

# Drei Entdeckungen mit Hilfe von Software für Dynamische Geometrie (DGS)

von

Peter Bender, Paderborn

**Kurzfassung:** Bei der Arbeit mit Software für Dynamische Geometrie in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung entdeckte der Autor einige für ihn neue elementargeometrische Sachverhalte. Diese werden im Beitrag dargestellt und in klassischer Manier bewiesen.

**Abstract:** Working with dynamic geometry software in the geometry course for prospective teachers, the author discovered several facts from elementary geometry which were new to him. These facts will be presented in the article together with proofs in classical style.

## 1 Einleitung

Als 1988 CABRI GÉOMÈTRE als erste Software für Dynamische Geometrie (DGS) der didaktischen Öffentlichkeit vorgestellt wurde, schien ein alter Traum aller Geometrie Treibenden und Lehrenden Wirklichkeit geworden zu sein: geometrische Formen, wenigstens in der Ebene, scheinbar (aber genau auf den Schein kommt es an) kontinuierlich bewegen und verändern zu können. Aus den verschiedensten Gründen hat sich aber die Erwartung einer Revolution des Geometrieunterrichts nicht erfüllt. Nach wie vor wird die Geometrie in der allgemeinbildenden Schule vernachlässigt; die erforderliche technische Ausstattung ist fast überall unzulänglich; die Mathematikdidaktik ist immer noch weit davon entfernt, ein brauchbares umfassendes Curriculum für den Geometrieunterricht mit computerlosen und computerhaltigen Aktivitäten zu liefern. Die Kolleginnen und Kollegen hatten stattdessen zunächst einmal die Möglichkeiten der DGS überhaupt ausgelotet, vornehmlich auf der inhaltlichen, zunehmend auf der methodischen und hie und da auch auf der pädagogischen Ebene.

Die Hoffnungen, dass die Verbreitung des Computers das Selbstständigkeitsparadigma der modernen Pädagogik befördern würde, haben sich insgesamt, aber auch speziell bei DGS, nicht erfüllt, jedenfalls wenn es um den Erwerb substanzialer Inhalte geht. Für diesen Misserfolg (wenn man ihn denn so sehen will) sind keineswegs allein methodische und didaktische Mängel (die in der Tat in Hülle und Fülle vorkommen) oder das Ansinnen verantwortlich, überhaupt methodische und didaktische Gesichtspunkte einzubringen. Die Ursachen liegen tiefer.

1 Die kognitiven, motivationalen, sozialen usw. Voraussetzungen von „gewöhnli-  
2 chen“ Geometrielernenden bis hinauf zu Studierenden des Lehramts unterscheiden  
3 sich doch erheblich von denen derjenigen, die von Berufs wegen (nicht zuletzt als  
4 Lehrende oder sich mit dem Lehren Befassende) oder gar um der Sache selbst wil-  
5 len Geometrie treiben. Unsereiner kennt die Geschichte einigermaßen, ist auf dem  
6 Stand der Diskussion, hat Interesse, kann (wenn denn Zeit vorhanden) mit Muße  
7 Geometrie treiben, hat Erfahrung und schon so manches geometrische Problem in  
8 einer gewissen Tiefe durchdrungen, kennt Nachbargebiete, mathematisches Rä-  
9 sonnieren usw. Den „gewöhnlichen“ Lernenden geht dies alles mehr oder weniger  
10 ab. Neben der Geometrie haben sie inner- und außerhalb von Schule bzw. Hoch-  
11 schule vielfältige Interessen und aufwändige Pflichten, und wir sollten viel zurück-  
12 haltender und realistischer sein, was wir ihnen an selbstständig zu Erarbeitendem  
13 zumuten wollen und können. Der erkenntnistheoretische Konstruktivismus taugt  
14 als pädagogische Grundlage und Rechtfertigung für solche Zumutungen überhaupt  
15 nicht, eben weil „gewöhnlichen“ Lernenden alle die genannten Voraussetzungen  
16 fehlen. In der Tat habe ich noch nie durch langfristige stabile Lernerfolge belegt  
17 gesehen, wie sie ohne massive Intervention durch Lehrende (sowohl direkt persön-  
18 lich, als auch indirekt durch Bücher, Internet o. Ä.) sich substantielle Mathematik  
19 in sog. konstruktivistischen Lernumgebungen selbstständig erarbeitet hätten. Das  
20 war übrigens „früher“ nicht viel anders, und zwar auch nicht bei einem Martin  
21 Wagenschein.

22 Unabhängig davon erkenne ich der Geometrie eine wichtige Rolle in der allge-  
23 meinbildenden und in der berufsbildenden Schule sowie in der Lehrerinnen- und  
24 Lehrerbildung zu. Stichworte zur Rechtfertigung: Raumanschauung, rationales und  
25 logisches Denken, Argumentieren, Kreativität, Ästhetik, Anwendungen, „abstrakte“  
26 Bildung, Kompensation (im Vergleich zum restlichen Mathematikunterricht)  
27 u. a. – In zahlreichen Büchern und Aufsätzen von 1971 (und früher) über 1988 bis  
28 heute hat Hans Schupp wesentliche Beiträge zur Geometrie und ihrer Didaktik  
29 überhaupt und zu diesen Gesichtspunkten speziell geleistet. – Inzwischen drückt  
30 DGS vielen davon ihren Stempel auf, und DGS hätte m. E. schon seit einiger Zeit  
31 ein konstituierender Bestandteil des Geometrieunterrichts zu sein. Die Grenzen  
32 sind auch klar: Nach wie vor muss die Papier-und-Bleistift-Zeichnung den Bezug  
33 zwischen der Körperlichkeit des Menschen und der ebenen Geometrie herstellen;  
34 Beweise sind fast immer in ruhenden Situationen zu führen (für die trotzdem mög-  
35 lichen Funktionen von DGS dabei s. [Bender 1989]; Anwendungen können zwar  
36 oft mit Hilfe von zweidimensionalen Skizzen verständlich gemacht werden, und  
37 DGS kann dabei helfen, wenn ebene Bewegungsabläufe involviert sind. Für genuin  
38 dreidimensionale Situationen gibt es wohl schon lange kommerzielle CAD-Pro-  
39 gramme und inzwischen sogar leistungsfähige 3D-Weiterentwicklungen von schul-  
40 affiner DGS: CABRI 3D (vgl. [Schumann 2004]). Hier werden dann aber die Gren-  
41 zen durch den übertriebenen Respekt von Lehrenden und Lernenden vor der Sache  
42 „Raumgeometrie“ gesetzt.

1    Zugleich leistet DGS auch einen wesentlichen Beitrag zur, global gesprochen, Me-  
2    dienerziehung und einen spezifischen nichttrivialen Beitrag zur Erfahrung von  
3    Möglichkeiten und Grenzen, zur Aneignung und zur Nutzung Neuer Medien. Auch  
4    zu diesen Fragen des Mathematikunterrichts hat Hans Schupp von 1990 (und früher  
5    her) über 1997 bis heute wichtige Erkenntnisse beigesteuert.

6    An der „Universität der Informationsgesellschaft“ in Paderborn ist der Nährboden  
7    für Forschung und Entwicklung auf diesem Gebiet durchaus günstig. Nicht zuletzt  
8    im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung hat hier der Erziehungswissen-  
9    schaftler Gerhard Tulodziecki als Motor gewirkt. Aus entsprechenden, z. T. von  
10    der Bertelsmann-Stiftung geförderten Projekten, sind auch einschlägige Aktivitäten  
11    der Fachgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ hervorgegangen. So hat Hans-  
12    Dieter Rinkens mit Mitarbeiter Hauke Friedrich Ende der 1990er Jahre unsere  
13    Erstsemester-Veranstaltung zur Elementargeometrie für Studierende des Grund-,  
14    Haupt- und Realschullehramts konsequent auf die Verwendung von DGS umge-  
15    stellt. Zunächst hat er CABRI GÉOMÈTRE eingesetzt, ist aber bald auf CINDERELLA  
16    umgestiegen, weil diese DGS damals allein internettauglich war. Ab WS 02/03  
17    wurde die Veranstaltung von mir übernommen, zunächst mit Mitarbeiterin Doro-  
18    thee Maczey und dann mit Mitarbeiter Tobias Huhmann. Obwohl wir inzwischen  
19    das Internet nicht mehr benötigen, weil wir sämtliche Text- und Grafikdateien auf  
20    CD zur Verfügung stellen, und obwohl andere DGS in Sachen „Internettauglich-  
21    keit“ aufgeholt haben, sind wir bei CINDERELLA geblieben, auch wenn wir (in der  
22    von uns verwendeten Version) u. a. die Möglichkeit des Makro-Schreibens vermis-  
23    sen und uns ein besseres Layout wünschen (s. die unten angegebenen Abbildun-  
24    gen). Zu dieser Veranstaltung sind Ziele, Konzeption, Erfahrungen usw. in [Bender  
25    2005] beschrieben.

26    Jetzt möchte ich einige interessante stoffliche Aspekte beleuchten. Es handelt sich  
27    um drei Entdeckungen mit Hilfe von DGS und die zugehörigen Beweise, die alle  
28    auf der Lehrendenebene stattgefunden haben bzw. durchgeführt wurden. Sie beru-  
29    hen auf Übungsaufgaben, die noch von Hans-Dieter Rinkens stammen. Zwei dieser  
30    Aufgaben haben wir entsprechend unserer Entdeckungen für die Studierenden wei-  
31    ter entwickelt; gemäß den o. a. Bemerkungen versehen wir sie aber mit deutlichen  
32    Hinweisen. Unser Ziel ist dabei, die Breite der Hörerschaft zu Verstehensfolgen  
33    zu führen. Trotzdem haben auch die Leistungsstärkeren Entfaltungsmöglichkeiten;  
34    denn das eigenständige Finden, saubere Ausarbeiten und nachvollziehbare Präsen-  
35    tieren der Lösungen ist immer noch eine ordentliche Leistung.

36    Wir selbst versuchen, unsere eigene Begeisterung für die Geometrie auf die Studie-  
37    renden zu übertragen, und wir wünschen uns, dass sie es später in der Schule mit  
38    ihren Lernenden genauso tun. Aus Sicht der wissenschaftlichen Mathematikdidak-  
39    tik ist das natürlich zu wenig, und obwohl es sich um eine Fachveranstaltung han-  
40    delt, versuchen wir immer wieder, die Lernprozesse der Studierenden explizit zu ma-

1 chen, die sich ja von denen ihrer zukünftigen Schülerinnen und Schülern kaum unter-  
 2 scheiden, und wir streuen an vielen Stellen genuin didaktische Bemerkungen ein.  
 3 Nun also einige Ergebnisse der intensiven Diskussionen des Stoffs mit den Mitar-  
 4 beitenden, zu denen uns, wie gesagt, die DGS verholfen hat. Ich hoffe, dass auch  
 5 Hans Schupp seine Freude an unseren Entdeckungen hat.

## 6 2 Ortslinien bei regelmäßigen Figuren

7 Eine typische Ortslinien-Aufgabe in unserem Lehrgang: Gegeben sind ein Winkel-  
 8 feld (mit gewissen Einschränkungen für das Winkelmaß, die aber bei unseren wei-  
 9 teren Ausführungen keine Rolle spielen) mit zwei Schenkeln  $g$  und  $h$  sowie ein  
 10 Punkt  $A$  im Inneren. Es soll ein gleichseitiges Dreieck so in das Winkel-  
 11 feld einpassen, dass eine Ecke auf  $A$ , die zweite auf  $g$  und die dritte auf  $h$  liegt.

12 Man legt eine Ecke  $B$  auf  $g$  und konstruiert das zugehörige gleichseitige Dreieck  
 13  $ABC$  (die drei Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn). Mit dem  
 14 Ortslinien-Button zeichnet man die Ortslinie  $c$  von  $C$  in Abhängigkeit von  $B$  mit  
 15 dessen Ortslinie  $g$ .  $c$  ist offensichtlich eine Gerade mit einer bestimmten Neigung

16 gegen  $g$ . Für den Beweis der Geraden-Ei-  
 17 genschaft und die Bestimmung dieser Nei-  
 18 gung haben wir folgenden Beweis-Proto-  
 19 typen entwickelt: Wir betrachten die Rota-  
 20 tion (der ganzen Ebene) um  $A$  um  $60^\circ$   
 21 links. Diese bildet jeden Punkt  $B$  auf den  
 22 zugehörigen Punkt (Ecke im gleichseitigen  
 23 Dreieck)  $C$  ab. Das Bild der Geraden  $g$  (die  
 24 Ortslinie von  $B$ ) unter dieser Rotation ist  
 25 also genau  $c$  (die Ortslinie von  $C$ ). Diese  
 26 ist demnach eine Gerade mit einer Neigung  
 27 von  $60^\circ$  (dem Rotationswinkel) gegen  $g$   
 28 (Abb. 1). Nun muss noch der Schnittpunkt  
 29  $S$  von  $c$  mit  $g$  konstruiert werden: Dazu

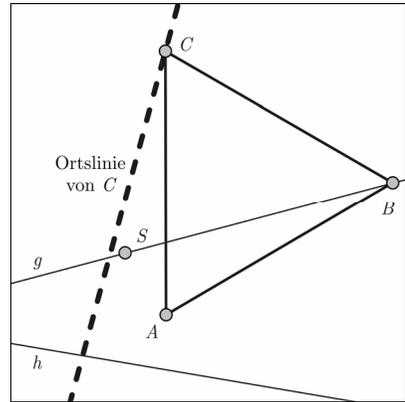


Abb. 1

30 betrachtet man diejenige besondere Lage von  $B$  auf  $g$ , bei  
 31 der auch  $C$  auf  $g$  liegt (Abb. 2), und diese Lage von  $C$  ist  
 32 dann gerade  $S$ .

33 Die Konstruktion liegt damit auf der Hand: Man fällt das  
 34 Lot von  $A$  auf  $g$  und trägt daran in  $A$  links und rechts je  
 35  $30^\circ$  ab. Zeichnet man nun  $c$  (durch  $S$  um  $60^\circ$  gegen  $g$  ge-  
 36 neigt), liefert der Schnittpunkt mit dem Schenkel  $h$  den  
 37 endgültigen Punkt  $C$  (Abb. 3).

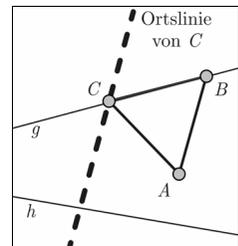


Abb. 2

1 Bei Ortslinien-Aufgaben dieses Typs haben wir auch ande-  
 2 re Formen vorgegeben, vornehmlich gleichschenkligh-recht-  
 3 winklige Dreiecke und Quadrate. Möchte man im Quadrat  
 4  $ABCD$  bei fester Ecke  $A$  nun z. B. untersuchen, wie  $C$  von  
 5  $B$  abhängt, so benötigt man folgende Weiterentwicklung  
 6 des o. a. Beweis-Prototyps: Man muss nun eine Drehstreckung  
 7 um  $A$  betrachten um einen Winkel von  $45^\circ$  mit einem  
 8 Streckfaktor von  $\sqrt{2}$ . Ansonsten ist das Vorgehen das-  
 9 selbe wie beim Dreieck; bei der Konstruktion der Ortslinie  
 10 spielt der Streckfaktor keine Rolle. Beim  $n$ -Eck mit  $n > 3$  tritt die Möglichkeit auf,  
 11 dass zwei Ecken des  $n$ -Ecks auf den beiden Schenkeln, aber nicht alle Ecken im  
 12 Inneren des Winkelfelds liegen, so dass man nicht mehr von einem Einpassen ins  
 13 Winkelfeld reden kann.

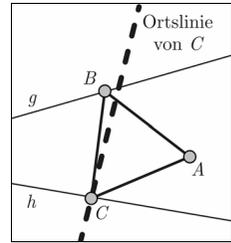


Abb. 3

14 Überhaupt wird für die weiteren Überlegungen das Winkelfeld nicht mehr ge-  
 15 braucht, und wir beschränken uns auf die Gerade  $g$ , einen festen Punkt  $A_1$  außer-  
 16 halb von ihr, einen Punkt  $A_2$  beweglich auf ihr sowie das regelmäßige  $n$ -Eck  
 17  $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$  (die Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn). Es  
 18 fiel uns auf, und zwar im Zuge des Erfindens von Klausuraufgaben erstmals beim  
 19 Fünfeck, dass die  $n-2$  Ortslinien  $a_3, a_4, \dots, a_n$  aller Ecken  $A_3, A_4, \dots, A_n$  sich  
 20 in einem einzigen Punkt  $S$  auf  $g$  schneiden und die  $n-3$  Neigungen  $a_3a_4, a_4a_5, \dots,$   
 21  $a_{n-1}a_n$  benachbarter Ortslinien

22 gegeneinander alle  
 23 das gleiche Maß, nämlich  
 24  $\frac{180^\circ}{n}$ , haben (Abb. 4 mit  
 25  $n=8$ ). Nimmt man die  
 26 beiden Geraden  $SA_1$  und  
 27  $SA_2$  hinzu, so entsteht eine  
 28  $n$ -fach drehsymmetrische  
 29 Figur aus  $n$  Geraden durch  
 30  $S$ , die  $2 \cdot n$  Winkelfelder  
 31 vom Maß  $\frac{180^\circ}{n}$  bilden. Ehe  
 32 wir eine Aufgabe hierzu  
 33 für die Studierenden stel-  
 34 len würden, wollten wir  
 35 diesen Sachverhalt erst  
 36 einmal für uns selbst klä-  
 37 ren. Für die Klausur kam  
 38 er schließlich nicht in Frage, wohl aber später für eine entsprechend vorbereitete  
 39 Hausaufgabe.

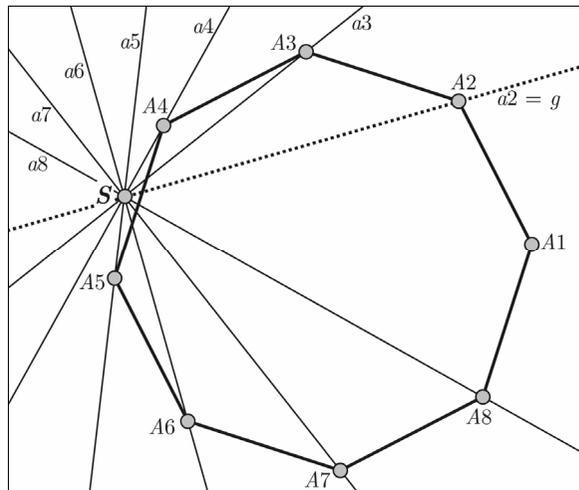


Abb. 4

40 Bald erwies sich folgendes Faktum als zentral: Zeichnet man im regelmäßigen  $n$ -  
 41 Eck von der Ecke  $A_1$  aus sämtliche  $n-3$  Diagonalen, dann sind die so in  $A_1$  gebil-

1 deten Winkel alle gleich groß  
 2 und haben das Maß  $\frac{180^\circ}{n}$  (Abb.  
 3 5). Beweis hierzu: Die  $n-2$   
 4 Winkel  $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4, \dots,$   
 5  $A_{n-1}A_1A_n$  sind im Umkreis des  
 6  $n$ -Ecks Umfangswinkel über  
 7 demselben Kreisbogen von  $A_2$   
 8 über  $A_3$  usw. bis  $A_n$  über kon-  
 9 gruenten Sehnen, nämlich den  
 10  $n$ -Ecks-Seiten  $A_2A_3, A_3A_4, \dots,$   
 11  $A_{n-1}A_n$ . Also sind die Winkel  
 12 nach dem Umfangswinkelsatz  
 13 alle gleich groß. Dieser Winkel  
 14 in  $A_1$  wird nun durch die Dia-  
 15 gonalen in  $n-2$  gleichgroße  
 16 Winkel von je  $\frac{180^\circ}{n}$  zerlegt.

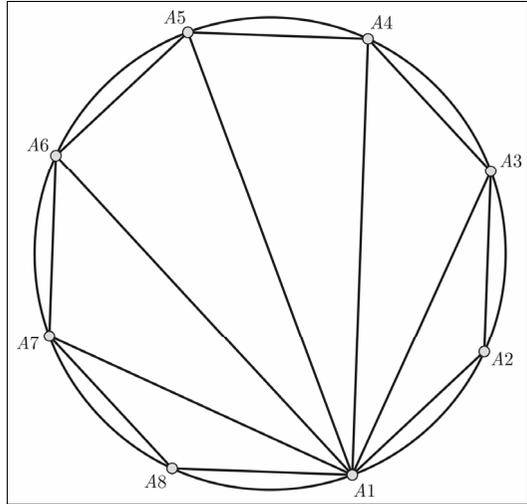


Abb. 5

17 Mittels Drehstreckung um die  
 18 Ecke  $A_1$  um  $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$  nach links mit einem (nicht weiter interessierenden) Streck-  
 19 faktor  $k_j$  wird die Ecke  $A_2$  für  $j=1, 2, \dots, n-2$  auf die Ecke  $A_{j+2}$  abgebildet,  
 20 so dass die zugehörige Ortslinie  $a_{j+2}$  (in Abhängigkeit von  $A_2$ ) die Neigung  
 21  $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$  gegen die Ortslinie  $a_2 = g$  von  $A_2$  hat.

22 Um zu zeigen, dass alle diese  
 23 Geraden sich in einem Punkt  
 24 schneiden, ziehen wir  $A_2$  so,  
 25 dass  $A_n$  auch auf  $g$  liegt, und  
 26 betrachten in dieser Lage des  
 27  $n$ -Ecks sämtliche Diagonalen  
 28 von  $A_n$  aus, wovon die Ger-  
 29 ade  $g$  die erste ist (Abb. 6).  
 30  $n-4$  die Diagonale  $A_nA_{j+2}$   
 31 die Neigung  $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$  und die  
 32 Seite  $A_nA_{n-1}$  die Neigung  
 33  $\frac{n-3}{n} \cdot 180^\circ$  gegen  $g$ . Das heißt,  
 34 die Ortslinien aller Ecken  $A_3,$   
 35  $A_4, \dots, A_{n-1}$  treffen sich in  $A_n$   
 36 in dieser Lage, und dies ist der  
 37 gesuchte Schnittpunkt  $S$ , durch  
 38 den ja auch die Ortslinie von  
 39  $A_n$  geht. (Ergänzt man diese Kollektion von  $n-2$  Ortslinien noch um die Ortsli-  
 40 nie von  $A_2$ , nämlich die Gerade  $g$ , und um die Gerade  $A_1A_n$ , so erhält man das ge-  
 41 nannte Gebilde aus  $n$  Geraden durch  $S$  mit  $2 \cdot n$  gleich großen Winkeln.)

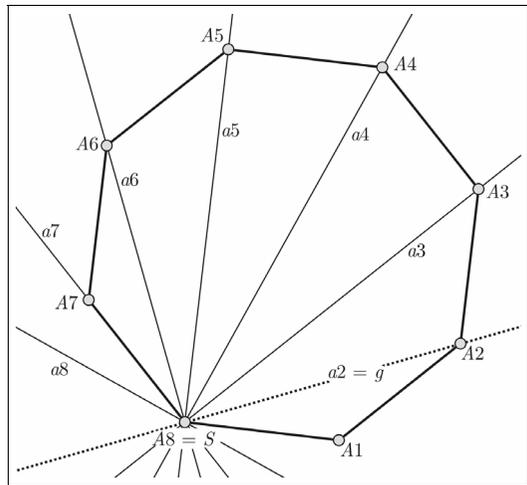


Abb. 6

### 1 3 Zerlegung des Umfangswinkels

2 Man betrachte einen Kreis mit der Sehne  $AB$  und die beiden Kreisbögen  $j$  und  $k$   
 3 von  $A$  nach  $B$  (wobei die Endpunkte  $A$  und  $B$  nicht zu den Bögen gehören sollen).  
 4 Wähle einen der beiden Kreisbögen aus, etwa  $k$ . Dann haben für alle Punkte  $X$  auf  
 5  $k$  die Umfangswinkel  $AXB$  dasselbe Maß (Umfangswinkelsatz). Zeichne nun die  
 6 Winkelhalbierende in  $AXB$  ein, und beobachte ihren Schnittpunkt  $C$  mit dem ge-  
 7 gegenüberliegenden Kreisbogen  $j$  (Abb. 7). Es fällt direkt auf, dass  $C$  ein Fixpunkt  
 8 bei der Bewegung von  $X$  auf  $k$  ist. Im Umfeld des Umfangswinkelsatzes stößt man  
 9 leicht auf einen Beweis hierfür. Man  
 10 weiß ja: Ist, in ein und demselben  
 11 Kreis, eine Sehne kürzer als eine ande-  
 12 re, dann ist ihr spitzer Umfangs-  
 13 winkel kleiner und ihr stumpfer Um-  
 14 fangswinkel größer als der jeweils  
 15 entsprechende Winkel der anderen  
 16 Sehne, und sind zwei Sehnen kongru-  
 17 ent, dann sind auch ihre spitzen Um-  
 18 fangswinkel und ihre stumpfen Um-  
 19 fangswinkel jeweils kongruent (mit  
 20 nahe liegendem Einbezug einer Sehne,  
 21 die Durchmesser ist, mit ihren  
 22 beiden rechten Umfangswinkeln).

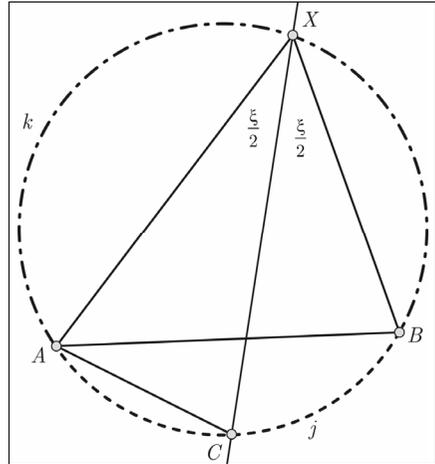


Abb. 7

23 Nun schließt man: Für irgendeinen  
 24 Punkt  $X$  auf  $k$  erhält man einen be-  
 25 stimmten Schnittpunkt  $C$  der Winkelhalbierenden mit  $j$ , und der Winkel  $AXC$  ist  
 26 halb so groß wie der Winkel  $AXB$ . Er bleibt dies auch, wenn  $X$  auf  $k$  wandert, und  
 27 deswegen bleibt auch sein Winkelmaß bei dieser Wanderung konstant. Dann muss  
 28 auch die Länge der Sehne  $AC$ , über der  $AXC$  Umfangswinkel ist, konstant sein,  
 29 und damit ist  $C$  Fixpunkt bei dieser Wanderung.

30 Ohne weiteres ist dieser Beweis aber nur vollständig, wenn  $k$  nicht der kürzere Bo-  
 31 gen ist,  $AXB$  also nicht stumpf ist. Dann gibt es nämlich auf dem Bogen  $j$  keine  
 32 zwei Punkte  $C$ , die von  $A$  denselben Abstand hätten. – Wenn nun aber  $k$  der kürze-  
 33 re Bogen ist, dann kann es passieren, dass es neben dem wie oben konstruierten  
 34 Schnittpunkt  $C$  einen weiteren Punkt  $C_1$  auf  $j$  gibt, der von  $A$  denselben Abstand  
 35 wie  $C$  hat (Abb. 8). Allerdings ist die Existenz dieses Bastards nicht „schädlich“;  
 36 denn sie ist nur auf folgende Weise möglich:  $C$  und  $C_1$  mögen zwar beide auf  $j$  lie-  
 37 gen, aber sie liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers durch  $A$ , der Winkel  
 38  $AXC_1$  ist also stumpf und hat jedenfalls nicht dasselbe Maß wie der Winkel  
 39  $AXC$ , der ja als halber Winkel eines anderen Winkels immer spitz ist. Der Punkt  
 40  $C_1$  kommt also nicht als auf der Winkelhalbierenden von  $AXB$  liegend in Frage.

1 Ohne DGS hätten wir uns eventuell die  
 2 mögliche Existenz eines solchen Punkts  
 3  $C_1$  nicht bewusst gemacht und hätten es  
 4 auch mit dem Durchdringen der folgen-  
 5 den Überlegungen erheblich schwerer  
 6 gehabt.

7 Eigentlich spielt die Winkelhalbieren-  
 8 den-Eigenschaft bei dem ganzen Beweis  
 9 nämlich gar keine Rolle. In der Tat gilt  
 10 auch für jeden anderen Strahl  $c$  ab  $X$  im  
 11 Inneren des Winkels  $AXB$ , dass sein  
 12 Schnittpunkt  $C$  mit  $j$  bei der Bewegung  
 13 von  $X$  Fixpunkt ist, wenn man das Maß  
 14 des Winkels  $AXC$  bei der Bewegung  
 15 von  $X$  konstant hält (Abb. 9). Es war  
 16 genau diese Eigenschaft der Winkelhalbieren-  
 17 den, die man oben gebraucht hat,  
 18 und folglich lässt sich der Beweis wörtlich  
 19 übertragen, einschließlich der Dis-  
 20 kussion der Möglichkeit eines zweiten  
 21 Punkts  $C_1$  auf  $j$  mit demselben Abstand  
 22 von  $A$  wie  $C$ .

23 Der Vollständigkeit halber stellen wir  
 24 fest, dass der Kreisbogen  $k$ , der als  
 25 Ortslinie für  $X$  als Umfangswinkel-  
 26 scheinzel bezüglich  $AB$  zur Verfügung  
 27 steht, immer in demjenigen Kreisbogen  
 28 enthalten ist, der als Ortslinie für  $X$  als  
 29 Umfangswinkelscheinzel bezüglich  $AC$   
 30 in Frage kommt. Daher ist bei der Wan-  
 31 derung von  $X$  auf  $k$  nicht nur das Maß  
 32 des Winkels  $AXB$ , sondern auch das des Winkels  $AXC$  konstant.

33 Zum Schluss noch ein Überblick über die ganze Situation (Abb. 10). Unter allen  
 34 Punkten  $X$  auf  $k$  wählen wir denjenigen aus, der genau in der Mitte von  $k$  liegt. In  
 35 dem so festgelegten Winkelfeld betrachten wir nun sämtliche Schenkel  $c$ , die von  
 36  $X$  ausgehen; wir stellen uns konkret eine Rotation des Schenkels  $c$  um  $X$  vor, be-  
 37 ginnend mit der Lage, wo er durch  $A$  geht, bis hin zu der Lage, wo er durch  $B$  geht  
 38 (unter Ausschluss dieser beiden Randlagen). Dabei erhalten wir nacheinander  
 39 sämtliche Punkte  $C$  auf  $j$  als Schnittpunkte und als Maße der Winkel  $AXC$  sämt-  
 40 liche Werte zwischen  $0^\circ$  und dem Maß von  $AXB$ . Insbesondere, wenn  $c$  den Win-  
 41 kel  $AXB$  halbiert, liegt  $C$  in der Mitte von  $j$ .

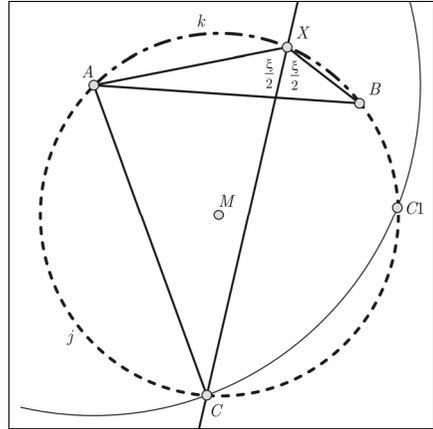


Abb. 8

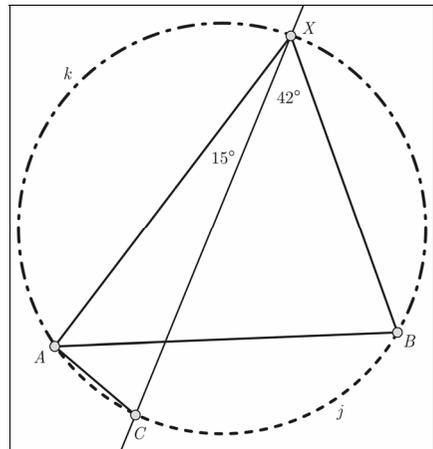


Abb. 9

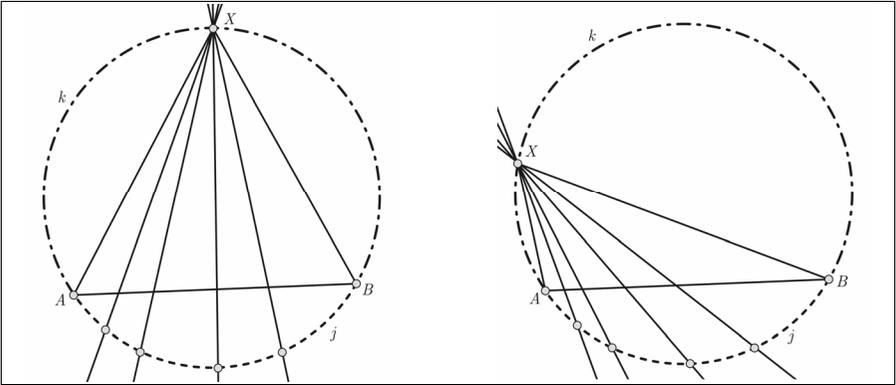


Abb. 10

1 **4 Harmonische Teilung einer Dreiecksseite**

2 Im Dreieck ABC mit den entsprechenden Seitenlängen  $a, b, c$  (o. B. d. A.  $a > b$ )  
 3 sei die Seite AB im Verhältnis der beiden Seitenlängen  $a$  und  $b$  harmonisch geteilt,  
 4 d. h.,  $P$  auf der Seite AB und  $Q$  auf der Geraden AB sind so gewählt, dass  
 5  $|BP| : |AP| = a : b = |BQ| : |AQ|$ . In einer DGS-Zeichnung (Abb. 11) haben wir  
 6 entdeckt, dass die beiden Strahlen  $CP$  und  $CQ$  orthogonal zu sein scheinen, diese  
 7 Vermutung durch DGS-Veränderungen der Zeichnung  
 8 vertieft und den Beweis dafür dann klassisch erbracht.

9 Wer sich mit Teilverhältnissen und (schließlich) mit dem Kreis des Apollonius  
 10 auskennt, wird unsere Erlungenschaft als trivial empfinden. Aber wir kannten uns eben nicht aus. Den Kreis des Apollonius hatten wir  
 11 zwar schon verschiedentlich beschrieben gesehen, jedoch hatten wir ihn nie wirklich unseren kognitiven Strukturen einverleibt; und erst die Beobachtung und der  
 12 eigenständige Beweis jener Rechtwinkligkeit hat das Thema für uns bedeutsam gemacht.

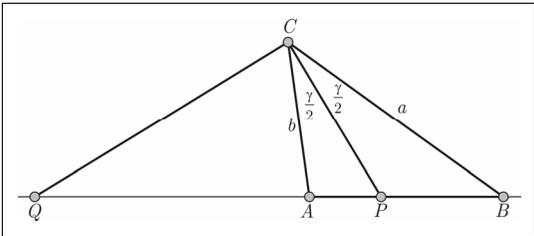


Abb. 11: Strecke AB harmonisch geteilt mit  $a:b$

13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20

21 Ausgangspunkt des Beweises ist der (bekannte) Sachverhalt: Die Winkelhalbierende  $w_i$  von  $\gamma$  teilt die Seite  $c$  im Verhältnis  $a : b$ ; sie geht also durch  $P$ . Die Gerade  $w_a$ , die jeden der beiden Außenwinkel in  $C$  halbiert, steht senkrecht auf  $w_i$  (da die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel orthogonal sind). Man muss also nur  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26 noch zeigen, dass  $w_a$  durch  $Q$  geht. Dafür geht man ähnlich vor wie beim Nachweis, dass  $P$  auf  $w_i$  liegt:

1 Man zeichnet die beiden Paral-  
 2 lelen zu  $w_i$  durch  $A$  sowie  
 3 durch  $B$  und erhält die beiden  
 4 Schnittpunkte  $D$  und  $E$  mit  $w_a$ .  
 5 Dann verlängert man die Seite  
 6  $AC$ , bis sie die Gerade  $BE$   
 7 schneidet, und nennt den  
 8 Schnittpunkt  $F$ . Wegen der  
 9 Voraussetzung  $a > b$  ist  $\alpha > \beta$ ,  
 10 und in den beiden Dreiecken  
 11  $APC$  und  $BPC$  gilt für die  
 12 Winkel  $\angle APC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha$   
 13  $< 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = \angle BPC$ , d. h.,  
 14  $APC$  ist spitz, und  $BPC$  ist  
 15 stumpf, so dass  $w_a$  den Strahl  $AQ$  schneidet (Abb. 12). Wir nennen diesen Schnitt-  
 16 punkt  $S$  und zeigen nun  $S = Q$ .

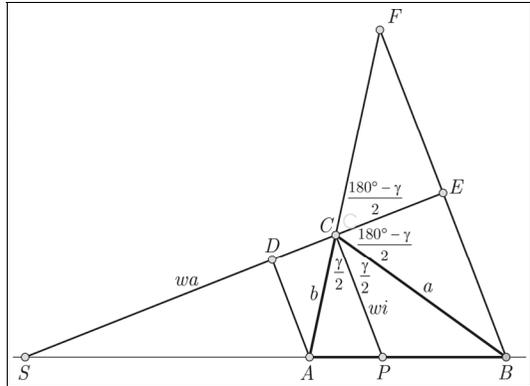


Abb. 12

17 Im Dreieck  $BCF$  steht die Winkelhalbierende  $w_a$  des Winkels in  $C$  senkrecht auf  
 18  $BF$ . Deshalb ist das Dreieck gleichschenkelig, d. h.  $|CF| = a$  und  $|BE| = |EF|$ .  
 19 Nach dem 2. Strahlensatz mit  $C$  als Scheitel gilt also  $a : b = |BE| : |AD|$ . Nun folgt  
 20 nach dem 2. Strahlensatz mit  $S$  als Scheitel  $|SB| : |SA| = |BE| : |AD| = a : b$ . Also ist  
 21  $S = Q$ .

22 Der Vollständigkeit halber sei noch der Kreis des Apollonius in die ganze Situation  
 23 eingebracht (den wir jedoch nicht selbstständig entdeckt haben): Die Strecke  $AB$   
 24 sei harmonisch im Verhältnis  $r : 1$  geteilt (o. B. d. A.  $r > 1$ ), seien  $P$  der innere  
 25 und  $Q$  der äußere Teilungspunkt und  $k$  der Thales-Kreis über  $PQ$ . Dann ist  $k$  die  
 26 Ortslinie aller Punkte  $C$  der Ebene, für die  $|BC| : |AC| = r : 1$  ist (Apollonius-  
 27 Kreis für die Strecke  $AB$  und für das Teil-  
 28 verhältnis  $r : 1$ ) (Abb. 13). Für  $C = Q$  und  
 29  $C = P$  auf  $k$  trifft das Verhältnis jedenfalls  
 30 zu. Sei ab jetzt  $P \neq C \neq Q$ .

31 Ist  $C$  ein Punkt der Ebene, für den  
 32  $|BC| : |AC| = r : 1$  ist, dann liefert die Ge-  
 33 rade  $CP$  die Winkelhalbierende des Innen-  
 34 winkels  $\gamma$  im Dreieck  $ABC$ , und die Gerade  
 35  $CQ$  liefert die Winkelhalbierende der Au-  
 36 ßenwinkel zu  $\gamma$ . Diese beiden Geraden sind  
 37 also orthogonal, und ihr Schnittpunkt  $C$   
 38 liegt auf dem Thales-Kreis über  $PQ$ , also  
 39 auf dem Apollonius-Kreis für die Strecke  
 40  $AB$  und für das Teilverhältnis  $r : 1$ .

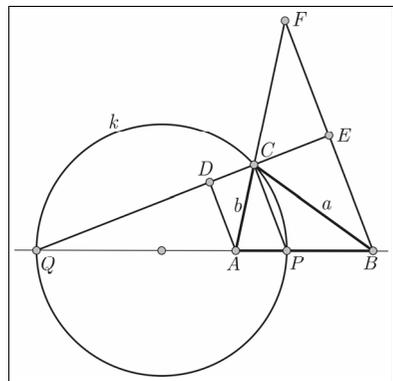


Abb. 13:

Strecke  $AB$  harmonisch geteilt mit  $r : 1$

1 Liegt  $C$  auf dem Thales-Kreis von  $PQ$ , dann erzeugen wir (Abb. 13) noch einmal  
2 die Zeichnung aus Abb. 12 und wenden folgendes Paradigma geometrischen Be-  
3 weisens an: Die Eigenschaften, die wir oben vorausgesetzt haben, werden jetzt ab-  
4 geleitet, – und umgekehrt, und zwar in ein und derselben geometrischen Situation.  
5 Wir zeichnen die Parallelen zu  $CP$  durch  $A$  sowie durch  $B$  und erhalten als  
6 Schnittpunkte mit der Geraden  $QC$  die Punkte  $D$  und  $E$ . Wir schneiden die Gerade  
7  $BE$  mit der Geraden  $AC$  und erhalten den Schnittpunkt  $F$ . Nach dem 2. Strahlen-  
8 satz mit  $Q$  als Scheitel gilt  $|BE|:|AD|=r:1$ , nach dem 1. Strahlensatz mit  $Q$  als  
9 Scheitel gilt  $|CE|:|DC|=r:1$ , und nach dem 2. Strahlensatz mit  $C$  als Scheitel  
10 gilt  $|EF|:|AD|=r:1$ . Also ist  $|EF|=|BE|$ , das Dreieck  $BCF$  (in dem  $CE$  senk-  
11 recht auf  $BF$  steht) ist gleichschenkelig, und die Gerade  $QE$  liefert dort die Winkel-  
12 halbierende in  $C$ , d. h., sie halbiert den Außenwinkel von  $\gamma$ , damit halbiert der  
13 Strahl  $CP$  den Innenwinkel  $\gamma$  im Dreieck  $ABC$ , und für die Seiten  $a$  und  $b$  gilt  
14  $a:b=r:1$ .

## 15 Literatur

- 16 Bender, Peter [1989]: Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht — unter besonde-  
17 rer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. Hauptvortrag  
18 auf dem 7. Workshop in Klagenfurt 1987. In: Kautschitsch, Hermann & Metzler,  
19 Wolfgang (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky &  
20 Stuttgart: Teubner, 95–145.
- 21 Bender, Peter [2005]: Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Erstsemester-Vorle-  
22 sung — ein Werkstatt-Bericht über ein Entwicklungs- und ein Forschungs-Projekt.  
23 Erscheint in: Henn, Hans-Wolfgang & Kaiser, Gabriele (Hrsg.): Festschrift für Wer-  
24 ner Blum. Hildesheim: Franzbecker.
- 25 Schumann, Heinz [2004]: Dynamische Raumgeometrie I. In: *Beiträge zum Computereinsatz*  
26 *in der Schule* 18, Heft 2. ISSN 0932-2736.
- 27 Schupp, Hans [1971]: Geometrie in der Sekundarstufe I. Weinheim: Beltz.
- 28 Schupp, Hans [1988]: Kegelschnitte. Mannheim u. a.: BI Wissenschaftsverlag.
- 29 Schupp, Hans [1990]: PRO GEO: Ein Programmpaket für den Geometrieunterricht. In:  
30 Graf, Klaus-Dieter (Hrsg.): Computer in der Schule 3. Stuttgart: Teubner, 25–44.
- 31 Schupp, Hans [1997]: Regeometrisierung der Schulgeometrie — durch Computer? In:  
32 Hischer, Horst (Hrsg.): Computer und Geometrie — Neue Chancen für den Geome-  
33 trieunterricht? Bericht über die 14. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikun-  
34 terricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 1996. Hil-  
35 desheim: Franzbecker, 16–25.

36

## 37 Anschrift des Verfassers

38 Prof. Dr. Peter Bender  
39 Universität Paderborn  
40 Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
41 Warburger Str. 100  
42 33098 Paderborn  
43 E-Mail: bender@upb.de