen wird.

Eine weitere, "höhere" qualitative Spielart der Ökonomie hat sogar *begriffsformenden* Charakter: Die Metamorphose der mehrfachen Addition (Subtraktion) gleicher Summanden zu einer neuen Rechen-Operation, der Multiplikation (Division). Da ist das pragmatische Argument vielleicht nicht ab ovo vorhanden, aber sehr früh und immer wieder tritt es in Erscheinung:

- $5 \cdot a$ als abkürzende Schreibweise für $a+a+a+a+a$,
- Messung einer Rechtecksfläche mit Hilfe von Streifen,
- ökonomisches halbschriftliches Rechnen,
- auch die Mächtigkeit des Kreuzprodukts zweier Mengen geht auf eine wiederholte Addition zurück: Aus 3 Blusen und 4 Hosen kann man 4+4+4 (jede der 3 Blusen mit den 4 Hosen) bzw. 3+3+3+3 (jede der 4 Hosen mit den 3 Blusen) Paare bilden.

Sogar wenn im Laufe der Grundschulzeit dieser enge Bezug zur Addition bei der Multiplikation zurücktritt und *zurücktreten soll*, halte ich es für nützlich, ihn immer wieder zu explizieren. Das Selbe gilt für den Zusammenhang von Division und Subtraktion.

5.4 Quintessenz: Die Schriftliche Division als wiederholte Subtraktion

Die Quintessenz meiner Ausführungen lautet nun:

(i) *"Die Schriftliche Division verstehen" beinhaltet wesentlich "sie als maximal abgekürzte wiederholte Subtraktion des Divisors verstehen".*

(ii) Da liegt zunächst das *Grundverständnis von der Division als wiederholte Subtraktion* des Divisors vor, das in unserem Curriculum nicht allzu intensiv gepflegt wird. Es gehört natürlich dazu, dass so weit zu subtrahieren ist, bis der Rest kleiner als der Divisor, aber noch nicht negativ ist. Sinnvoll wird die wiederholte Subtraktion erst dadurch, dass man feststellt, wie häufig subtrahiert wird. Dies ist die Ergebniszahl, zu der noch die Angabe eines etwaigen Rests gehört.

(iii) Je nach Zahlenmaterial drängt es sich geradezu auf, die wiederholte Subtraktion *abzukürzen*, indem man den Divisor nicht Schritt für Schritt je einmal subtrahiert, sondern jeweils viele Schritte zu Großschritten zusammenfasst, d.h. immer möglichst große Vielfache des Divisors subtrahiert. So lange die Größe dieser Vielfachen ins Belieben der Rechnenden gestellt ist, liegt *halbschriftliches Dividieren* vor.

(iv) Um die *Schriftliche Division* schließlich handelt es sich, wenn die Folge der Großschritte der Folge der Stellen im Dividenden von "groß" nach "klein" entspricht und in jedem dieser Großschritte das Vielfache des Divisors als ein ganz bestimmtes Maximum zu nehmen ist. (Eine verbale Beschreibung dieser Maximum-Bestimmung ohne konkretes Zahlenbeispiel bzw. ohne mathematischen Formalismus ist ungenießbar.)

Wenn ein Grundschulkind die Schriftliche Division in diesem Sinn "verstanden" hat, dann sollte es entlang einer konkreten Divisionsaufgabe die Erläuterungen (i) bis (iv) abgeben können, wobei (i) bis (iii) sich von der konkreten Aufgabe lösen können sollten. Ich weiß, dass hierfür auch Sprachkompetenz, Rechenfertigkeit, Konzentrationsfähigkeit und viele andere "Talente" erforderlich sind, die mit der Schriftlichen Division nicht unmittelbar etwas zu tun haben. Aber diese Einwände gelten im pädagogischen Raum immer, und wir müssen selbstredend bereit sein, aus Handlungen oder sonstigen, auch unvollkommenen sprachlichen, Äußerungen Verstehen zu erschließen, erforderlichenfalls über Rechenfehler hinwegzusehen, fehlende Konzentrationsfähigkeit zu berücksichtigen, usw. Außerdem gibt es nicht nur Verstehen oder Nicht-Verstehen, sondern auch Zustände dazwischen, die sich zudem zeitlich entwickeln, vom Zahlenmaterial und allerlei äußeren Umständen abhängen können, usw. Und schließlich gibt es Kinder, die man mit der ganzen Thematik (so gut wie) nicht erreicht.

Interessant wäre jetzt noch, die beiden GV&V der Division '*Auf–*' *und* '*Verteilen*' in die Analyse einzubeziehen und außerdem insgesamt eine Methodik zu entwerfen: Wenn es "nur" auf den Erwerb von Verständnis ankommt, könnten die Multiplikationen z.B. mit dem Taschenrechner ausgeführt werden (!), usw. — Aus Platzgründen kann ich dies hier nicht leisten (s. Bender 1994 & 1995; s.a. Selter & Spiegel 1997, 74f).

Aufgabe: Verdeutlichen Sie sich selbst noch einmal die beiden GV&V 'Auf–' und 'Verteilen', und konkretisieren Sie mit diesen die o.a. Verstehens-Konstituenten (i) bis (iv).

6. Kurzbericht über die Interviews mit vier Grundschul-Absolventen

Die vier Jungen entstammen alle derselben Grundschulklasse mit einem hohen Leistungsstand, in der das Zahlenbuch benutzt wurde. Dort verteilten sie sich über das obere Drittel; zum Zeitpunkt der (Einzel-) Interviews besuchen sie seit einigen Wochen das 5. Schuljahr im Gymnasium bzw. in der Realschule. Sie beherrschen den Algorithmus der schriftlichen Division auch mit einem Divisor wie 337 (bei einem der Jungen war das Gespräch allerdings etwas mühsamer, und ich kam nicht dazu, ihm diese Aufgabe vorzulegen). Ausgehend von einer Aufgabe zum halbschriftlichen Dividieren habe ich die Frage aufgeworfen, nach welchen Kriterien sie die zu dividierenden Teile abspalten, und nach einleuchtenden Antworten auf die Möglichkeit hingelenkt, den Divisor sehr oft einzeln abzuziehen. Verständlicherweise standen die Jungen diesem Vorgehen zurückhaltend gegenüber. Aber mit starken Impulsen durch mich kamen sie dazu,

– das sehr häufige Abziehen des Divisors 12 bzw. 337 zu durchdenken, sowohl in einer konkreten Aufteil-Situation, als auch beim arithmetischen Aufschrieb,
– die Anzahl der Subtraktionen als das Ergebnis zu erkennen,
– die einzelnen Subtraktionen zu Großschritten zusammenzufassen und
– die Entsprechungen zu halbschriftlichen Vorgehensweisen sowie zum schriftlichen Normalverfahren zu sehen.

Das gelang, auch bei den drei stärkeren Schülern, in jeweils 45 Minuten nur im Ansatz, d.h. im gelenkten Gespräch, aber nicht bis zur selbstständigen schriftlichen oder mündlichen Dokumentation eines kompletten, langfristig stabilen Durchschauens. Da wäre, zumal bei durchschnittlichen S&S, einiges mehr an Unterricht erforderlich. Da müsste die vollkommene Parallelität zur Multiplikation auf allen Ebenen herausgearbeitet werden; das Vorgehen müsste sowohl im Auf-, als auch im Verteil-Grundverständnis durchgespielt und nicht nur beim schriftlichen, sondern auch beim halbschriftlichen Rechnen angewandt werden. Es ist klar, dass die Einsichten in der beschriebenen elaborierten Form eher an den Schluss der Grundschule gehören und auch im 5. Schuljahr mit seinem globalen Ziel der weiteren Strukturierung von **N** einerseits und der Kompensation andererseits gut aufgehoben wären. Es spricht aber ebenso nichts dagegen, den Gedanken der fortgesetzten Subtraktion schon im 3. und 4. Schuljahr zum Tragen kommen zu lassen.

Literatur

Bauer, Ludwig (1998): Schriftliches Rechnen nach Normalverfahren — wertloses Auslaufmodell oder überdauernde Relevanz? In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 19, 179–200

Bender, Peter (1994 & 1995): Einige didaktische Probleme bei der (halb-) schriftlichen Subtraktion und Division. In: *Mathematische Unterrichtspraxis* 15 (2), 7–23 & 16 (4), Seite 0

Gerster, Hans-Dieter (1994): Arithmetik im 3. und 4. Schuljahr. In: Albrecht Abele & Herbert Kalmbach (Hrsg.) (1994): *Handbuch zur Grundschulmathematik. Band 2: Drittes und Viertes Schuljahr*. Stuttgart: Klett, 33–81

Krauthausen, Günter (1993): Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 14, 189–219

Padberg, Friedhelm (1986 & 2002): *Didaktik der Arithmetik*. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag 1986. 2. Aufl. Heidelberg u.a.: Spektrum 2002

Schipper, Wilhelm (1998): Schriftliches Rechnen — ein Fossil mit Zukunft. In: *Die Grundschulzeitschrift* 119, 10–16

Selter, Christoph & Hartmut Spiegel (1997): *Wie Kinder rechnen*. Stuttgart: Klett

Spiegel, Hartmut (1988): Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule. In: Peter Bender (Hrsg.) (1988): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen, 177–189

Terhart, Ewald (1999): Konstruktivismus und Unterricht. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 45, 629–647

Winning, Anita (1998): "Durch-Aufgaben" kurz schreiben. In: *Die Grundschulzeitschrift* 119, 44–46