Arithmetik als Prozess

Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring
und Erich Ch. Wittmann (Hg.)

mit Beiträgen von Peter Bender, Peter Damerow, Lisa Hefendehl-Hebeker, Petra Scherer, Siegbert Schmidt, Berthold Schuppar, Christoph Selter, Hartmut Spiegel, Anna Susanne Steinweg, Gerd Walther, Heinrich Winter und Jochen Ziegenbalg

Inhalt

3.7 Theoretische Vertiefung von Modellen

Peter Bender

Wenn wir mathematische Theorien nach ihrem Nutzen beurteilen, können wir sie in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten Gruppe gehören diejenigen, die einen unmittelbaren Nutzen entweder für das praktische Leben oder für einen Beruf abwerfen. Ihr Wert wird als umso größer eingeschätzt, je größer ihr Nutzen ist. Zur anderen Gruppe gehören diejenigen Theorien, die zwar keinen direkten Nutzen haben, nichtsdestoweniger aber wertvoll sind, weil sie unser Repertoire an Werkzeugen und Fertigkeiten erweitern und die Reichweite unserer Analysen vergrößern. Da viele Untersuchungen, von denen großer Nutzen erwartet werden kann, nicht vorankommen, weil die verfügbaren Werkzeuge unvollkommen sind, sollte man gerade Theorien der zweiten Gruppe einen besonderen Wert beimessen.

LEONHARD EULER (1707–1783)

Die mathematische Bearbeitung realer Situationen endet nicht damit, dass Modelle aufgestellt und zu Folgerungen für die vorliegende Situation herangezogen werden. Es ist typisch für die Mathematik und verleiht ihr ihre besondere Schlagkraft, dass die auftretenden Strukturen losgelöst von der jeweiligen Situation noch für sich untersucht, weitergeführt, verallgemeinert und zu systematischen Theorien ausgearbeitet werden. Diese umfassenden Theorien bilden dann die Grundlage zur Modellbildung für große Klassen realer Situationen oder für mögliche Modelle neuartiger Situationen, die zum Zeitpunkt der Theoriebildung noch gar nicht im Blickfeld sind.
Ein typisches Beispiel für eine solche „Theorie auf Vorrat" ist die aus innermathematischen Motiven entwickelte Theorie der sog. Radon-Transformation, auf welche erst viel später die Computertomographie zurückgreifen konnte.
In den folgenden Abschnitten werden in diesem Sinn mathematische Themen, die bei den Modellbildungen der Abschnitte 1.7.1, 1.7.2 und 1.7.3 aufgetreten sind, weiter ausgearbeitet. Damit wird eine Grundlage zur Bearbeitung weitergehender Fragestellungen aus den Problemkreisen „Kalender", „Bewegung von Fahrzeugen", „effektiver Zinssatz" geschaffen.

3.7.1 Der Kalender

In Abschnitt 1.7.1 haben wir bei unserem Streifzug durch die Geschichte des abendländischen Kalenders unser Augenmerk hauptsächlich darauf gerichtet, wie die Kalendermacher zu verschiedenen Zeiten den Überschuss von 0,242 196 759 d des tropischen Jahres über 365 Sonnentage hinaus in Rechnung gestellt haben. Dieses Problem soll im Folgenden in einem größeren mathematischen Zusammenhang betrachtet werden.
Der mathematische Kern der Problematik besteht darin, für diesen Überschuss einen möglichst einfachen Näherungsbruch zu finden. Der Nenner dieses Bruchs gibt jeweils die Periode in Jahren an, nach der sich der Kalender wiederholt, und der Zähler die Anzahl der Schaltjahre in dieser Periode. An den uns bekannten Beispielen wird dies schön deutlich.

Aus: Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (2004). Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer.

Dem Julianischen Kalender liegt der Näherungsbruch $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ zu Grunde, d. h. alle 4 Jahre wird ein Schaltjahr eingeschoben. Drei normale Jahre und ein Schaltjahr sind dann mit guter Näherung genauso lang wie vier tropische Jahre. Der Gregorianische Kalender fußt auf der besseren Näherung $0,2425 = \frac{2425}{10000} = \frac{97}{400}$. Alle 400 Jahre müssen 97 Schaltjahre untergebracht werden, was durch unsere Schaltjahrregel sichergestellt wird: Alle 4 Jahre gibt es ein Schaltjahr, bei den nicht durch 400 teilbaren Jahrhunderten (pro 400 Jahre sind dies 3) fällt das Schaltjahr aus.
Auf den ersten Blick scheint es, als brauche man nur immer mehr Dezimalstellen zu berücksichtigen, um zu immer besseren Lösungen zu kommen. Das ist aber nicht der Fall, wie man sieht, wenn man den Bruch $0,242196759 = \frac{242\,196\,759}{1\,000\,000\,000}$ betrachtet. Dieser Bruch wäre zwar eine optimale Näherung, aber, da er sich nicht kürzen lässt, müssten bei dem entsprechenden Kalender 242 196 759 Schaltjahre auf eine Periode von 1 Milliarde Jahren verteilt werden, was ersichtlich nicht praktikabel ist: Solch große Zahlen sind hier sinnlos (nicht zuletzt weil das Verhältnis zwischen Sonnentag und tropischem Jahr gar nicht konstant ist und sich in 1 Milliarde Jahren sogar massiv ändert).
Für einen guten Kalender müssen zwei Bedingungen aufeinander abgestimmt werden, die unterschiedlicher Art sind: Der Näherungsbruch soll einerseits möglichst genau sein, und er soll andererseits einen möglichst kleinen Nenner haben. Diese Bedingungen kann man nicht gleichzeitig optimal erfüllen. Das einzige, was man erreichen kann, sind gute Kompromisse. Dazu geht man folgendermaßen vor: Man verschafft sich einen Pool von Näherungsbrüchen, bestimmt deren Abweichungen vom „wahren" Wert und fischt unter den guten Näherungen solche mit nicht zu großem Nenner heraus, für die sich dann einfache Schaltjahrregeln finden lassen. Wir wollen im Folgenden zwei Wege betrachten, die zu einem solchen Pool führen.

Von den arithmetischen Theorien, die in den Abschnitten 3.4 und 3.6 entwickelt wurden, eröffnet sich der „klassische Weg" zu Näherungsbrüchen mit kleinen Nennern: Für jeden gemeinen Bruch gewinnt man mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus seine Kettenbruchdarstellung. In Aufgabe **B2** (2) von 1.7 haben Sie Beispiele bearbeitet.

Wir wenden dies auf den Bruch $\frac{242\,196\,759}{1\,000\,000\,000}$ an, der den Überschuss eines Kalenderjahres über 365 Tage hinaus darstellt.

Der zugehörige Euklidische Algorithmus lautet:

$$\begin{array}{rcrrcr}
242\,196\,759 & = & 0 \cdot & 1\,000\,000\,000 & + & 242\,196\,759 \\
1\,000\,000\,000 & = & 4 \cdot & 242\,196\,759 & + & 31\,212\,964 \\
242\,196\,759 & = & 7 \cdot & 31\,212\,964 & + & 23\,706\,011 \\
31\,212\,964 & = & 1 \cdot & 23\,706\,011 & + & 7\,506\,953 \\
23\,706\,011 & = & 3 \cdot & 7\,506\,953 & + & 1\,185\,152 \\
7\,506\,953 & = & 6 \cdot & 1\,185\,152 & + & 396\,041 \\
1\,185\,152 & = & 2 \cdot & 396\,041 & + & 393\,070 \\
396\,041 & = & 1 \cdot & 393\,070 & + & 2\,971 \\
393\,070 & = & 132 \cdot & 2\,971 & + & 898 \\
2\,971 & = & 3 \cdot & 898 & + & 277 \\
898 & = & 3 \cdot & 277 & + & 67 \\
277 & = & 4 \cdot & 67 & + & 9 \\
67 & = & 7 \cdot & 9 & + & 4 \\
9 & = & 2 \cdot & 4 & + & 1 \\
4 & = & 4 \cdot & 1 & + & 0
\end{array}$$

Dann erhalten wir den Kettenbruch $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+c}}}}}}}$.

$$c=\cfrac{1}{132+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$, kurz $\langle 0,4,7,1,3,6,2,1,132,3,3,4,7,2,4\rangle$.

Die Näherungsbrüche lauten

$$0, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{194}{801}, \frac{419}{1730}, \frac{613}{2531}, \frac{81335}{335822}, \frac{244618}{1009997}, \frac{815189}{3365813}, \frac{3505374}{14473249},$$
$$\frac{25352807}{104678556}, \frac{54210988}{223830361} \text{ sowie } \frac{242196759}{1000000000}$$

Der erste (0) entspricht dem altägyptischen und der zweite dem Julianischen Kalender. Die Regel des Gregorianischen Kalenders taucht in der Folge jedoch nicht auf.

Der dritte Näherungsbruch $\frac{7}{29} = 0{,}241379\ldots$ könnte zur Schaltjahrregel „in 29 Jahren

7 Schaltjahre und 22 Gemeinjahre" führen, aber erstens ist die Differenz zum Sonnenjahr doch noch relativ groß (ein Jahr nach dieser Regel wäre nämlich fast 71 sec kürzer als das tropische Jahr, und schon nach gut 1200 Jahren hätte sich die Differenz auf einen Tag aufsummiert), und zweitens bietet sich keine so eingängige Regel an wie die Gregorianische.
Mit der Kettenbruchentwicklung erhält man rasch sehr genaue Näherungswerte. Betrachten wir z. B. den sechsten Näherungsbruch $\frac{194}{801}$: Bei einer Periode von 801 Jahren mit 194 Schaltjahren würde dieser Kalender nach 1000 Jahren lediglich um 43 Sekunden abweichen, und erst nach über 2 Millionen Jahren würden sich diese Abweichungen auf einen ganzen Tag aufsummieren. Die Schaltjahre könnten recht einfach auf diese Periode verteilt werden: Man würde 800 Jahre lang wie beim Gregorianischen Kalender vorgehen, im 801. Jahr ein Gemeinjahr einschieben und mit dem 802. Jahr mit der neuen Periode beginnen. Zum Beispiel könnte das Jahr 2401 als letztes Jahr der Periode aufgefasst werden, und das nächste Schaltjahr würde dann im Jahre 2405 stattfinden usw. Unschön wäre dabei allerdings, dass die Schaltjahre danach nicht mehr Vielfache von 4 und die Sonderfälle nicht mehr Vielfache von 100 wären.
Hier zeigt sich ein Mangel der Beschränkung auf Kettenbrüche: Die Genauigkeit ist zwar sehr gut, aber man erhält meistens keine (im dekadischen System) glatten Zahlen im Nenner, die zu einfachen Regeln für die Verteilung von Schalt- und Gemeinjahren führen würden.
In Abschnitt 1.7 Aufgabe **B4** haben Sie einen zweiten Weg zur Ermittlung eines Pools von Näherungsbrüchen kennen gelernt, der begrifflich viel einfacher ist: Der Grundgedanke ist ganz einfach: Unter allen Brüchen mit einem bestimmten Nenner wird derjenige bestimmt, der dem Überschuss 0,242 196 759 d möglichst nahe kommt. Dazu multipliziert man den Nenner mit dem Überschuss und bestimmt die diesem Produkt am nächsten liegende ganze Zahl (die darüber oder darunter liegen kann). Diese Zahl gibt den Zähler des Bruchs mit dem angesetzten Nenner an, der den Überschuss unter allen Brüchen mit diesem Nenner am besten approximiert. Wie schon bekannt gibt der Nenner die Periode und der Zähler (nach Auf- oder Abrundung) die Anzahl der Schaltjahre an. Um die Güte der Näherung zu bestimmen, berechnet man im so versuchsweise fixierten Kalender noch die mittlere Abweichung von z. B. 1000 Kalenderjahren von 1000 Sonnenjahren.
Diese Rechnung kann z. B. für alle Nenner von 1 bis 1000 durchgeführt werden. Die Näherungsbrüche, die gut approximieren, dekadisch glatte Nenner haben und zu einfachen Schaltjahrregeln führen, kann man dann heraussuchen. Man könnte sich natürlich auch von vorneherein auf dekadisch schöne Nenner beschränken. Tabelle 1 liefert einen Auszug aus der Rechnung, bei dem die Werte schon nach der Genauigkeit der Näherung in eine Rangfolge gebracht worden sind.
Beim Durchmustern der Liste stößt man an 25. Stelle auf eine Periodenlänge von 900 Jahren mit 218 Schaltjahren, für die es eine sehr einfache Verteilungsregel gibt: Jedes vierte Jahr ist ein Schaltjahr, jedes 100-ste Jahr ist kein Schaltjahr, und zwei dieser Hunderter-Jahre sind doch Schaltjahre, z. B. das 200-ste und das 600-ste (in 900 Jahren). Mit dieser Regel beträgt die Abweichung vom Sonnenjahr im Mittel nur 2,2 Sekunden, und diese summiert sich erst in knapp 40 000 Jahren zu einem ganzen Tag auf. Ein Kalender nach dieser Regel ist also etwa 13-mal so genau wie der Gregorianische. In der Tat wird er in ei-

Rang	Periode in Jahren	Produkt von Jahresüberschuss und Periodenlänge	Schalttage pro Periode	Abweichung in Tagen pro 1000 Jahre	Nach so vielen Jahren beträgt die Abweichung 1 Tag
1	801	193,99960396	194	0,00049443	2 022 518
2	929	225,00078911	225	0,00084942	1 177 274
...					
25	900	217,97708310	218	0,02546322	39 272
26	450	108,98854155	109	0,02546322	39 272
...					
197	1000	242,19675900	242	0,19675900	5 082
198	500	121,09837950	121	0,19675900	5 082
...					
243	33	7,99249305	8	0,22748342	4 396
...					
307	800	193,75740720	194	0,30324100	3 298
308	400	96,87870360	97	0,30324100	3 298
...					
705	29	7,02370601	7	0,81744866	1 223
...					
976	4	0,96878704	1	7,80324100	128
...					
998	3	0,72659028	1	91,13657433	11
999	2	0,48439352	0	242,19675900	4
1000	1	0,24219676	0	242,19675900	4

Tabelle 1

nem Kulturkreis verwendet: Als die östlichen orthodoxen Kirchen den Julianischen Kalender im Jahre 1924 endlich aufgaben, verfügten sie offenbar über genauere astronomische Daten als Papst Gregor 350 Jahre zuvor und führten den gerade beschriebenen Kalender mit der Periode von 900 Jahren ein. Ein zusätzliches Motiv dürfte gewesen sein, dass sie sich der päpstlichen Regelung nicht anschließen wollten. Die beiden Hunderter-Jahre unter den Schaltjahren sind die, die bei Division durch 900 den Rest 200 oder 600 lassen, also die Jahre 2000, 2400, 2900, 3300 usw. Knapp 800 Jahre lang wird der orthodoxe Kirchenkalender also noch mit dem Gregorianischen exakt übereinstimmen. Das Jahr 2800 ist allerdings dann im Gregorianischen Kalender ein Schalt- und im orthodoxen Kirchenkalender ein Gemeinjahr, und der erste Tag der Abweichung wird der Gregorianische 29. Februar 2800 sein, der im orthodoxen Kirchenkalender der 01. März 2800 ist.
Genauer als die Gregorianische Periodenlänge von 400 Jahren (Rang 308) wäre auch die Periodenlänge von 500 Jahren (Rang 198). Diese würde eine fast doppelt so genaue Anpassung an das Sonnenjahr liefern, was im Vergleich zum orthodoxen Kalender aber im-

mer noch relativ „schlecht“ ist. Die Verteilungsregel für die Schaltjahre wäre hier auch sehr einfach. Außerdem würde sie noch besser in unser dekadisches Zahlensystem passen.

Aufgaben zur Vertiefung

M11: *Geben Sie für die Periodenlängen „929 Jahre“ (Rang 2), „500 Jahre“ (Rang 198) bzw. „33 Jahre“ (Rang 233) möglichst einfache Regeln zur gleichmäßigen Verteilung der 225, 121 bzw. 8 Schalttage an.*

M12: *Wie werden die Zahlen in den Spalten 3 bis 6 der obigen Tabelle gewonnen?*
Führen Sie für die Nenner 50, 100 und 200 die entsprechenden Rechnungen mit dem Taschenrechner durch.

M13: *Bestimmen Sie mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms für die Nenner 10, 20, 30, ... eine Tabelle der obigen Form.*

3.7.2 Die Beziehung zwischen Geschwindigkeits- und Orts-Zeit-Funktionen

In diesem Abschnitt sollen die Einsichten in Beschleunigungs- und Bremsvorgänge, die im Abschnitt 1.7.2 gewonnen wurden, mathematisch vertieft und ausgebaut werden. Dabei wollen wir uns von konkreten Situationen und den verwendeten Zahlenwerten lösen und die begrifflichen Zusammenhänge mit Variablen darstellen. Wir gehen vor allem der Frage nach, inwieweit es mathematisch gerechtfertigt ist, die Geschwindigkeit bei gleichmäßiger Veränderung tatsächlich global durch die Durchschnittsgeschwindigkeit zu ersetzen. Dabei kommt der Begriff der Momentangeschwindigkeit ins Spiel, der sich erkenntnistheoretisch als nicht-trivial erweist. Die entscheidende Frage, wie man aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion einer Bewegung die Orts-Zeit-Funktion rekonstruieren kann, gehört ins Umfeld des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung, der am Ende unserer Betrachtungen aufschimmern wird. Wir verbleiben zwar im Kontext der Bewegung von Objekten, interpretieren die Zusammenhänge aber hin und wieder auch in klassischer Weise als Steigungen bzw. Flächeninhalte bezüglich Funktionsgraphen. Dies passt sehr gut zu unserem allgemeinen Thema: Bei der Darstellung von Bewegungen durch Funktionsgraphen und der Darstellung physikalischer Größen wie Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg durch geometrische Begriffe handelt es sich um Musterbeispiele von Modellbildung.

dem Kontext gerade nicht auf einen (absoluten) Ort auf der Erde ankommt, sondern auf die (relativen) Zusammenhänge bezogen auf irgendeinen anfänglichen Ort. Die Geschwindigkeit, und nicht der Ort, wird also hier als die primäre Größe aufgefasst, aus der sich nun die anderen bestimmen lassen. Recht einfach gelingt dies für die Dauer t_B des Bremsvorgangs, die gesamte Anhaltedauer $t_A = t_R + t_B$ sowie die Länge des Vorbremswegs s_R. Erheblich aufwändiger und letztlich nur mit infinitesimalen Mitteln zu bewältigen sind dagegen die Ermittlung der kompletten Orts-Zeit-Funktion $s(t)$ und damit der Längen von Bremsweg s_B und Anhalteweg $s_A = s_R + s_B$.
Die Reaktionsdauer t_R hängt in entscheidendem Maß von der Fahrerin bzw. dem Fahrer ab. Man muss mit einem Durchschnittswert von über 1 sec rechnen. Leider überschätzen viele Fahrerinnen und Fahrer ihr Reaktionsvermögen. Für die Verkehrssicherheit wäre es besser, wenn sie es unterschätzen würden. Von der Bremsverzögerung verlangt der TÜV bei Personenkraftwagen, dass sie mindestens $4\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ betragen soll. Zu beachten ist aber, dass die Straßenverhältnisse eine entscheidende Rolle spielen. Ist die Fahrbahn vereist, ein extremer, aber in der Realität nicht seltener Fall, sinkt dieser Wert selbst bei guten Bremsen und Reifen auf etwa $1\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Unser Modell ist auch geeignet, um das Problem des Sicherheitsabstands zu diskutieren. Das Ziel hierbei muss ja sein, die Distanz zum vorausfahrenden Fahrzeug so groß zu belassen, dass man noch zum Halten kommt, wenn dieses voll abgebremst wird.
Wie lang dauert nun der ganze Anhaltevorgang? Der Anhaltezeitpunkt t_A ist dadurch bestimmt, dass $v(t_A) = 0$, also $0 = v_0 - b \cdot (t_A - t_R) = v_0 - b \cdot t_B$, und damit beträgt die

Bremsdauer $$t_B = \frac{v_0}{b}$$

und die Anhaltedauer $$t_A = t_R + \frac{v_0}{b} \qquad (2)$$

Die Bremsdauer ist also proportional zur Anfangsgeschwindigkeit v_0 und umgekehrt proportional zur Bremsverzögerung b. Bei einer Geschwindigkeit $v_0 = 13{,}89\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zum Zeitpunkt $t = t_R$ und einer Bremsverzögerung von $6\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ist $t_B = \frac{13{,}89}{6}\text{sec} = 2{,}3125\,\text{sec}$.

Ganz leicht erhält man noch für jeden Zeitpunkt t innerhalb der Reaktionszeit wegen der dort konstanten Geschwindigkeit die Länge s des bis t zurückgelegten Wegs über die *Grundformel* $s = v \cdot t$ als $s(t) = v_0 \cdot t$ und daraus die Länge des gesamten Vorbremswegs.

Vorbremsweg $$s_R = v_0 \cdot t_R \qquad (3)$$

Die Länge des Bremswegs lässt sich nicht so einfach ermitteln, weil beim Bremsvorgang die Geschwindigkeit nicht konstant ist und man nicht weiß, welchen Wert man für v in der Grundformel einzusetzen hätte. Plausibel ist die Wahl des (arithmetischen) Mittelwerts v_m von Anfangs- und Endgeschwindigkeit $v(t_R) = v_0$ und $v(t_A) = 0$, wie sie in der Tat zur

Halbzeit des Bremsvorgangs besteht, weil „die" größeren Geschwindigkeiten gerade so viel mehr als v_m zum Weg beitragen wie „die" kleineren weniger beitragen.
Denknotwendig ist eine solche ausgleichende Rolle des arithmetischen Mittels allerdings keineswegs. Im Gegenteil, bei nicht-linearen Geschwindigkeits-Zeit-Funktionen spielt das arithmetische Mittel diese Rolle i. a. nicht. In unserem Kontext ist die *konstante Bremsverzögerung*, d. h. die Gleichmäßigkeit der Geschwindigkeitsänderung, d. h. die Linearität der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion die entscheidende Voraussetzung, dass man, wie wir gleich zeigen werden, doch v_m in die Grundformel einsetzen kann.
Dies ist übrigens nicht nur der Fall, wenn die Endgeschwindigkeit 0 ist, sondern man kann im Falle einer linearen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion zur Ermittlung der Länge des bis zu einem Zeitpunkt t_E zurückgelegten Wegs bei jeder Geschwindigkeit $v(t_E)$ das arithmetische Mittel v_m von $v(t_R)$ und $v(t_E)$ verwenden. In unserem Beispiel sind z. B. auch Weglängen bis zu Zeitpunkten t_E zwischen t_R und t_A von Interesse. In Abb. 1 liefert der Graph dann statt des Dreiecks zwischen t_R und t_A ein Trapez zwischen t_R und t_E, mit dem Flächeninhalt $v_m \cdot (t_E - t_R)$.
Bei konsequenter Ersetzung einer sich in der Bremszeit gleichmäßig verändernden Geschwindigkeit $v(t)$ durch ihren Mittelwert v_m erhält man folgende Formel für den Brems- und für den Anhalteweg.

Länge des Bremswegs $$s_B = v_m \cdot t_B = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{v_0}{b} = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \quad \text{bzw.} \quad s_B = \frac{b \cdot t_B}{2} \cdot t_B = \frac{b \cdot t_B^2}{2}$$

Länge des Anhaltewegs $$s_A = s_R + s_B = v_0 \cdot t_R + \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \tag{4}$$

Diese Formeln unterscheiden sich grundsätzlich von der einfachen Formel $s = v \cdot t$ für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. $s = v \cdot t$ drückt eine einfache proportionale Beziehung zwischen Weg und Zeit aus: Wenn die Geschwindigkeit um einen bestimmten Faktor verändert wird, verändert sich auch der zurückgelegte Weg mit dem gleichen Faktor. Bei einer Bewegung mit einer sich gleichmäßig verändernden Geschwindigkeit wächst die Länge s_B des Bremswegs nicht nur über v_m proportional mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, sondern auch noch proportional mit der Bremsdauer t_B. Da diese ihrerseits proportional zu v_0 ist, wächst s_B also insgesamt quadratisch mit v_0.
Dies ist wohl die wichtigste Erkenntnis, die sich aus unserem Modell gewinnen lässt, und sie besagt konkret: Bei doppelt so hoher Anfangsgeschwindigkeit verdoppelt sich die Länge des Bremswegs nicht, sondern sie vervierfacht sich; bei Steigerung der Anfangsgeschwindigkeit um 50 % (d. h. einer Multiplikation mit dem Faktor 1,5) wächst (unter sonst gleichen Bedingungen) der Bremsweg mit dem Faktor $1{,}5^2 = 2{,}25$, d. h. um 125 %. Diese für die Sicherheit entscheidende Erkenntnis ist ohne Modellbildung nicht zu erlangen, was bei der Diskussion um ein angemessenes Niveau von mathematischer Bildung deutlich gemacht werden muss.
Da das Alltagsdenken von der Fixierung auf die Proportionalität belastet ist, stellt das Problem der sog. Restgeschwindigkeiten beim Bremsen eine besondere Crux dar. Da man Geschwindigkeiten nicht direkt wie etwa erreichte Orte bzw. zurückgelegte Wege sehen und subjektiv nur schlecht einschätzen kann, ist hier die Versuchung besonders groß, eine pro-

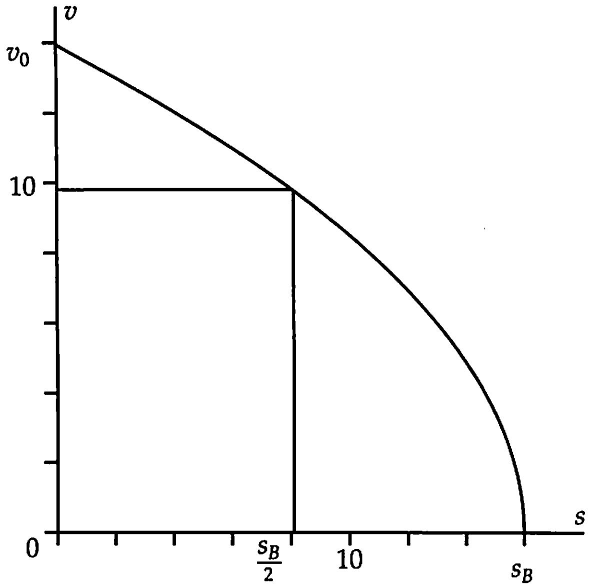

Abb. 2

portionale Beziehung zu unterstellen, d. h. anzunehmen, dass auch die Geschwindigkeit auf die Hälfte gesunken ist, wenn der halbe Bremsweg zurückgelegt ist. Das ist aber keineswegs der Fall, wie wir in unserem Modell sofort nachrechnen können. Da am Beginn des Bremsvorgangs die Geschwindigkeit noch hoch ist, wird ein relativ größerer Teil des Bremsweges zurückgelegt als gegen Ende des Bremsvorganges, wo die Geschwindigkeit klein ist. Der Graph der Geschwindigkeits-Ort-Funktion $v(s) = \sqrt{{v_0}^2 - 2 \cdot b \cdot s}$ während des Bremsvorgangs (Abb. 2) zeigt, wie relativ langsam, bezogen auf den Weg, die Restgeschwindigkeit abgebaut wird (s. Aufgabe **M16**).

3.7.2.2 Von der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion zur Orts-Zeit-Funktion

Wenden wir uns nun der Ermittlung der Weglänge einer Bewegung mit nicht-konstanter Geschwindigkeit zu. Mit der nahe liegenden Interpretation der Weglänge als Flächeninhalt unter dem Graph dieser Funktion (s. Abb. 1) könnte man in unserem Kontext die Weglänge völlig elementar als den Flächeninhalt des Dreiecks von t_R bis t_A durch die Formel „Grundseite t_B mal halbe Höhe v_m" bestimmen und damit (4) verifizieren. Allerdings beruht diese Formel auf Begriffen und Sätzen der Elementargeometrie, deren Übertragbarkeit auf den Bewegungs-Kontext nicht automatisch gegeben ist. Indem man sie einfach auf diesen überträgt, hat man die Hypothese „bei einer Bewegung mit sich gleichmäßig ändernder Geschwindigkeit ist die Weglänge das Produkt aus Zeitdauer und Durchschnittsgeschwindigkeit", die man mit ihr erst begründen will, bereits benutzt.

Zur Vermeidung dieses logischen Zirkels muss man, auch in unserem einfachen Fall eines linearen Graphs, auf infinitesimale Methoden zurückgreifen und kann diese ohne begriffliche Komplizierung gleich auf allgemeinere (stetige) Geschwindigkeits-Zeit-Funktionen anwenden. Dazu unterteilt man die gesamte Zeitspanne des Bewegungsvorgangs in Teilintervalle und betrachtet die Bewegung in jedem Intervall als gleichförmige Bewegung mit einer jeweils konstanten Geschwindigkeit. In jedem Intervall können dann die einfachen Formeln $s = v \cdot t$ und $v = \frac{s}{t}$ angewandt werden, wenn man s und t jeweils als Zuwachs des Weges bzw. der Zeit in diesem Intervall betrachtet. Als Kandidaten für diese konstante Geschwindigkeit kommen hierbei z. B. die Anfangs-, die Endgeschwindigkeit, das arithmetische Mittel von beiden, die Geschwindigkeit, die in der Intervallmitte besteht, usw.

in Frage. Das Produkt aus der Länge des jeweiligen Zeitintervalls und der in diesem Intervall angenommenen Geschwindigkeit ergibt eine Weglänge (= Ortsänderung gemäß der klaren Begrifflichkeit von ARONS, 1990), die die „wahre" Weglänge in diesem Intervall zwar nicht genau, aber immerhin ungefähr darstellt. Am Schluss summiert man noch alle so gefundenen Teilweglängen auf und erhält so einen Näherungswert für den bei der gesamten Bewegung zurückgelegten Weg.

Bei diesem Vorgehen wird die kontinuierliche Bewegung, wie man sagt, „diskretisiert": Man betrachtet eine Folge von Zeitpunkten, an denen man sozusagen Momentaufnahmen macht und zwischen denen man jeweils eine konstante Geschwindigkeit annimmt. Wenn man diese Folge der Momentaufnahmen immer dichter wählt, wird die kontinuierliche Bewegung immer besser approximiert. Die Teilweglängen werden immer kürzer, und ihre Anzahl wird immer größer, aber ihre Summe bleibt in derselben Größenordnung, so dass die „wahre" Weglänge immer besser angenähert wird. Es ist zwar keineswegs trivial, wie man auf der Basis von Ersatz-Überlegungen im „Diskreten" genaue Aussagen über Sachverhalte im „Kontinuierlichen" gewinnen kann, aber die Richtung der Überlegungen wird dadurch klar vorgezeichnet.

Für eine bestimmte Bewegung haben wir diese Diskretisierung einmal exemplarisch durchgeführt (s. Abb. 3, deren unterer Graph die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion und deren oberer Graph die Orts-Zeit-Funktion darstellt): Die gesamte Zeitspanne ist in n Teilintervalle $J_1, J_2, \dots, J_n$ (hier mit $n = 8$ je der Länge 0,1) eingeteilt. Mit den Intervallgrenzen $t_0, t_1, \dots, t_n = t_E$ (an denen die Momentaufnahmen gemacht werden) ist $J_k = [t_{k-1}; t_k]$ für $k = 1, 2, \dots, n$. In jedem Teilintervall J_k ist die „wahre" nicht-konstante Geschwindigkeit $v(t)$ durch eine konstante Geschwindigkeit v_k ersetzt, und zwar ist jeweils die am Anfang bestehende Geschwindigkeit $v(t_{k-1})$ gewählt. Während sich die „wahre" Geschwindigkeit im Verlauf der gesamten Bewegung stetig ändert, ist die diskretisierte Geschwindigkeit nun stückweise konstant und ändert sich i. a. an den Intervallgrenzen t_k sprunghaft. In Abb. 3 wirken die Sprünge sehr groß. Aber man kann sich viel feinere Einteilungen (mit viel größerem n) vorstellen, bei denen die Sprünge kleiner werden und die „wahre" Funktion besser angenähert wird.

Hat die diskretisierte Bewegung bis zum Zeitpunkt t_{k-1} den Ort s_{k-1} erreicht, dann sorgt sie im folgenden Intervall J_k dafür, dass dann der Ort s_k erreicht wird, und zwar ist $s_k = s_{k-1} + v_k \cdot (t_k - t_{k-1})$. Innerhalb des Intervalls kann, wie oben schon angemerkt, die Grundformel $s = v \cdot t$ angewendet werden. Auf diese Weise kann man für jeden Zeitpunkt, an dem man eine Momentaufnahme gemacht hat, bestimmen, an welchem Ort sich das

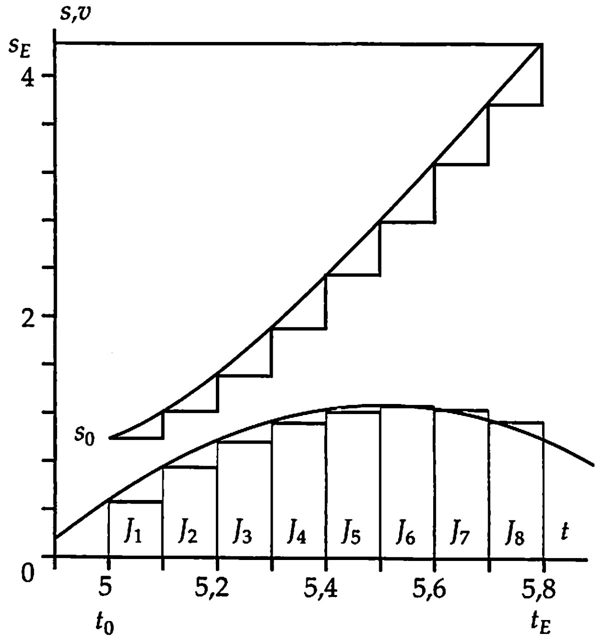

Abb. 3

bewegte Objekt am Ende des Zeitintervalls befinden wird, und man hangelt sich so durch, bis am Ende der Bewegung der Ort s_E erreicht ist.
s_E ist eine Summe von vielen Produkten aus Zeitdauern und Geschwindigkeiten, nämlich $s_E = s_0 + v_1 \cdot (t_1 - t_0) + v_2 \cdot (t_2 - t_1) + \ldots + v_n \cdot (t_n - t_{n-1})$. Der so berechnete Wert wird i. a. vom wahren Wert s_E abweichen, aber es ist zu erwarten, dass er umso weniger abweicht, je feiner die Einteilung in Zeitintervalle gewählt wird.
Wir wollen die Überlegung noch einen Schritt weiter treiben: Diese Ortsbestimmung kann man nicht nur für den Endpunkt des gesamten Intervalls, sondern auch für jeden Zeitpunkt zwischen den Intervallgrenzen vornehmen: Für irgendeinen Zeitpunkt t im Intervall J_k ist $s(t) = s_{k-1} + v_k \cdot (t - t_{k-1})$, d. h. $s(t) = s_0 + v_1 \cdot (t_1 - t_0) + v_2 \cdot (t_2 - t_1) + \ldots + v_k \cdot (t - t_{k-1})$ für $t_{k-1} \leq t \leq t_k$. Innerhalb des Intervalls ist der Ort eine *lineare Funktion* der Zeit, wie es bei konstanter Geschwindigkeit sein muss, und diese Funktion hat am Anfang ($t = t_{k-1}$) den Wert $s = s_{k-1}$ und am Ende ($t = t_k$) den Wert $s = s_k$. Der Orts-Zeit-Graph der diskretisierten Bewegung ist also ein stetiger Streckenzug (s. Abb. 3). Hier kann man sich wieder vorstellen, dass dieser Graph bei immer feinerer Intervalleinteilung immer weniger eckig erscheint und eine glatte Funktion approximiert, die die „wahre" Orts-Zeit-Funktion sein muss.
Diese Überlegungen muss und kann man noch gründlicher und allgemeiner anstellen. Man kann z. B. Intervalleinteilungen mit verschieden langen Teilintervallen einbeziehen und ausschließlich Folgen von Intervalleinteilungen betrachten, deren zugehörige Folgen der maximalen Teilintervalllängen gegen 0 konvergieren. Dann erhält man für die sehr große Klasse der *stetigen* Geschwindigkeits-Zeit-Funktionen $v(t)$ folgendes Ergebnis: Alle so entstehenden Folge von stückweise linearen Orts-Zeit-Funktionen „konvergieren" auf jedem Abschnitt von 0 bis t gegen ein und dieselbe „glatte" (differenzierbare) Orts-Zeit-Funktion. Diese Funktion heißt Integralfunktion $s(t) = \int_{t_0}^{t} v$ der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t)$.
In physikalischer Interpretation gibt die Integralfunktion für jeden Zeitpunkt t die bis dahin bewirkte Ortsänderung (Weglänge) der durch $v(t)$ bestimmten Bewegung seit dem Anfangszeitpunkt t_0 an. Daher ist sie die Orts-Zeit-Funktion der durch $v(t)$ beschriebenen „wahren" Bewegung.
Diese Überlegungen wollen wir nun auf unseren Bremsvorgang mit der linearen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t) = v_0 - b \cdot (t - t_R)$ in einem Intervall $[t_R; t_E]$ der Länge $t_E - t_R$ (mit $t_R \leq t_E \leq t_A$) anwenden. Zur Ermittlung der Orts-Zeit-Funktion als Integralfunktion genügt es, eine einzige zulässige Intervalleinteilungsfolge heranzuziehen, etwa die, bei der für alle $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $[t_R; t_E]$ in n gleichlange Teilintervalle eingeteilt wird. Für ein bestimmtes n mit den Teilintervallen $J_k = [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, und den Intervallgrenzen

$t_k = t_R + k \cdot \frac{t_E - t_R}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, lauten die Geschwindigkeiten zu diesen Zeitpunkten

$v_k = v_0 - b \cdot (t_{k-1} - t_R) = v_0 - b \cdot k_{k-1} \cdot \frac{t_E - t_R}{n}$ und in den Teilintervallen die Ortsänderungen

$$s_k - s_{k-1} = \left(v_0 - b \cdot (k-1) \cdot \frac{t_E - t_R}{n}\right) \cdot \frac{t_E - t_R}{n}.$$

Dann ist also zum Zeitpunkt $t_n = t_E$ insgesamt die Ortsänderung

$$\begin{aligned} s_E - s_R &= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(v_0 - b\cdot(k-1)\cdot\frac{t_E - t_R}{n}\right)\cdot\frac{t_E - t_R}{n}\right) \\ &= n\cdot v_0\cdot\frac{t_E - t_R}{n} - b\cdot\frac{(t_E - t_R)^2}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k = v_0\cdot(t_E - t_R) - b\cdot\frac{(t_E - t_R)^2}{n^2}\cdot\frac{n^2 - n}{2} \\ &= v_0\cdot(t_E - t_R) - \frac{b\cdot(t_E - t_R)^2}{2} + \frac{b\cdot(t_E - t_R)^2}{2\cdot n} \end{aligned}$$

bewirkt. Lässt man nun n die natürlichen Zahlen durchlaufen, so erhält man eine immer feinere Einteilung des Intervalls $[t_R; t_E]$, und die zugehörige Folge der bis zum Zeitpunkt t_E (bei der n-fach diskretisierten Bewegung) bewirkten Ortsänderung

$$v_0\cdot(t_E - t_R) - \frac{b\cdot(t_E - t_R)^2}{2} + \frac{b\cdot(t_E - t_R)^2}{2\cdot n} \text{ konvergiert gegen } v_0\cdot(t_E - t_R) - \frac{b\cdot(t_E - t_R)^2}{2},$$

d. h. gegen die von der „wahren" Bewegung bewirkte Ortsänderung. Dies gilt für jede Zeitspanne $t_E - t_R$ zwischen 0 und $t_A - t_R$. Betrachtet man die Bewegung bis zum Stillstand, d. h. setzt man $t_E = t_A$, und beachtet, dass $t_B = t_A - t_R$ sowie $t_B = \frac{v_0}{b}$ ist, dann erhält man

$s_B = s_A - s_R = v_0 \cdot t_B - \frac{b\cdot t_B^2}{2} = \frac{b\cdot t_B^2}{2}$, und dies ist gerade (4).

Insgesamt erhält man für unseren Anhaltevorgang die

Orts-Zeit-Funktion $$s(t) = s_0 + \begin{cases} v_0\cdot t & \textit{für } 0 \le t \le t_R \\ v_0\cdot t - \frac{b\cdot(t - t_R)^2}{2} & \textit{für } t_R \le t \end{cases} \qquad (5)$$

In Abb. 4 ist als Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 50\frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}89\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, Reaktionsdauer $t_R = 1{,}26$ sec und als (dann sofort voll einsetzende) Bremsverzögerung $b = 6\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ angenommen. Man kann nun für diese Werte für jeden Zeitpunkt t den bis dahin zurückgelegten Weg ermitteln. Der Ort s_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ ist frei wählbar, d. h. zu ein und derselben Geschwindigkeits-Zeit-Funktion gehören verschiedene Orts-Zeit-Funktionen, die sich durch additive Konstanten voneinander unterscheiden. Zwei davon sind eingezeichnet. Man stelle sich zwei Autos vor, wovon sich das eine um $s = 20$ [m] vor dem anderen befindet. Beide beschleunigen, verzögern, bremsen usw. zur gleichen Zeit (also i. a. nicht am gleichen Ort!) und im gleichen Maß. Dann ist zu jedem Zeitpunkt das eine Fahrzeug dem anderen 20 m voraus, und zwar auch nach dem Stillstand.

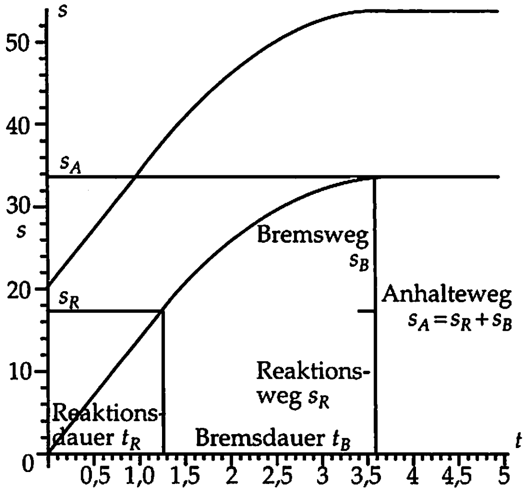

Abb. 4

3.7.2.3 Von der Orts-Zeit-Funktion zur Geschwindigkeits-Zeit-Funktion: Das begriffliche Problem der Momentangeschwindigkeit

Die gerade behandelte Problematik, aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion die Orts-Zeit-Funktion zu konstruieren, wurzelt letztlich darin, dass die Geschwindigkeit eine Ortsänderungsrate ist und sich auf endliche Zeitspannen bezieht, in denen sie als konstant angesehen wird. Bei einer (wie immer als geradlinig angenommenen) Bewegung findet z. B. eine Ortsänderung $s_E - s_0$ vom Ort s_0 bis zum Ort s_E statt (z. B. Länge des Anhaltewegs). Oft interessiert man sich für die dafür benötigte Zeitdauer $t_E - t_0$ vom Zeitpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t_E bzw. für die Ortsänderung in der Zeiteinheit, d. h. für den Quotienten $\frac{s_E - s_0}{t_E - t_0}$ (= Ortsänderungsrate = Geschwindigkeit). Geschwindigkeit ist ein Differenzenquotient, was auch bei der Grundformel $v = \frac{s}{t}$ zum Ausdruck kommt, die nämlich eigentlich $v = \frac{s-0}{t-0}$ lautet. Wenn man für ein Zeitintervall die Ortsänderungsrate kennt, dann weiß man noch nicht, wie die Bewegung in dieser Zeit genau abgelaufen ist; sie kann zeitweise schneller, langsamer, rückwärts, in Ruhe verlaufen sein. Man weiß nur, wie weit das Objekt in der Zeitspanne von t_0 bis t_E gekommen ist. Man kann noch das Zeitintervall in viele kleine Teilintervalle zerlegen und für jedes seine Geschwindigkeit bestimmen. Dadurch kann man den Bewegungsablauf zwar viel genauer beschreiben, aber bezogen auf das jeweilige Teilintervall besteht das begriffliche Problem noch in gleicher Weise.

Dieses Problem ist sehr wohl auch ein ganz praktisches, denn wir machen dauernd vielerlei reale Erfahrungen mit Bewegungen von Fahrzeugen, wo die Zeitspannen mit konstanter Geschwindigkeit rar sind und die Geschwindigkeit sich fast dauernd ändert. Zugleich sind wir überzeugt davon, dass einer Bewegung in jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit zukommt. Da hat man i. a. keine endliche Zeitspanne zur Verfügung, in der sie als Ortsänderungsrate „gültig" wäre, und man kann keinen Quotienten bilden. Messen könnte man sie vielleicht mit dem Luftwiderstand oder (einmalig) mit der Wucht bei einem Aufprall, aber dabei ist erst recht nichts mehr von einer Ortsänderungsrate erkennbar. Dieses begriffliche Problem werden wir ebenfalls mit infinitesimalen Überlegungen angehen.

Aber auch wenn, wie wir ja unterstellen, jedem Zeitpunkt einer Bewegung eine Momentangeschwindigkeit zukommt, erhebt sich die Frage, wie diese Momentangeschwindigkeiten eigentlich eine Bewegung bewirken sollen, wenn sich doch die gesamte Zeitspanne aus lauter einzelnen Momenten der Länge 0 zusammensetzt, in denen nur Ortsänderungen der Länge 0 stattfinden können, deren Aufsummierung immer noch 0 ergeben muss. Diese Paradoxie hat schon ZENON im alten Griechenland klar erkannt (BECKER 1975, S. 75). Eigentlich tritt sie nicht erst bei Bewegungen auf, sondern sie ist geometrischer Natur. Man kann ja analog fragen: Wie kommt es, dass die Strecke auf der reellen Zahlengeraden zwischen den Punkten 0 und 1 die Länge 1 hat, obwohl sie sich aus lauter Punkten der Länge 0 zusammensetzt? – Wir können diese Paradoxie nicht wirklich auflösen, sondern müssen uns mit einer ersten epistemologischen Annäherung zufrieden geben, nämlich dass die Punkte im Verbund mit ihren Nachbarn (in einem vollen reellen Intervall mit einer Länge >0) eine andere Längen-„Qualität" haben als lediglich eine „additive" Zusammenfügung. Auch und gerade hier gilt der Grundsatz: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile". – Entsprechend sind in einem ganzen Zeitintervall sehr wohl Bewegungen (Ortsänderungen) eines Objekts möglich (jedoch in der Tat nicht in einem Zeitpunkt).

Bei einer gleichförmigen Bewegung (wo die Ortsänderung proportional zur Länge des verflossenen Zeitintervall ist) scheint das Problem der Momentangeschwindigkeit nicht zu existieren: Es gibt ja eine Zahl (die Geschwindigkeit) v, so dass für zwei beliebige verschiedene Zeitpunkte t_1 und t_2 mit ihren momentanen Orten $s(t_1)$ und $s(t_2)$ die Ortsänderungsrate

immer $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=v$ lautet.

Im Orts-Zeit-Diagramm (Abb. 5) zeigt sich diese Konstanz daran, dass man (innerhalb des Definitionsbereichs) das Steigungsdreieck an jeder Stelle t_1 ansetzen kann, die waagrechte Kathete beliebig lang bzw. kurz (jedoch $|t_2 - t_1| \neq 0$) und sie positiv oder negativ machen kann ($t_2 > t_1$ oder $t_2 < t_1$), der Quotient aus lotrechter und waagrechter Kathete aber eben immer

$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=v$ ist. Es liegt auf der Hand,

dass man an jedem Zeitpunkt diesen Wert als die Momentangeschwindigkeit nimmt. Aber selbst bei diesem einfachen Sachverhalt bleibt die erkenntnistheoretische Problematik bestehen, was eine Geschwindigkeit bezogen auf eine Zeitspanne der Länge 0 bedeuten soll. Sie bleibt hier allerdings unter der Decke, während sie bei veränderlichen Geschwindigkeiten (nicht-lineare Orts-Zeit-Funktionen) offenbar wird.

Wieder weist die Einteilung in Teilintervalle den Weg zur grundsätzlichen Lösung des Problems. Bei gegebenem Orts-Zeit-Zusammenhang $s = s(t)$ erhält man Begriff und Wert der Momentangeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 auf folgende Weise (Abb. 6):

Man betrachtet Zeitspannen $[t_1; t_2]$ ($t_1 \neq t_2$) und ihre Ortsänderungsraten, und zwar macht man die Zeitspannen immer kürzer, d. h. man lässt gedanklich den Endpunkt t_2 immer näher zum Anfangspunkt t_1

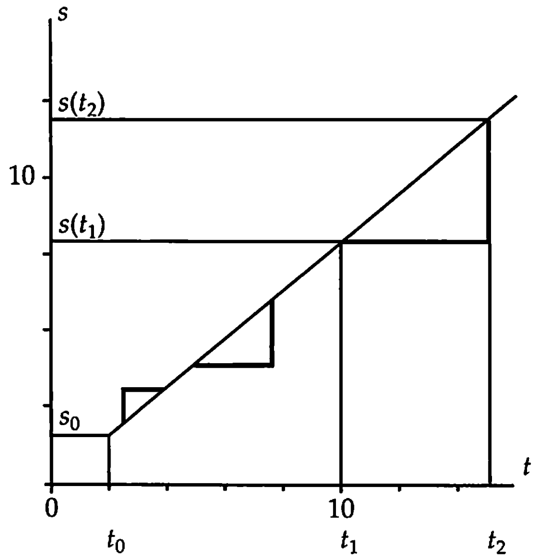

Abb. 5

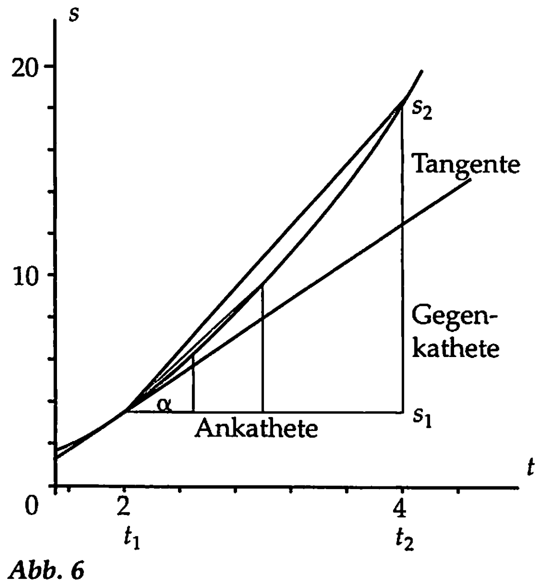

Abb. 6

rücken und erhält dabei Ortsänderungsraten, die offenbar einem bestimmten Wert immer näher kommen. Im Graph wird im Steigungsdreieck die Ankathete immer kürzer gemacht. Dabei wird auch die Gegenkathete (langfristig) kürzer. Von der Hypothenuse interessiert nicht die Länge, sondern nur ihre Steigung (bzw. ihr Steigungswinkel α), so dass man sie sich über ihre Endpunkte hinaus verlängert als Gerade (= Sekante) denken kann. Die Steigung ist $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ (= Ortsänderungsrate), und mit dieser strebt auch α gegen einen bestimmten Wert und die Sekante gegen eine bestimmte Gerade, die Tangente. Schließlich wird die Annäherung des Zeitpunkts t_2 an den Zeitpunkt t_1 und damit der ganze Prozess zum Zwecke der Arithmetisierung noch *diskretisiert*, und man analysiert *Folgen* von (immer kürzeren) Zeitspannen sowie von Ortsänderungsraten und deren Grenzwerten.

Hier handelt es sich um ein Arbeiten im mathematischen Modell, und dieser gedankliche Prozess hat keine Entsprechung in einem realen physikalischen Vorgehen, da dieses prinzipiell *endlich* (beschränkt) ist, und zwar die Anzahl etwaiger Messungen, als auch die Kleinheit der Messwerte betreffend, während die Folgen aus *unendlich* vielen beliebig kleinen Gliedern bestehen. Wohl ist eine Funktion „nur" ein mathematisches Modell, sei es, dass sie eine willkürliche Bewegung wie in Abb. 4, sei es, dass sie eine naturgesetzliche Bewegung wie den freien Fall aus der Ruhelage im luftleeren Raum mit $s(t) = s_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beschreibt.

Aber das mathematische Modell leistet mehr, als nur Größenzusammenhänge zu explizieren: es ist unumgänglich für die *physikalische* Begriffsbildung. Dies ist auch so, wenn wir von der Momentangeschwindigkeit ausgehen und aus ihr die Orts-Zeit-Funktion ableiten. Es sind immer infinitesimale Änderungen aller Größen und infinitesimale Beziehungen zwischen ihnen im Spiel, und es ist infinitesimales Denken zum Durchschauen erforderlich.

Natürliche wie willkürliche Bewegungen lassen sich in der Regel sehr gut durch reelle differenzierbare Orts-Zeit-Funktionen (mit Graphen ohne Sprünge, Ecken und zu starken Oszillationen) modellieren (wobei wir Abprallen, Knicke im Höhenprofil u. Ä. nicht betrachten), bei denen das o. a. Grenzprozessprinzip zu einem sinnvollen Ergebnis führt, d. h.: sämtliche (diskrete) Folgen von Zeitpunkten, mit denen man sich *einem* bestimmten Zeitpunkt t_1 nähert und damit das betrachtete Zeitintervall auf t_1 zusammenzieht, führen für *diesen* Zeitpunkt zu ein und demselben Grenzwert der Ortsänderungsrate, und mit Fug und Recht kann man diesen Grenzwert als die Momentangeschwindigkeit (*lokale* Ortsänderungsrate LOÄR) für diesen Zeitpunkt t_1 bezeichnen. Diese ist gerade die Steigung der Tangente in t_1 und wird zur Steigung des Graphs in t_1 deklariert. Auf diese Weise erhält man eine Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v = v(t)$, die jedem Zeitpunkt t seine Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zuordnet, die sog. *Ableitungsfunktion* $s'(t)$ der Orts-Zeit-Funktion $s(t)$.

Gehorcht in unserem Anhalteweg-Beispiel die Bremsbewegung der Orts-Zeit-Funktion $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{b \cdot (t - t_R)^2}{2}$ für $t_R \leq t \leq t_A$, dann können wir die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion folgendermaßen konstruieren: Für jeden Zeitpunkt t betrachten wir sämtliche Folgen

(t_n) von Zeitpunkten $t_n \neq t$, die gegen t konvergieren, und die zugehörigen Folgen der Differenzenquotienten. Die Rechnung verläuft dann so:

$$
\begin{aligned}
\frac{s(t_n)-s(t)}{t_n-t} &= \frac{v_0 \cdot t_n - \frac{b\cdot(t_n-t_R)^2}{2} - v_0\cdot t + \frac{b\cdot(t-t_R)^2}{2}}{t_n-t} \\
&= \frac{v_0\cdot(t_n-t) - \frac{b}{2}\cdot(t_n^{\,2}-t^2-2\cdot t_n\cdot t_R+2\cdot t\cdot t_R+t_R^2-t_R^2)}{t_n-t} \\
&= \frac{v_0\cdot(t_n-t) - \frac{b}{2}\cdot((t_n+t)\cdot(t_n-t)-2\cdot t_R\cdot(t_n-t))}{t_n-t} \\
&= v_0 - \frac{b}{2}\cdot\left(t_n+t\right)+b\cdot t_R.
\end{aligned}
$$

Diese Folgen konvergieren alle gegen den uns wohl bekannten Wert $v_0 - b \cdot (t - t_R)$. Dieser Term stellt für jeden Zeitpunkt t die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ dar, und somit haben wir die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t) = v_0 - b \cdot (t - t_R)$ für $t \geq t_R$ als Ableitungsfunktion aus der o. a. Orts-Zeit-Funktion $s(t)$ rekonstruiert (Graph s. Abb. 1).

3.7.2.4 Von der Arithmetik zur Analysis: Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Dass wir von der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion durch Integrieren zur Orts-Zeit-Funktion und von da durch Ableiten wieder zurück und entsprechend von der Orts- zur Geschwindigkeits-Zeit-Funktion und wieder zurück gelangen, besagt, dass Ableiten und Integrieren zueinander inverse Operationen sind.

Wir wollen diese Beziehung noch einmal im Zusammenhang beleuchten und dabei vor allem auf die *arithmetischen* Aspekte achten.

Wir gehen von einer Einteilung des Zeitintervalls $[t_0; t_E]$ in n Teilintervalle $J_1, J_2, \ldots, J_n$ mit den Grenzen $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_E$ aus. Wenn die stetige Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t)$ gegeben ist, so kann man sie *diskretisieren*, indem man sie durch die stückweise konstante Funktion mit den Werten $v_k = v(t_{k-1})$ in den Intervallen J_k ersetzt. Die Diskretisierung bedeutet, dass man statt mit unendlich vielen Werten der Funktion nur mit *endlich vielen* Werten rechnen muss, wozu die Arithmetik voll ausreicht. Die zugehörige diskretisierte Orts-Zeit-Funktion kann man mit Hilfe der Grundrechenarten schrittweise so konstruieren (Abb. 7): Für $s(t_0)$ nimmt man einen (willkürlichen) Wert s_0 an, und wenn man am Anfang t_{k-1} eines Intervalls J_k den Wert $s(t_{k-1}) = s_{k-1}$ erreicht hat, bildet man dann für jeden Zeitpunkt t im Intervall das *Produkt* aus der Zeitdauer $t - t_{k-1}$ und der Geschwindigkeit v_k. Man ermittelt also die Ortsänderung seit dem Intervallanfang, *addiert* diese zu dem dort erreichten Ort s_{k-1} und erhält so den neuen Ort $s(t) = s_{k-1} + v_k \cdot (t - t_{k-1})$. Die diskretisierte Orts-Zeit-Funktion ist stückweise linear mit Knicken höchstens an den Intervallgrenzen.

Sei nun umgekehrt die (differenzierbare) Orts-Zeit-Funktion $s(t)$ gegeben. Man diskretisiert sie, indem sie in jedem Intervall J_k durch eine lineare Funktion $l_k(t) = r_k + v_k \cdot (t - t_{k-1})$

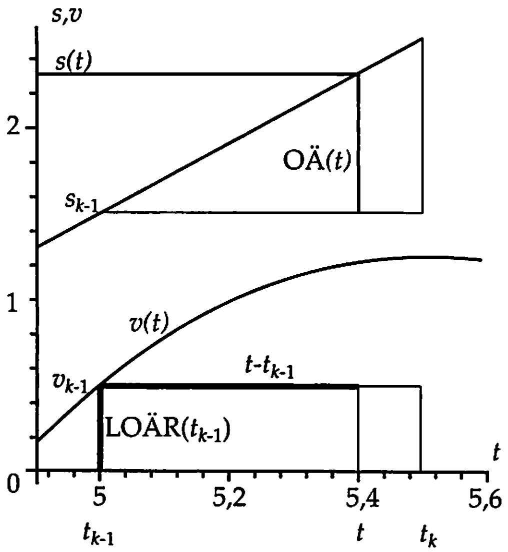

Abb. 7

ersetzt wird, wobei r_k und v_k so zu bestimmen sind, dass $l_k(t)$ am Anfang und Ende des Intervalls mit $s(t)$ übereinstimmt. Dazu wird die *Differenz* zwischen dem am Ende erreichten Ort s_k und dem am Anfang erreichten Ort s_{k-1} (Ortsänderung OÄ) und danach der *Quotient* aus dieser Differenz und der Intervalllänge (= Differenz aus End- und Anfangszeitpunkt) $\frac{s_k - s_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$ gebildet, d. i. die OÄR bzw. Geschwindigkeit für das ganze Intervall. Es ist $r_k = s_{k-1}$ und $v_k = \frac{s_k - s_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$, und so entsteht eine insgesamt stückweise lineare Ersatz-Funktion mit Knicken höchstens an den Intervallgrenzen. Nun wird die diskretisierte Geschwindigkeits-Zeit-Funktion dadurch erzeugt, dass man einfach für jedes Intervall J_k komplett den gerade erhaltenen Wert v_k nimmt (Abb. 7). Diese Funktion ist stückweise konstant mit Sprungstellen höchstens an den Intervallgrenzen.

Bemerkenswert bei diesen Überlegungen ist die fundamentale Rolle der Grundrechenarten der Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division): Durch die *Multiplikation* von Größen und die *Aufsummierung* der Produkte gelangt man auf „diskretem Wege" von der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion zur Orts-Zeit-Funktion. Durch die Bildung von (Orts- und Zeit-) *Differenzen* und deren *Division* gelangt man umgekehrt von der Orts-Zeit-Funktion wiederum auf „diskretem Wege" zur Geschwindigkeits-Zeit-Funktion. Der entscheidende Punkt dabei ist, dass sich die Bildung von Produktsummen und von Differenzenquotienten gegenseitig gerade aufheben, weil die Subtraktion die Umkehrung der Addition und die Division die Umkehrung der Multiplikation ist.

Wenn man die Einteilung in Zeitintervalle immer feiner macht, nähert man sich den stetigen Funktionen immer mehr. Bei den dabei unvermeidlichen Grenzwertprozessen werden die beiden Übergänge zwar unterschiedlich behandelt. Insbesondere hat das Integrieren (von der Geschwindigkeit zum Ort) eher globalen und das Ableiten (vom Ort zur Geschwindigkeit) eher lokalen Charakter. Das „gegenseitige Aufheben" überträgt sich aber von den Produktsummen und Differenzenquotienten voll auf das Integral und die Ableitung. Diese fundamentale Beziehung wird als *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung* formuliert:

Bildet man zu einer stetigen Funktion f die Integralfunktion $\int f$*, so kann man davon wieder die Ableitungsfunktion* $\left(\int f\right)'$ *bilden, und diese ist gleich f.*

Bildet man zu einer differenzierbaren Funktion F die Ableitungsfunktion F', und ist *diese stetig, dann kann man davon wieder die Integralfunktion* $\int(F')$ *bilden, und diese ist (i. W.) gleich F, also*

$$\left(\int f\right)' = f \quad \textit{und} \quad \int(F') = F.$$

Dabei ist der Zusatz „i. W." so zu verstehen: Die Integralfunktion einer Funktion ist ja nur bis auf eine additive Konstante eindeutig definiert, und man muss noch für eine Stelle t_0 im Definitionsbereich festlegen, welchen Wert die Integralfunktion dort haben soll (vgl. auch Abb. 4 und die Ausführungen dazu). Im ersten Teil des Hauptsatzes wird diese Mehrdeutigkeit durch das *anschließende* Ableiten wieder beseitigt. Im zweiten Teil des Hauptsatzes wird sie jedoch relevant: Hat man die Integralfunktion für F' ab der Stelle t_0 ermittelt (was man im Definitionsbereich auch nach links, dann mit negativem Vorzeichen, durchführen kann), dann hat sie ja gemäß dem oben beschriebenen Vorgehen an der Stelle t_0 den Wert 0, und man muss noch $F(t_0)$ addieren, damit sie wirklich identisch mit F wird; also:

$$\int_{t_0}(F') + F(t_0) = F$$

In gleicher Weise kann man nun die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion betrachten mit der Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderungsrate.

Kurzdarstellung der Funktionen, die eine Bewegung beschreiben:

Orts-Zeit-Funktion	$s(t)$
Ortsänderung (= OÄ = „Weg") vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2	$s(t_2)-s(t_1)$
Ortsänderungsrate (= OÄR =Durchschnittsgeschwindigkeit)	$\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$
lokale Ortsänderungsrate (= LOÄR = Momentangeschwindigkeit)	$\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = s'(t_1) = v(t_1)$
Geschwindigkeits-Zeit-Funktion	$v(t)$
Geschwindigkeitsänderung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2	$v(t_2)-v(t_1)$
Geschwindigkeitsänderungsrate (= Durchschnittsbeschleunigung)	$\dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$
lokale Geschwindigkeitsänderungsrate (= Momentanbeschleunigung)	$\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = v'(t_1) = b(t_1)$
Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v = v(t)$ „bewirkt" die Orts-Zeit-Funktion	$s(t) = \int\limits_{u=t_1}^{t} v(u)du + s(t_1)$

Aufgaben zur Vertiefung

M14: Unter den technischen Daten eines Pkw findet sich auch eine Angabe über die für die Beschleunigung von $0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erforderliche Zeit. Ermitteln Sie diese Zeit für Ihr Fahrzeug. (Bei Fahrzeugen der Mittelklasse beträgt sie etwa 12 sec.) Nehmen Sie näherungsweise an, dass das Fahrzeug mit konstanter Beschleunigung auf $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt wird.

(1) *Wie groß ist diese Beschleunigung bei Ihrem Fahrzeug?*
(2) *Welche Strecke wird bis zur Erreichung der Geschwindigkeit* $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *in etwa zurückgelegt?*

(3) *Wie lange ist die Abbremszeit von* $100\frac{km}{h}$ *auf* $0\frac{km}{h}$ *wenn man eine gute Bremsverzögerung unterstellt?*

M15: *Welche Abstände zwischen zwei Fahrzeugen ergeben sich für die Geschwindigkeiten* 60, 90 *und* 120 km/h *bei folgenden Abstandsregeln?* Diskutieren Sie die Ergebnisse.
1. „Abstand = Anhalteweg"; 2. „Halber-Tacho"-Regel; 3. „2-Sekunden"-Regel.

M16: *Leiten Sie die Geschwindigkeits-Ort-Funktion* $v(s) = \sqrt{v_0{}^2 - 2 \cdot b \cdot s}$ *für den Bremsvorgang her. – Berechnen Sie allgemein, wie hoch die Restgeschwindigkeit ist, wenn der halbe Anhalteweg und wenn der halbe Bremsweg zurückgelegt ist. Dabei seien die Anfangsgeschwindigkeit* v_0*, die Vorbremsdauer* t_R *und die Bremsverzögerung* b *gegeben.*

3.7.3 Der effektive Zinssatz

Wie in 1.7.3 ausgeführt wurde, wird bei Angebot und Abschluss eines Geldgeschäfts (z. B. Sparen oder Leihen) regelmäßig ein *Zinssatz i (nominaler Zinssatz)* angegeben, mit dem man die Zinsen ausrechnen kann, die anfallen, wenn ein bestimmtes Kapital für eine bestimmte Zeitdauer in Anspruch genommen wird: Die Zinsen Z sind proportional zum Kapital K und zur Zeitdauer t. Am Ende des Geldgeschäfts betragen sie $Z = i \cdot K \cdot t$, und es ist der Betrag $K + Z = K \cdot (1 + i \cdot t)$ zu zahlen.
Im Allgemeinen wird der Zinssatz auf *1 Jahr* bezogen angegeben, was so selbstverständlich ist, dass es gar nicht mehr explizit erwähnt wird. Dieser Prozentsatz ist dann auf der Basis des Terms $i \cdot K \cdot t$ (t in *Jahren*) ein Maß für die Güte des Geldgeschäfts, jedenfalls wenn es die simple Struktur hat, dass am Anfang eine einzige Auszahlung eines Kapitals und am Ende eine einzige Rückzahlung, nämlich dieses Kapitals und der Zinsen, erfolgt und zwischendurch keine Zinseszinsen anfallen. Die meisten Geldgeschäfte sind aber komplexer aufgebaut, insbesondere wenn ihre Gesamtdauer länger als 1 Jahr ist. Es ist nämlich üblich, dass die Zinsen nach Ablauf eines jeden Laufzeitjahres (oder aber an jedem 31. Dezember) fällig werden, d. h. dass sie, falls sie nicht ausgezahlt werden, dem Kapital zugeschlagen (kapitalisiert) werden, d. h. dass ab dann Zinseszinsen zu zahlen sind, und zwar ohne dass dies extra ausgesprochen werden müsste. Lediglich andere sog. *Zinszeitpunk-*

te (täglich, monatlich, jedes Quartalsende, alle 2 Jahre, am Ende der gesamten Laufzeit o. Ä.) müssen gesondert vereinbart werden. Außerdem werden häufig Gebühren erhoben, und sehr oft sind zwischendurch Zahlungen zu leisten, sei es, dass es sich dabei ausschließlich um die Zinsen handelt, sei es, dass das Darlehen teilweise getilgt wird. Bei gewissen Verträgen werden Zahlungen nicht sofort nach Eingang, sondern erst mit einer gewissen Verzögerung, z. B. immer erst am Quartalsende, auf das zu verzinsende Kapital angerechnet. Manchmal ändert sich der Zinssatz während der Laufzeit, usw.

Das Geldgewerbe hat hier fantasievolle Varianten entwickelt, wie es bei moderat erscheinendem *nominalem Zinssatz* seine Erträge aus einem Darlehen steigern kann. Zwar müssen die Bedingungen des Geldgeschäfts im Detail bekannt gemacht werden, aber die „normale" Verbraucherin und der „normale" Verbraucher durchschauen das „Kleingedruckte" oft nicht hinreichend gut, sondern halten sich zur Einschätzung der „Güte" des Darlehens doch ausschließlich an den nominalen Zinssatz. Zum Zwecke des Verbraucherschutzes wurde das Geldgewerbe daher in der Preisangabenverordnung (PAngV) verpflichtet, bei Geldgeschäften mit Nicht-Kaufleuten alle Bedingungen nach einer bestimmten vorgeschriebenen Methode in eine einzige Zahl, den sog. *effektiven Zinssatz*, zu gießen und diesen zu nennen.

Wir knüpfen dazu an die Formel der exponenziellen Verzinsung (Zinseszinsformel) von 1.7.3 an: Ist n die Anzahl der Jahre, K_0 das Anfangskapital und i der konstante Jahreszinssatz, dann berechnet sich das (End-) Kapital nach n Jahren nach folgender Formel:

Kapitalwachstum mit Zins und Zinseszinsen	$K_n = q^n \cdot K_0$	K_0 = Anfangskapital q $= 1 + i$ = Zinsfaktor für 1 Jahr n = Zeit in Jahren (Zinsperioden)

Ersichtlich ist das Endkapital proportional zum Anfangskapital, während die Abhängigkeit vom Zinssatz komplizierterer Natur ist. Wichtig ist, dass die Entwicklung mit Hilfe des Zinsfaktors sehr einfach gefasst werden kann, nämlich als fortgesetzte Multiplikation. Diese Formel lässt sich leicht auf den Fall verallgemeinern, dass der Zinssatz sich über die Laufzeit verändert (allerdings innerhalb jedes Laufzeitjahrs konstant ist): Beträgt im Laufzeitjahr 1, 2, 3, …, n der Zinssatz $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ (der Zinsfaktor also $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$), dann entwickelt sich das Anfangskapital K_0 folgendermaßen zum Endkapital K_n:

K_0

$K_1 = q_1 \cdot K_0$

$K_2 = q_2 \cdot K_1 = q_2 \cdot q_1 \cdot K_0$

$K_3 = q_3 \cdot K_2 = q_3 \cdot q_2 \cdot K_1 = q_3 \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot K_0$

…

$K_n = q_n \cdot \ldots \cdot q_3 \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot K_0$

Auch hier ist das Endkapital proportional zum Anfangskapital, und erneut geht die Entwicklung durch Multiplikation der Zinsfaktoren vor sich.

Bei unserer bisherigen Betrachtung des Themas „Zinsen" haben wir bis jetzt Fragen der Gebührenerhebung und Kündigungsfristen sowie andere Sonderregelungen ausgeblendet. Diese zu berücksichtigen ist Aufgabe des effektiven Zinssatzes.

Beispiel: Im Januar 2002 wurden Bundesschatzbriefe (Typ B) zu folgenden Konditionen angeboten: „Laufzeit $n = 7$ Jahre mit Zinssätzen $i_1 = 0{,}275$, $i_2 = 0{,}325$, $i_3 = 0{,}375$, $i_4 = 0{,}425$, $i_5 = 0{,}45$, $i_6 = 0{,}475$, $i_7 = 0{,}5$ und Ansammlung der Zinsen mit Zinseszinsen. Rückgabe nach dem ersten Laufzeitjahr jederzeit möglich."
Bei einem Anlagebetrag von $K_0 = 1000$ Euro erhält man nach 7 Jahren eine Auszahlung von $K_7 = q_7 \cdot \ldots \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot K_0 = 1{,}05 \cdot \ldots \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}0275 \cdot 1000 = 1318{,}85$ (Euro).
Hier drängt sich schon die Frage auf, wie hoch eigentlich ein über die 7 Jahre konstanter Zinssatz i sein müsste, damit dieselbe Kapitalvermehrung erzielt wird, d. h. damit sich der Anlagebetrag in dieser Zeit ver-1,31885-facht. Es ist klar, dass der gesuchte Zinssatz irgendwo in der Mitte der sieben gegebenen Zinssätze liegen muss, da er ja die Wirkung der kleineren und der größeren Zinssätze gerade gegeneinander ausgleichen soll. Mit dem zugehörigen Zinsfaktor $q = 1 + i$ muss gelten: $q^7 \cdot 1000 = 1318{,}85$ bzw. allgemeiner

$$q^n \cdot K_0 = K_n, \qquad \text{d. h. } q = \sqrt[7]{1{,}31885} = 1{,}0403 \qquad \text{bzw. } q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

d. h. im konkreten Fall $i = q - 1 = 0{,}0403 = 4{,}03\,\%$. Man berechnet also das geometrische Mittel der tatsächlichen Zinsfaktoren und daraus den gesuchten Zinssatz.
Der so ermittelte Zinssatz heißt *effektiver Zinssatz* dieses Geldgeschäfts. Begrifflich kann er auch folgendermaßen bestimmt werden. Man denkt sich alle Zahlungen eines Geldgeschäfts von dem Zeitpunkt an, an dem sie jeweils erfolgen, bis zum Laufzeitende mit ein und demselben Zinssatz aufgezinst, so dass die aufgezinsten Ein- und Auszahlungen sich in der Summe gerade ausgleichen. Der dadurch bestimmte Zinssatz ist der effektive Zinssatz.
Bei dem Beispiel bedeutet dies: Zum Zeitpunkt 0 findet eine Einzahlung über 1000 Euro und zum Zeitpunkt 7 eine Auszahlung über 1318,85 Euro (ermittelt aus den Konditionen des Geldgeschäfts) statt; die Einzahlung wird 7 Jahre (und die Auszahlung formal 0 Jahre) lang mit einem einheitlichen Zinssatz verzinst. Die verzinste Einzahlung muss denselben Wert wie die Auszahlung haben.
Diese Betrachtungsweise erscheint auf den ersten Blick verwirrend, wird aber einsichtig, wenn man sich folgendes Prinzip der kapitalistischen Wirtschaft klar macht, die auf Wachstum ausgerichtet ist: Geld wird grundsätzlich unter dem Gesichtspunkt der Kapitalvermehrung gesehen. Im kurzfristigen Geldverleih unter Bekannten ist es gang und gäbe, dass z. B. 1000 Euro geliehen und nach einem halben Jahr auch wieder 1000 Euro zurückgezahlt werden. Für die Kapitalistin oder den Kapitalisten sind aber 1000 Euro, die heute verliehen werden, zu einem späteren Zeitpunkt nicht 1000 Euro, sondern haben den Wert, der sich durch den Zinszuwachs ergibt. Der Berechnung des effektiven Zinssatzes liegt eine solche „fließende" Kapitalbetrachtung zugrunde. Im kapitalistischen Weltbild hängt der Wert eines Geldbetrags nicht nur von seiner Höhe, sondern auch vom Zeitpunkt seiner Zahlung ab. Ein und derselbe Betrag ist also umso wertvoller, je früher er gezahlt wird, weil er sich ja dann länger vermehren kann. Natürlich gilt dies nur, wenn die Inflation hinreichend klein ist, was keineswegs selbstverständlich ist.

3.7.3.1 Definition des effektiven Zinssatzes und einfache Beispiele

Der Ablauf eines Geldgeschäft zwischen einer Kreditgeberin oder einem Kreditgeber (ab jetzt „die G“ genannt) und einer Kreditnehmerin oder einem Kreditnehmer (ab jetzt „der N“ genannt) wird am besten durch das von G geführte Darlehenskonto dargestellt. Wir wollen es immer aus der Sicht von N betrachten. Tabelle 2 zeigt den Auszug aus einem Bausparkonto.

Buchungsvorgang	Tag d. Gut-/ Lastschrift	Lastschriften Euro	Gutschriften Euro
Saldovortrag	01. 01. 2002	8.291,47	
Kontoführungsgebühr	01. 01. 2002	15,00	
Einzahlung	02. 01. 2002		480,00
Schuldzinsen	31. 03. 2002	95,52	
Einzahlung	02. 02. 2002		480,00
Einzahlung	02. 03. 2002		480,00
Einzahlung	01. 04. 2002		480,00
Schuldzinsen	30. 06. 2002	80,06	
Einzahlung	04. 05. 2002		480,00
Einzahlung	02. 06. 2002		480,00
Einzahlung	01. 07. 2002		480,00
Schuldzinsen	30. 09. 2002	64,42	
Einzahlung	03. 08. 2002		480,00
Einzahlung	01. 09. 2002		480,00
Einzahlung	01. 10. 2002		480,00
Schuldzinsen	31. 12. 2002	48,60	
Einzahlung	02. 11. 2002		480,00
Einzahlung	01. 12. 2002		480,00
Kontostand am	31. 12. 2002	2.835,07	

Tab. 2

Man sieht, dass vor allem durch tatsächliche Ein- und Auszahlungen, aber auch durch Zinsen, die mit den vertragsgemäßen Zinssätzen für die vertragsgemäßen Zinsperioden berechnet werden, Gebühren, Kosten, Ertragsanteile usw. entstehen, sowie gegenseitige Forderungen und Verbindlichkeiten, die als Last- bzw. Gutschriften gebucht werden. Ist das Konto ausgeglichen und erfolgen keine weiteren Buchungen, dann ist das Geldgeschäft abgeschlossen. Jede Lastschrift über tatsächliche Einzahlungen hinaus und jede Verfrühung einer Lastschrift wirkt sich dahingehend aus, dass der N zum schlussendlichen Ausgleich des Kontos entweder höhere Einzahlungen leisten muss oder bei gleichbleibender Höhe der Einzahlungen länger zahlen muss. Es sind gerade diese Effekte, die ein Darlehen mehr oder weniger günstig machen, aber genau sie werden durch den nominalen Zinssatz nicht erfasst. Der effektive Zinssatz soll hier Abhilfe schaffen. Er wird in der Finanzmathematik durch eine Reihe von Prinzipien beschrieben.

„Vergiss-Prinzip": Man berücksichtigt nur die effektiven Zahlungen, d. h. solche, die aus dem Verfügungsbereich der G in den des N fließen oder umgekehrt, und die Zeitpunkte, an denen sie stattfinden. Es ist dabei gleichgültig, um welche Art von Zahlungen es sich handelt und wie diese betriebswirtschaftlich, steuerlich oder juristisch aufzufassen sind (Tilgung, Zinsen, Gebühren u. Ä.). Alle anderen Buchungen auf dem Darlehenskonto, die keinen Fluss von N zu G oder umgekehrt beschreiben, bleiben unberücksichtigt. Sie wirken sich ja auf N finanziell gar nicht aus.
Nach konsequenter Anwendung des Vergiss-Prinzips erhält man als Idealisierung des Geldgeschäfts dessen *(vorläufigen) Zahlungsstrom*, d. h. eine Folge von Zahlungen, die mit positivem oder negativem Vorzeichen (je nach dem, ob sie von G zu N fließen oder umgekehrt) und den zugehörigen Zeitpunkten versehen sind, und die *Dauer* des Geldgeschäfts (von der ersten bis zur letzten effektiven Zahlung).

Beispiel 1 (Bausparkonto): Wir legen den Kontoauszug von Tab. 2 zugrunde: N erhält am Jahresanfang 8291,47 Euro und zahlt zwölfmal monatlich 480 Euro sowie am Jahresende 2835,07 Euro. Wenn man beachtet, dass die monatlichen Ratenzahlungen der G immer schon am Monatsanfang bzw. Ende des Vormonats zufließen, so erhält man als (vorläufigen) Zahlungsstrom (Zeitpunkte in Bruchteilen eines Jahres angegeben):

$$\left((-7811{,}47;0);\quad \left(480;\frac{1}{12}\right);\quad \left(480;\frac{2}{12}\right);\ \ldots;\quad \left(480;\frac{11}{12}\right);\quad (2835{,}07;1)\right)$$

Prinzip des effektiven Zinssatzes: Der *effektive Zinssatz* ist derjenige einheitliche Zinssatz, für den gilt: Wenn sämtliche (mit Vorzeichen versehene) Zahlungen des Zahlungsstroms von ihrem jeweiligen Zeitpunkt an bis zum gemeinsamen Laufzeitende aufgezinst werden, so ist die Summe (der Saldo) der aufgezinsten Zahlungen gerade 0.
Wie die folgenden Beispiele noch zeigen werden, ist der effektive Zinssatz ein sehr einfaches Modell für ein Geldgeschäft und kann deshalb nicht das einzige Entscheidungskriterium sein. Wichtig sind jedenfalls noch die Laufzeit (welche Entwicklung des Marktzinssatzes erwartet man in dieser Zeit? wie hoch wird bei kurzer Dauer die monatliche Belastung? wie kann man frei werdende Gelder wieder anlegen?), die Bonität des N u. v. a. m.
Während bis hier das Schwergewicht auf der deskriptiven Seite der Modellbildung liegt, kommen wir nun zu einem ausgeprägt normativen Teil.

Zinsperioden-Prinzip für die Ermittlung des effektiven Zinssatzes:
- die *Zinsperioden* dauern 1 Jahr, d. h. ab Laufzeitbeginn findet nach jedem vollen (Laufzeit-)Jahr eine Verzinsung statt; die Zinsen werden *kapitalisiert*, d. h. ab dann mit verzinst: $K_1 = K_0 \cdot (1 + i)$, $K_2 = K_1 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2$ usw. bis $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$. Dabei ist es rechnerisch bequem, multiplikativ mit dem Zins*faktor* $q = 1 + i$ statt additiv mit dem Zins*satz* i zu arbeiten

- sog. *einfache* Verzinsung innerhalb eines Laufzeitjahres: findet eine Zahlung K *innerhalb* eines Laufzeitjahrs um die Zeitspanne t (in Jahren gemessen, also $1 \geq t \geq 0$) vor Jahresende statt, dann werden die Zinsen aus K nur für diese Zeitspanne berechnet und am Jahresende kapitalisiert: $K_1 = K \cdot (1 + i \cdot t)$ (auch hier wird mit Zinsfaktoren, nämlich $1 + t \cdot i$ gearbeitet);
- für *nicht ganzjährige Laufzeiten* sieht die PAngV eine entsprechend kürzere letzte Zinsperiode mit einer Kapitalisierung der Zinsen an deren Ende vor;
- für diese Rechnungen wird so getan, als ob *jeder Monat aus 30 Tagen, das Jahr also aus 360 Tagen* bestünde; Zahlungszeitpunkte werden taggenau angegeben; die Verzinsung beginnt am nächsten Tag.

Fortsetzung von Beispiel 1: Nach dem Prinzip des effektiven Zinssatzes muss der (vorläufige) Zahlungsstrom nun auf das Jahresende hochgerechnet und gleich 0 gesetzt werden. Der effektive Zinssatz x ergibt sich als Lösung der (linearen) Gleichung

$$-7811,47 \cdot (1+x) + 480 \cdot \left(1+\frac{11}{12} \cdot x\right) + 480 \cdot \left(1+\frac{10}{12} \cdot x\right) + \ldots + 480 \cdot \left(1+\frac{1}{12} \cdot x\right) + 2835,07 = 0.$$

Diese Gleichung kann man vereinfachen:

$$\begin{aligned} 0 &= -7811,47 + 11 \cdot 480 + 2835,07 - 7811,47 \cdot x + 480 \cdot \frac{11+10+9+\ldots+1}{12} \cdot x \\ &= 303,60 + x \cdot (-7811,47 + 40 \cdot 66) = 303,60 - 5171,47 \cdot x. \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhält man den effektiven Zinssatz $x = 0,0587 = 5,87$ %, ein erheblich über dem nominalen Zinssatz von 4,6 % liegender Wert.
Der effektive Zinssatz von 5,87 % besagt bei diesem Beispiel: Die G hat dem N am 31. Dezember des Vorjahrs ein Darlehen über 8291,47 Euro zur Verfügung gestellt. Beginnend am 31. Dezember des Vorjahrs hat N zwölfmal immer zum Monatsende 480 Euro gezahlt. Wie viel muss er bei einem Zinssatz von 5,87 % dann noch am Laufzeitende am 31. Dezember zahlen, damit das Darlehen gerade zurückgezahlt ist? Antwort: 2835,07 Euro.
Bei einem effektiven Zinssatz von 4,6 % und sonst gleichem Zahlungsstrom müsste die letzte Zahlung des N so lauten

$$\begin{aligned} &7811,47 \cdot 1,046 - 480 \cdot \left(1+\frac{11}{12} \cdot 0,046\right) - 480 \cdot \left(1+\frac{10}{12} \cdot 0,046\right) - \ldots - 480 \cdot \left(1+\frac{1}{12} \cdot 0,046\right) \\ &= 8170,80 - 11 \cdot 480 - 40 \cdot 66 \cdot 0,046 = 2769,36 \text{ (Euro)}. \end{aligned}$$

Allein durch die Buchungstechnik der Bausparkasse (Kontogebühr von 15 Euro, vierteljährliche Kapitalisierung der Zinsen, Buchung der Rückzahlungen erst einige Tage nach Eingang, Verzinsung der Rückzahlungen erst am Quartalsende nach dem Buchungszeitpunkt) verliert N einen Betrag von etwa 65 Euro, was sich eben in dem höheren effektiven Zinssatz von 5,87 % niederschlägt.

Beispiel 2 (Vorauszahlungsabschlag): Versicherungen, Energieversorgungsunternehmen, Zeitungen u. a. bieten einen Rabatt, wenn man statt regelmäßiger monatlicher oder vierteljährlicher Zahlungen den Beitrag für ein Jahr komplett am Jahresanfang zahlt. Die Unierte

Krankenversicherung z. B. bietet einen Rabatt von 4 %. Nehmen wir an, der monatliche Beitrag sei 311,40 Euro.
Lohnt es sich, dieses Angebot anzunehmen? Durchaus, denn tatsächlich ergibt diese Rabatt-Regelung einen deutlich höheren effektiven Zinssatz als den nominalen Rabattsatz. Man braucht dazu nur den Zahlungsstrom detailliert aufzulisten: Praktisch gewährt man der Versicherung am Jahresanfang ein Darlehen (im Beispiel über $0{,}96 \cdot 12 \cdot 311{,}40 = 3587{,}33$ Euro), und diese zahlt es in 12 Monatsraten immer am Monatsanfang zurück, indem sie die Leistung erbringt, dass die Versicherungsnehmerin bzw. der Versicherungsnehmer versichert ist (die im Beispiel monatlich einen Wert von 311,40 Euro hat). Mit dieser Interpretation ist das Vergiss-Prinzip nicht verletzt: Man kann sich die Regelung so vorstellen, dass man bei einer Bank am Jahresanfang 3587,33 Euro anlegt und dann monatlich 311,40 Euro zurück erhält (die man immer direkt an die Versicherung weiterleitet).
In Aufgabe **M17** wird es Ihnen überlassen, den effektiven Zinssatz für dieses Geldgeschäft zu berechnen.

3.7.3.2 Komplexere Beispiele
Die bisher behandelten Beispiele sind so einfach, dass sich die Bestimmungsgleichung für den effektiven Zinssatz geschlossen lösen lässt. Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall. Wenn die Anzahl der Laufzeitjahre größer als 1 ist, tritt der effektive Zinssatz x in einer höheren Potenz auf. Es entsteht eine Polynomgleichung in $1 + x$ bzw. in x, wobei die Anzahl der Laufzeitjahre den Grad des Polynoms angibt. Bei 2 Laufzeitjahren ergeben sich quadratische Gleichungen, die sich algebraisch gut lösen lassen. Bei 3 und 4 Laufzeitjahren existieren zwar algebraische Lösungen, aber sie sind praktisch nicht zu handhaben. Polynomgleichungen mit einem Grad über 4 lassen sich i. A. gar nicht mehr algebraisch lösen. Bei Laufzeiten über 2 Jahren muss man daher, abgesehen von einfachen Sonderfällen, zu Näherungsverfahren greifen. Aus praktischen Gründen verwendet man solche auch für Laufzeiten von 2 Jahren.

Beispiel 3 (Ratenzahlung): Für Tilgung und Zinsen eines Darlehens über 8000 Euro muss der N zehn Jahre lang immer am Jahresende Raten zahlen, und zwar nacheinander in folgender Höhe: 1500, 1400, 1300, usw. bis 600 Euro. – Ansatz (mit $y = 1 + x$):
$-8000 \cdot y^{10} + 1500 \cdot y^9 + 1400 \cdot y^8 + 1300 \cdot y^7 + \ldots + 700 \cdot y + 600 = 0$, oder bei genauer Nachbildung des Verlaufs: $((((((((-8000 \cdot y + 1500) \cdot y + 1400) \cdot y + \ldots + 700) \cdot y + 600 = 0$.
Wegen des regelmäßigen Aufbaus des Zahlungsstroms könnte man dieses Polynom 10. Grades eventuell noch ein wenig vereinfachen. Den Grad könnte man aber nicht vermindern, und man kommt an einem Näherungsverfahren nicht vorbei. In Anbetracht der wirklich simplen, raschen und schlagkräftigen Möglichkeiten eines Tabellenkalkulationsprogramms lohnt sich eine Umstrukturierung der Gleichung kaum. Begrifflich und praktisch sehr einfach ist das *Intervallhalbierungs-Verfahren*, das auf dem Zwischenwertsatz beruht, der für Polynome im ganzen Bereich der reellen Zahlen gilt.
Man fasst die linke Seite der Gleichung als Polynomfunktion $p(y)$ auf, deren Nullstelle zu suchen ist, und ermittelt ihren Wert an verschiedenen Stellen y. Diese Polynomfunktion hat folgende inhaltliche Bedeutung: Sie gibt für jeden Zinsfaktor y (jeden Zinssatz $x = 1 - y$) den sog. *Endwert* des Zahlungsstroms an, der positiv (Restguthaben des N), null (Ausgleich) oder negativ (Restschuld des N) sein kann. Man kann sie deswegen *End-*

wertfunktion (oder Endwertpolynom) zum Zahlungsstrom nennen. Der effektive Zinssatz ist definitionsgemäß gerade derjenige Zinssatz, bei dem der Endwert = 0 ist, d. h. „die" Nullstelle der Endwertfunktion.
Offensichtlich braucht man (s. Abb. 8) nur den Bereich $y > 1$ zu betrachten. Für $y = 1$ z. B. ist $p(y) = 2500 > 0$, d. h. bei einem Zinssatz von 0 % führt dieser Zahlungsstrom zu einem Restguthaben des N in Höhe von 2500 Euro. Vergrößert man nun y, so verstärkt sich der Einfluss des Summanden mit der höchsten Potenz (Auszahlung der G am Anfang), die anderen Summanden (die anschließenden Rückzahlungen des N) werden zunehmend dafür gebraucht, den ersten zu egalisieren, und können weniger zum Aufbau eines Restguthabens beitragen. Schließlich erreicht man ein y, bei dem $p(y) = 0$ ist, und ist beim effektiven Zinsfaktor und damit beim effektiven Zinssatz angelangt. Eine weitere Erhöhung des Zinssatzes führt zu einem negativen Endwert.

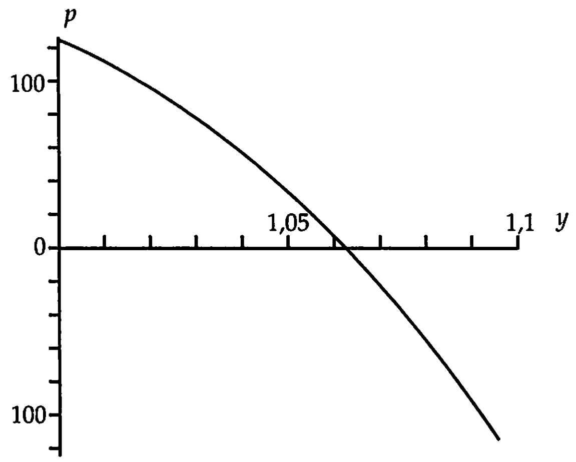

Abb. 8: Die Endwertfunktion zum Zahlungsstrom aus Beispiel 3

Hat man für zwei Zinsfaktoren y_u und y_0 (es sei $y_u < y_0$) zwei Endwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen ermittelt, etwa $p(y_u) > 0$ und $p(y_0) < 0$, dann weiß man, dass der effektive Zinsfaktor in dem Intervall dazwischen liegt, und man hat ihn mit einer Genauigkeit von $y_0 - y_u$ ermittelt. Nun geht man zu dem Zinsfaktor y_m genau in der Mitte zwischen y_u und y_0 über, also $y_m = \frac{y_u + y_0}{2}$ und berechnet dessen Endwert. Entweder ist $p(y_m) = 0$; dann ist y_m der effektive Zinssatz, und man ist fertig. Oder es ist $p(y_m) \neq 0$; und man muss weitermachen: Ist $p(y_m) < 0$, dann muss der effektive Zinssatz zwischen y_u und y_m, im anderen Fall muss er zwischen y_m und y_0 liegen. Im ersten Fall ersetzt man das alte y_0, im zweiten Fall das alte y_u durch y_m und behält beides Mal den jeweils anderen Wert bei. In beiden Fällen hat man jetzt zwei neue Werte y_u und y_0, von denen man weiß, dass der effektive Zinsfaktor zwischen ihnen liegt, und die nur noch halb so weit voneinander entfernt sind wie die beiden vorhergehenden. Man hat also die Genauigkeit des effektiven Zinsfaktors verdoppelt.
Mit den beiden erhaltenen Werten führt man den beschriebenen Schritt erneut durch, usw. Dabei verdoppelt man jedes Mal die Genauigkeit. Nach jeweils 10 Schritten hat man die Genauigkeit ver-1024-facht, also etwa um 3 Dezimalstellen erhöht. Man beendet das Verfahren, wenn die gewünschte Genauigkeit, z. B. 3 Nachkommastellen, erreicht ist.

Als Startwerte setzen wir y_u (das Feld B2) 1 und y_0 (B3) 1,2, um sicher zu sein, dass die Endwerte unterschiedliche Vorzeichen haben. Dass man immer ein solches Wertepaar finden kann, ist bei einer sehr großen Klasse von Geldgeschäften gewährleistet, in jedem Fall

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Schritt	1	2	3	4	5	6	7
2	y_u	1,00000	1,00000	1,05000	1,05000	1,05000	1,05625	1,05938
3	y_0	1,20000	1,10000	1,10000	1,07500	1,06250	1,06250	1,06250
4	y_m	1,10000	1,05000	1,07500	1,06250	1,05625	1,05938	1,06094
5	$p(y_u)$	2 500,00	2 500,00	679,90	679,90	679,90	352,36	178,65
6	$p(y_0)$	−18 575,21	−2 781,23	−2 781,23	−797,07	−1,94	−1,94	−1,94
7	$p(y_m)$	−2 781,23	679,90	-797,07	−1,94	352,36	178,65	89,22
8								
9	Schritt	8	9	10	11	12	13	14
10	y_u	1,06094	1,06172	1,06211	1,06230	1,06240	1,06245	1,06245
11	y_0	1,06250	1,06250	1,06250	1,06250	1,06250	1,06250	1,06248
12	y_m	1,06172	1,06211	1,06230	1,06240	1,06245	1,06248	1,06246
13	$p(y_u)$	89,22	43,86	21,01	9,55	3,81	0,93	0,93
14	$p(y_0)$	−1,94	−1,94	−1,94	−1,94	−1,94	−1,94	−0,51
15	$p(y_m)$	43,86	21,01	9,55	3,81	0,93	−0,51	0,21

Tab. 3: Ermittlung des effektiven Zinssatzes mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

bei gewöhnlichen Darlehen. In B4 berechnen wir y_m, nämlich $= \frac{\text{B2}+\text{B3}}{2}$. Die respektiven Endwerte werden in B5, B6 und B7 eingetragen, und zwar in
B5 = ((((((((−8000*B2+1500) · B2+1400) · B2+1300) · B2+1200) · B2+1100) · B2+1000) · B2+900) · B2+800) · B2+700) · B2+600. Dieser Term wird dann nach B6 und B7 kopiert und bezieht sich dort auf B3 bzw. B4 statt auf B2. Nun kopiert man die Spalte B nach C, trägt dort =WENN(B7>0;B4;B2) in C2 und =WENN(B7<0;B4;B3) in C3 ein (je nach dem Vorzeichen von $p(y_m)$ wird y_u oder y_0 durch y_m ersetzt), und kopiert anschließend die Spalte C so oft nach rechts, bis einem die Differenz zwischen der 1. und 2. Zeile klein genug ist. Dann steht in der 3. Zeile der effektive Zinsfaktor. Bei diesem Vorgehen braucht keine Haltebedingung eingebaut zu werden, weil man das Verfahren ja manuell steuert.

Nun sind Sie in der Lage, für sämtliche Geldgeschäfte mit einer Laufzeit von höchstens 1 Jahr oder mit effektiven Zahlungen immer nur nach vollen Jahren den effektiven Zinssatz zu ermitteln.

Bei vielen Geldgeschäften finden effektive *Zahlungen* nicht nur nach vollen Laufzeitjahren, sondern auch *unterjährig* statt. Dies kann zu sehr langen und unübersichtlichen (vorläufigen) Zahlungsströmen führen.

Mit einer leichten algebraischen Umformung kann man jedoch jeweils einen gleichwertigen (nun: endgültigen) Zahlungsstrom erreichen, dessen Zahlungszeitpunkte alle an Laufzeitjahresenden liegen: Wird ein Betrag K um die Zeitspanne t Jahre ($1 \geq t \geq 0$) vor dem Jahresende gezahlt, so ändert sich ja sein Wert infolge der Aufzinsung um den Zinssatz i bis zum Jahresende auf $K \cdot (1 + t \cdot i)$. Exakt denselben Wert erhält man, wenn man K in

zwei Teilbeträge $t \cdot K$ und $(1-t) \cdot K$ aufspaltet und den ersten am Jahresanfang und den zweiten am Jahresende zahlt:
Es ist ja $t \cdot K \cdot (1+i) + (1-t) \cdot K = K \cdot (1 + t \cdot i)$. Diese Interpretation führt zum

Aufspalt-Prinzip für unterjährige Zahlungen: Eine Zahlung K, die um t Jahre $(1 \geq t \geq 0)$ vor Ablauf eines Laufzeitjahres stattfindet, wird ersetzt durch zwei Zahlungen $t \cdot K$ und $(1-t) \cdot K$ mit den Zahlungszeitpunkten 0 und 1 in diesem Laufzeitjahr.
Auf diese Weise werden alle relevanten Zahlungen gleichwertig durch solche ersetzt, die ausschließlich an ganzzahligen (in Jahren) Zeitpunkten stattfinden. Summiert man noch bei jedem Zinszeitpunkt die mit Vorzeichen versehenen Zahlungen auf (d. h.: saldiert man sie), so erhält man den *(endgültigen) Zahlungsstrom* über n Jahre
$(K_0; K_1; \ldots; K_n) \qquad (K_0 \neq 0 \neq K_n)$,
der für jedes Jahr(esende) m $(0 \leq m \leq n)$ genau eine Zahlung K_m enthält.

Bei irgendeinem für die ganze Laufzeit einheitlich angenommenen Zinssatz x hat der Zahlungsstrom (und damit das Geldgeschäft) den
Endwert $p(1+x) = (\ldots(K_0 \cdot (1+x) + K_1) \cdot (1+x) + \ldots + K_{n-1}) \cdot (1+x) + K_n$.
Dann ist derjenige Zinssatz x der *effektive Zinssatz*, bei dem der *Endwert* gerade 0 ist.
(Hier wird, in Abweichung von der PAngV, unterstellt, dass die Laufzeit auf volle Jahre aufgerundet wird, auch wenn die letzte Zahlung früher erfolgt.)
Anlässlich der beiden Schreibweisen des Endwerts in Beispiel 3 wurde schon klar, dass man (aufgezinste) Zahlungen an Jahresenden separat (weiter) aufzinsen und dann saldieren kann oder aber an jedem Jahresende alle (bis dahin aufgezinsten) Zahlungen saldieren und dann (weiter) aufzinsen kann. Dasselbe Prinzip (eine Art Distributivgesetz) gilt erst recht für Zahlungen innerhalb eines Laufzeitjahres.

Beispiel 4 (Monatsraten): Zahlt man zwölfmal im Jahr immer am Monatsanfang einen festen Betrag K, so ist dies für die Aufzinsung mit einem beliebigen Zinssatz i gleichwertig zu dem Zahlungsstrom mit $6{,}5 \cdot K$ am Jahresanfang und $5{,}5 \cdot K$ am Jahresende; denn

$$K \cdot (1+i) + K \cdot \left(1 + \frac{11}{12} \cdot i\right) + K \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot i\right) + \ldots + K \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot i\right) + K \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot i\right)$$
$$= 12 \cdot K + K \cdot \frac{12 + 11 + 10 + \ldots + 2 + 1}{12} \cdot i = 12 \cdot K + 6{,}5 \cdot K \cdot i = 6{,}5 \cdot K(1+i) + 5{,}5 \cdot K.$$

3.7.3.3 Zusammenfassung:

Der effektive Zinssatz eines Geldgeschäftes wird in folgenden Schritten berechnet:

1. Aus den *Bedingungen des Geldgeschäfts* werden die erforderlichen Zahlungen ermittelt.
2. Gemäß dem *Vergiss-Prinzip* werden die tatsächlichen Zahlungen mit ihren tatsächlichen Zeitpunkten zum *vorläufigen Zahlungsstrom* zusammengefasst.
3. Gemäß dem *Zinsperioden-Prinzip* und dem *Aufspalt-Prinzip* wird der vorläufige Zahlungsstrom in den *(endgültigen) Zahlungsstrom* überführt mit Zahlungen nur an Jahresenden (gemäß der PAngV jedoch außer der letzten Zahlung bei nicht-ganzjährigen Laufzeiten).
   $(K_0; K_1; \ldots; K_n)$

4. Durch Aufzinsung der Zahlungen des Zahlungsstroms zum Laufzeitende mit dem Zinssatz x und Saldierung ergibt sich der *Endwert* $p(1 + x) = (\ldots(K_0 \cdot (1 + x) + K_1) \cdot (1 + x) + \ldots + K_{n-1}) \cdot (1 + x) + K_n$ des Geldgeschäfts als Polynomfunktion von x. Derjenige Zinssatz x ist der *effektive Zinssatz,* bei dem der *Endwert gerade 0* ist.

Aufgaben zur Vertiefung:

M17: *Rechnen Sie nach, dass das Rabatt-Angebot in Beispiel* 2 *den effektiven Zinssatz* 10,96 % *hat* (setzen Sie dabei eine Laufzeit von 1 Jahr an, auch wenn die letzte Zahlung bereits am 30. November erfolgt). – *Machen Sie plausibel, wieso der effektive Zinssatz mehr als doppelt so hoch wie der nominale Rabattsatz ist. – Was könnte gegen eine Annahme dieses Rabatt-Angebots sprechen?*

M18: Ein Darlehen über 32 000 Euro mit einem nominalen Zinssatz von 5,95 % wird am 31. Dezember 1991 ausgezahlt. Die Zinsen werden immer am Jahresende fällig. In den ersten 4 Jahren zahlt N nur diese; ab dem 5. Jahr tilgt er außerdem jährlich am Jahresende 8000 Euro. – *Stellen Sie das Darlehenskonto auf, und berechnen Sie den effektiven Zinssatz mit dem Intervallhalbierungs-Verfahren. Wieso stimmen nominaler und effektiver Zinssatz überein?*

M19:

1. *Geben Sie für die folgenden drei (vorläufigen) Zahlungsströme:*
   K zwölfmal im Jahr immer am Monatsende;
   K viermal im Jahr immer am Quartalsende;
   K viermal im Jahr immer zur Quartalsmitte
   den (endgültigen) Zahlungsstrom an.
2. *Wenden Sie das Ergebnis von Beispiel 4 auf Beispiel 2 an, geben Sie für dieses den (endgültigen) Zahlungsstrom an, und machen Sie die Höhe des effektiven Zinssatzes im Vergleich zum nominalen Zinssatz erneut plausibel.*

M20:

1. Am 31. Dezember 2002 zahlt die G an den N für einen Hausbau den Betrag von 396.000 Euro zu einem nominalen Zinssatz von 6,28 % aus. N muss immer am 15. März, 15. Juni, 15. September, 15. Dezember 7207,20 Euro zurückzahlen (ein Viertel von 7,28 % des Auszahlungsbetrags); diese Zahlungen werden immer erst ab Beginn des folgenden Quartals verzinst. – *Stellen Sie das Darlehenskonto auf (mit 40 Quartalen), und verifizieren Sie, dass am 31. Dezember 2013 die Restschuld 351.916,49 Euro beträgt (da ist ja in den 10 Jahren nur ein geringer Teil des Darlehens abgetragen worden!). – Erstellen Sie nun den Zahlungsstrom, und überprüfen Sie, dass der effektive Zinssatz 6,67 % lautet.*
2. *Fügen Sie das Darlehen aus Aufgabe* **M18** *mit dem aus Aufgabe* **M20a** *zu einem einzigen Geldgeschäft zusammen, erstellen Sie den Zahlungsstrom, und berechnen Sie den effektiven Zinssatz.*

Literatur

Arons, A. B.: A Guide to Introductory Physics Teaching. New York: Wiley 1990.
Becker, Oskar: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Frankfurt: Suhrkamp 1975.
Bender, Peter: Ein Zugang zur Finanzmathematik für den Bürgergebrauch. In: Der Mathematikunterricht 35 (1989), Heft 6, 4–27.
Bender, Peter: Der interne Zinssatz bei beliebigen Investitionen. In: Wolfgang Lücke & Klaus Schulz (Hrsg.): Umweltschutz und Investitionen. Wiesbaden: Gabler 1992, 9–63.
Bender, Peter & Godehard Singer: Die Sonnenuhr im System ‚Sonne–Erde'. Hildesheim: Franzbecker 1998.
Ekrutt, Joachim W.: Der Kalender im Wandel der Zeiten. 5000 Jahre Zeitberechnung. Stuttgart: Franckh 1972.
Winter, Heinrich & Haas, Nicola: Ohne Modellbildung kein Verständnis. In: Der Mathematikunterricht 43 (1997), Heft 5, 14–29.

Stichwortverzeichnis

Aus: Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (2004). Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer.