Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Erstsemester-Vorlesung – ein Werkstatt-Bericht über ein Entwicklungs- und ein Forschungs-Projekt

Peter Bender
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn
Email: bender@upb.de

Zunächst werden einige, vor allem erkenntnistheoretische Merkmale von DGS erörtert und das Entwicklungs-Projekt der Erstsemester-Geometrie mit DGS in Paderborn vorgestellt. Danach wird die Methode des Forschungs-Projekts zur Wirkung der DGS kurz beschrieben und an zwei Episoden exemplifiziert. Schließlich wird als Forschungs-Desiderat die stärkere Berücksichtigung der Lehrperson, des mathematischen Stoffs und überhaupt langfristiger Einflüsse herausgeschält.

1 Einige Merkmale von Dynamische-Geometrie-Software (DGS)

Auch in der Form von DGS ist der Computer *Medium*, wie es Papier und Bleistift schon immer waren, *Werkzeug* bzw. wie die Computer-Leute sich gerne euphemistisch ausdrücken: *Denkzeug*, indem er das Geometrie-Treiben unterstützt, weniger *Tutor*, weil sich Aufgaben-Stellungen und Lern-Prozesse doch kaum von selbst ergeben, aber *Schnell-, Viel-, Genau-, Sauber- und Bunt-* (d.h. grafisch anspruchsvoller) *Zeichner und -Rechner* (mit unvermeidlichen Einschränkungen bei „genau" und „sauber") und nicht zuletzt *Speicher* mit der Besonderheit, dass man die gespeicherten Elaborate im Prinzip jederzeit weiter verarbeiten kann.

Die auf dem Bildschirm dargestellten Situationen sind natürlich so wenig mit den eigentlichen idealen geometrischen Begriffen identisch wie auch früher schon die Zeichnungen auf Papier: Handelte es sich dort um Grafit-Würste, haben wir jetzt aus kleinen Quadraten zusammengesetzte Treppen-Figuren. Durch Zusammenkneifen der Augen kann man zwar den abgehackten Eindruck verwischen, aber, und das ist Teil der Computer-Literalität, man weiß ja, dass jeder optische Eindruck am Bildschirm mit im Prinzip quadratischen Pixeln erzeugt wird. Oder: Bei der Bildschirm-Geometrie werden die Punkte mit Absicht dick gezeichnet und, unabhängig von dieser dicken Zeichnung, wird ein Punkt vom Programm als ein Fleck von einer gewissen Ausdehnung aufgefasst, damit gegebenenfalls sich drei Geraden diskret-algebraisch und visuell wirklich in ihm schneiden und damit man ihn beim Ziehen mit der Maus auch trifft.

Hier liegt einer der entscheidenden Gründe, warum Kinder die Zeichenblatt-Geometrie primär durch eigenhändiges Zeichnen und nicht am Bildschirm erfahren sollen. Wohl handelt es sich beides Mal um notwendig unvollkommene Realisate der eigentlichen, idealen geometrischen Begriffe, aber beim eigenhändigen Zeichnen werden eben die Geradheit der Geraden (dem Lineal entlang fahrend), die Kreisförmigkeit des Kreises (mit dem Zirkel) oder die Ausdehnungslosigkeit des Punktes (mit der Bleistift-Spitze) trotz ihrer Unvollkommenheit direkt erfahren, während diese Figuren am Bildschirm das Ergebnis von algebraischen Berechnungen im Hintergrund und jedenfalls nicht von eigenhändigen Aktionen sind.

Also: auch in der DGS ist der Computer nur ein Medium für etwas Anderes, nämlich für den Himmel der geometrischen Ideen; aber mir ist sonst kein Einsatz des Computers in didaktischen Situationen bekannt, wo die computer-generierten Objekte und Aktionen kognitiv so nahe an dem sind, wofür sie stehen, nämlich der fachlichen Begrifflichkeit. Eine wichtige Aufgabe der Lehrenden hierbei ist dann, der naiven, vordergründigen Identifizierung des Geschehens am Bildschirm mit den dahinter stehenden idealen Begriffen entgegenzuwirkenAm ehesten findet man diese Nähe des Computer-Geschehens zu den Fach-Begriffen wohl noch bei den Naturwissenschaften, besonders in der Physik z.B. bei der Simulation realer Prozesse. Allerdings besteht dort ein gewaltiger erkenntnistheoretischer Bruch zwischen den objektiven Natur-Vorgängen als solchen und deren Programmierung für den Computer durch ein menschliches Subjekt. Dieser Bruch besteht bei der Geometrie so nicht, es sei denn, man fasst sie als Naturwissenschaft auf. Es gibt durchaus Menschen, auch im Bildungs-Bereich, für die die Geometrie ein Teil der Physik (kraftfreie Mechanik) ist, und im Schul-Unterricht hat man es damit vordergründig gewiss leichter.

Aber, jedenfalls in der herrschenden Meinung der Didaktik, ist die Geometrie, wie die Mathematik insgesamt, eine Geisteswissenschaft, also ein Teil der Filosofie, zwar in ihrem Entstehen und in ihren Anwendungen stark von der Beschäftigung mit der Natur befördert und beeinflusst; aber sie hat sich, schon bei den alten (Griechinnen und) Griechen unabhängig davon gemacht. Auch die Rolle als Darstellende Geometrie ist nur sekundär, sozusagen ein Zubrot (das jedoch durchaus zeitweise im Vordergrund stehen kann). Da gibt es vorzügliche (allerdings aufwändige und teure) CAD-Software für Architektur, Maschinenbau usw. Dagegen sind die DGS dezidiert zum Treiben, Lehren und Lernen von (zunächst) geisteswissenschaftlicher Geometrie geschrieben (und sind viel primitiver). Diesen geisteswissenschaftlichen Wesenszug der Geometrie (einer von mehreren) den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, ist eine der Aufgaben des Geometrie-Unterrichts (die in der Schule gewiss schwieriger als an der Universität, aber auch dort, wie die Erfahrungen zeigen, nicht einfach ist).

Das ausschlaggebende Merkmal einer DGS, ist die Beweg- und Verformbarkeit der Figuren auf dem Bildschirm, womit ein jahrhunderte-alter Traum von Geometrie Treibenden, Unterrichtenden und Lernenden in Erfüllung gegangen ist. Natürlich bewegen sich da keine Pixel; es werden lediglich entsprechend den Maus-Bewegungen in rascher Folge Bilder erzeugt, die sich jeweils leicht von ihren Vorgängern unterscheiden, und dadurch wird der optische Eindruck einer i. W. kontinuierlichen Veränderung hervorgerufen. So werden auch Assoziationen von Dynamik und Lebendigkeit gefördert (obwohl die Verformung der Figuren ja i.a. realitätswidrig ist), und es wird immer wieder logische Evidenz suggeriert, wodurch die didaktische Aufgabe durchaus anspruchsvoller wird. Außerdem werden die zarten Versuche, zumindest in der Didaktik, die Raum-Geometrie und in Verbindung damit den Anwendungs-, allgemeiner: Lebenswelt-Bezug im Geometrie-Unterricht, zu fördern, direkt zunichte gemacht. Es gibt zwar auch raum-geometrische Software, aber aus vielen Gründen führt sie in der Schule ein Schatten-Dasein, während die ebene DGS durchaus bekannt ist. Allerdings ist auch sie nicht allzu weit verbreitet, weil

- Bedeutung und Umfang des Geometrie-Unterrichts nach wie vor ungenügend sind,
- viele Lehrerinnen und Lehrer nicht gut genug mit DGS vertraut sind, um sie im eigenen Unterricht einzusetzen,
- vielleicht auch didaktische Vorbehalte haben,
- die sächliche und räumliche Ausstattung an den meisten Schulen unzulänglich ist.

2 Die Erstsemester-Vorlesung und -Übung in Elementar-Geometrie mit DGS in Paderborn

Diese Hinderungs-Gründe sind bei uns in der Fachgruppe 'Mathematik-Didaktik' in Paderborn alle nicht gegeben, und so hat Kollege Rinkens 1998 die Initiative ergriffen und unsere Erstsemester-Fach-Vorlesung und -Übung in Geometrie auf die Arbeit mit der DGS umgestellt, zunächst mit *Cabri Geometre*, und, wegen der damals unter allen DGS alleinigen Internet-Tauglichkeit, ab WS 01/02 mit *Cinderella*. Zwar gibt es an einigen Hochschulen in Deutschland Geometrie*didaktik*-Veranstaltungen mit umfangreicher DGS-Verwendung, aber ein so konsequenter Aufbau der Fach-Vorlesung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen sowie Gesamtschulen mit den entsprechenden Jahrgangs-Stufen (GHRG; wie es seit 2003 in NRW existiert) mit einer DGS ist mir sonst nicht bekannt.

'Konsequent' heißt *erstens:* Auch die Studierenden haben die Software zur Verfügung, machen ihre Haus-Aufgaben mit dem eigenen Computer (etwa ein Drittel der Aufgaben auch computer-los) und versammeln sich wöchentlich zur Übung im Computer-Raum, wo sie im Kreis sitzen, die Bildschirme abgesenkt sind, so dass die Studierenden sich gegenseitig sehen und miteinander kommunizieren können, und mit einem sog. pädagogischen Netzwerk der Bildschirm-Inhalt von jedem Rechner auf jeden anderen geholt werden kann (ein Poolraum-Konzept, das auf den Informatik-Kollegen Keil-Slawik in Paderborn zurückgeht).

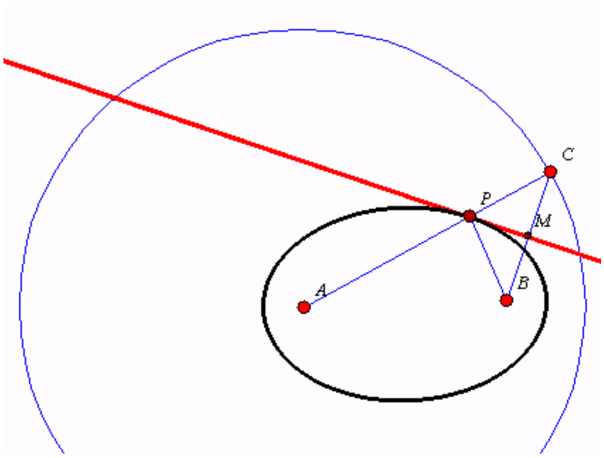


Abb. 1: Gärtner-Konstruktion der Ellipse mit DGS (ausgeführt von Rinkens)

'Konsequent' heißt *zweitens*: Aus dem 'klassischen' Geometrie-Curriculum Inhalte auswählen, die sich für die Arbeit mit der DGS gut eignen; darauf achten, dass nicht *so* viele fundamentale Themen ausgelassen werden, so dass dann kein schlüssiger Gesamt-Aufbau mehr vorhanden wäre, und mit Stoff anreichern, der zwar vielleicht weniger zentral ist, aber gut zu DGS passt, z.B. die Kegelschnitte (vgl. Abb. 1).

Dies alles muss in eine Vorlesung gegossen werden, und sehr viele Zeichnungen müssen aufwändig neu erstellt werden. Und natürlich finden trotzdem noch viele Erläuterungen und streckenweise sogar wesentliche Teile der Vorlesung klassisch mit Hilfe der Wandtafel und Kreide statt.

'Konsequent' hieß bei Rinkens *drittens* (von mir später wieder abgeschafft): Das Ganze wird internet-fähig gemacht; der Text in HTML geschrieben und die (ja beweglichen) Zeichnungen als Java-Applets eingebunden.

Abgesehen davon, dass die Arbeit mit dem Internet irgendwie *stilgerechter* ist und man sich im Zuge der allgemeinen Euphorie über internet-gestütztes Lernen, zumal bei der E-Learning-Gemeinde, damit hervortun kann, hatten folgende Gründe für den Einsatz gesprochen: a) Es sollte überhaupt einmal *ausprobiert* werden. b) Man kann problemlos *fremde Seiten* in die Vorlesung einbeziehen, und es war c) daran gedacht, dass auch die *Studierenden ihre Laptops in die Vorlesung* mitbringen, jeweils die aktuelle Seite aufrufen, dann eigenständig mit den DGS-Zeichnungen operieren, Vermutungen äußern bzw. die Ausführungen des Dozenten überprüfen und so intensiver mitarbeiten. Nicht zuletzt war dies d) in Ermangelung einer Campus-Lizenz *der* Weg, den Studierenden die Arbeit mit der DGS zu ermöglichen.

Für mich waren die ersten drei Gründe weniger wert: Es ist arg aufwändig, passende Internet-Seiten zu suchen, und die paar Zeichnungen, die Rinkens von außen eingebaut hatte, haben mir gar nicht so gut in den Kram gepasst. Ich habe sie durch selbst angefertigte ersetzt und mich dabei intensiver mit dem jeweiligen Stoff befasst, was durchaus nützlich war. Insgesamt halte ich das Ideal einer Internet-Vorlesung, die von vielen Lehrenden in unterschiedlichen Hochschulen erfolgreich übernommen wird, jedenfalls in Mathematik, für eine Schimäre. Wie bei den Lernenden ist auch bei den Lehrenden eine gründliche eigenständige Auseinandersetzung mit dem Stoff, bis hin zur selbstständigen Entwicklung, unabdingbar.

Die studentische Mitarbeit in der Vorlesung auf der Basis eigener Laptop-Aktivitäten hat nicht funktioniert, und das ist eigentlich kein Wunder. Dazu ist in der Vorlesung einfach nicht genug Zeit. Dort sind simple Fragen möglich, die die Studierenden zum Mitdenken animieren und den Monolog auflockern, aber keine wirklich selbstständige Erforschung einer geometrischen Situation durch sie. Dazu sind andere Arbeits-Formen nötig, bei uns eben die Haus-Aufgaben in Kleingruppen zu 2–3 Leuten. Schon in den Übungs-Sitzungen haben die Studierenden nicht genügend Muße und zu viel Stress, als dass sie unvorbereitete Aufgaben mit gewissem Niveau unangeleitet bewältigen könnten. Das geht mir doch selbst so! – Außerdem konnten die Internet-Zeichnungen zwar ziehend bewegt werden, aber sonst konnten keine Manipulationen vorgenommen, z.B. Elemente wesentlich verändert, hinzugefügt, entfernt oder hervorgehoben werden u.v.a.m.

Wegen zahlreicher technischer Probleme (nicht zuletzt mit dem drahtlosen Funknetz der Universität u.a.) und des hohen Zeit-Aufwands für Pflege und Weiter-Entwicklung wäre ich die Internet-Bindung gerne los geworden, und ich hätte gerne den Vorlesungs-Text und die Zeichnungen (natürlich mit der DGS) als selbstständige Dateien zum umfassenden Bearbeiten auf CDs gebrannt und an die Studierenden verteilt (sowie außerdem durchaus ins Internet gestellt). Leider gab es für Cinderella, die vom Klett-Verlag vertrieben wird, nicht so etwas wie eine Campus-Lizenz, und Raubkopien haben wir in unserer Fakultät offiziell abgeschafft. Da kam mir der Zufall zu Hilfe, dass sie ab Oktober 2003 in der von uns verwendeten Version kostenlos wurde. Nun konnte ich meine inhaltlichen und technischen Vorstellungen genau und ohne fremde Hilfe (außer für das Brennen der 130 CDs) realisieren.

Im WS 04/05 wurde die Veranstaltung erneut von mir durchgeführt, und man kann kaum noch von einem Projekt sprechen, sondern die Geometrie-Fach-Vorlesung und -Übung mit DGS für das Lehramt GHRG ist inzwischen etabliert, auch wenn beim nächsten Mal ein anderer Kollege sie vielleicht wieder auf ganz konventionelle Art abhält. Ein guter Grund für einen solchen Rückzug kann in den beschränkten Kapazitäten gesehen werden: Von 1998 bis 2003 hat sich die Zahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer auf etwa 120 verfünffacht. Durch Ausbeutung der Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter und der eigenen Person konnte die Zahl der Übungs-Gruppen auf vier erhöht werden. Aber im Computer-Raum befinden sich außer Dozenten-Computer und -Stuhl nur weitere 10 Computer und 20 Stühle, womit er eigentlich schon überfüllt ist. Und so mussten im WS 03/04 von den 30 Studierenden einer Gruppe immer 10 stehen. Häufig waren außerdem bis zu 3 Geräte defekt. SHK- und Sachmittel werden seit Jahren kontinuierlich gekürzt, so dass in Zukunft solche Defekte seltener behoben und weniger Haus-Aufgaben nachgesehen werden können, usw.

Nun möchte ich ein erstes Fazit (z.T. im Vorgriff auf die nächsten Abschnitte) ziehen. Dieses ist nicht neu, hat aber gerade hier einmal wieder seine Bestätigung erfahren.

a. Bei vielen empirischen Untersuchungen zur Wirkung von irgendwelchen Maßnahmen auf Lehr-Lern-Prozesse, gerade auch im Zusammenhang mit Neuen Medien, werden volens nolens viele Variablen unzulässigerweise außer Acht gelassen, obwohl sie einen erheblichen Einfluss haben, besonders gern die Lehrperson. Obgleich Herr Rinkens und ich uns als Lehrende auf sehr vielen Ebenen sehr ähnlich sind, erst recht von außen gesehen, und in dieser Veranstaltung fast Dasselbe gemacht haben, haben sich bei genauer Analyse große Unterschiede gezeigt.

b. Für solche Analysen ist eine ausgeprägte didaktische und fachliche Expertise Voraussetzung, und diese fehlt oft.

c. Zwar lassen sich die Erfahrungen mit unseren Studierenden nicht ohne Abstriche auf die Sekundarstufe I übertragen, aber ich kann für diese angesichts der derzeit üblichen Bedingungen empfehlen, in jedem Schuljahr ein paar Wochen der Geometrie zu widmen und davon jeweils einen gewissen zusammenhängenden Teil (vielleicht 3–4 Wochen) der Arbeit mit DGS, wo man dann wöchentlich vielleicht ca. viermal den Computer-Raum benutzt und in dieser Zeit in diesem Denken drin ist.

d. Bei der Installation von Soft- und Hardware sollte man möglichst primitive und narrensichere Systeme verwenden, so dass man auf Dauer auf Fremd-Personal verzichten kann. (Dies ist z.B. ein Teil des Konzepts der Lernstatt Paderborn.)

3 Zur Wirkung der DGS auf das Geometrie-Lernen

Zu diesem *Entwicklungs*-Projekt (Geometrie mit DGS) wurde ein *Forschungs*-Projekt vom Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes NW im Rahmen des Innovations-Programms „Wirksamkeitsforschung – Neue Medien in der Hochschullehre“ des Kompetenznetzwerks „Universitätsverbund Multimedia“ und auch von unserer Hochschule finanziert (s. Maczey 2002, Bender & Maczey 2004), i.W. für eine Wissenschaftliche Mitarbeiterin und für 20 Laptops zum Ausleihen an Studierende. Die Laptops waren, wie gesagt, zur Benutzung während der Vorlesung gedacht und, unabhängig davon, für solche Leute, die keinen Rechner besitzen. Beide Motive sind inzwischen obsolet, das zweite, weil seit 2001 der prozentuale Anteil der Computer-Besitzerinnen und -Besitzer erheblich gestiegen ist. Die Anzahl intakter Geräte sowie die Leistungsfähigkeit relativ zum jeweils aktuellen Standard haben sich natürlich verringert, aber ein paar notleidende Studierende können wir durchaus noch ausstatten.

Unser Forschungs-Interesse galt und gilt hauptsächlich der geometrie-didaktischen Seite. So haben wir unser Projekt unter drei große Fragestellungen eingeordnet:

(i) Wie wird der Medien-Einsatz an sich auf der intellektuellen, emotionalen und sozialen Ebene wahrgenommen?
(ii) Wie verändert sich das Lernen von Geometrie in einer multimedialen Umgebung?
(iii) Wie verändern sich die Auswahl der Inhalte und die geometrischen Begriffe selbst? (Mit dieser letzten Frage ist die Lehrenden-Seite angesprochen, und sie wird mehr langfristig verfolgt.)

Dazu entwickelten wir einen Fragebogen und führten auf dessen Grundlage in den WS 01/02 und 02/03 Interviews mit zahlreichen Studierenden durch. Zwar handelt es sich bei unserer Klientel nicht um Mittelstufen-Schülerinnen und -Schüler, und insbesondere liegt bei ihnen kein Erst-Lernen vor; aber das Lehr-Lern-Niveau ist (unter Beachtung der besonderen Umstände an der Hochschule) durchaus dem in einer gymnasialen Klasse vergleichbar, nicht zuletzt weil vom schulischen Geometrie-Unterricht i.a. wenig Substanz übrig geblieben ist. – Unabhängig davon hatten wir uns von den Studierenden (aufgrund ihrer Lebens-Erfahrung und ihrer beruflichen Interessen) eine höhere Belastbarkeit bei den Interviews, einen weiteren Horizont für unsere Fragestellungen und substanziellere Aussagen zu den eigenen Denk-Prozessen versprochen (und wurden in dieser Erwartung letztlich bestätigt).

Offensichtlich kommen quantitative Methoden (inklusive der Abschluss-Klausur) für unser Vorhaben nicht in Frage. Wir gingen vielmehr qualitativ vor. Die Interviews führten wir aus Ökonomie- und Anregungs-Gründen immer mit zwei Personen; die Interviewerinnen und Interviewer mussten sich nicht sklavisch an den Frage-Bogen halten. Die Interviews wurden video-grafiert, stückweise transkribiert und punktuell interpretierend ausgewertet.

In dieser Form der Gesprächs-Führung und anschließend in der Interpretation liegt die Annahme der „Existenz von allgemein geteilten Regeln sozialen Handelns, die mit einem eigenständigen Geltungs-Anspruch versehen sind, und einer darauf fußenden objektiven latenten Sinn-Struktur der Interaktion“ zwischen Interviewenden und Interviewten im Sinne Oevermanns (1986, 22ff). Der objektive Charakter wird dadurch verstärkt, dass es um einen engen, stark rationalisierten Bereich geht, nämlich um das Lernen von Geometrie und um die Elementar-Geometrie bezogen auf die Vorlesung, und dass die Beteiligten bewusst darüber sprechen. Möglicherweise würden der Soziologe Oevermann und die reinen Interpretierinnen und Interpretierer diese didaktische Wendung nicht mitmachen. Aber eigentlich ist nicht einzusehen, dass man sich trotz Kenntnis von ersichtlich relevanten nicht-soziologischen Strukturen auf die soziologischen beschränkt. – Allgemein stützten wir uns auf die Prinzipien der sog. Grounded Theory (s. Strauss & Corbin 1996) und konnten so von Seiten der Forschung legitimieren, was im Zuge des Ausbildungs-Auftrags geleistet werden muss, nämlich die Weiter-Entwicklung der Lehre von Semester zu Semester, wodurch ja die Forschungs-Bedingungen spürbar geändert werden.

Hier ein Beispiel einer, zugegeben, etwas spekulativen Interpretation einer *Episode*: Kommilitone A gehört zu den eifrigen Studierenden, und er fällt immer wieder durch förderliche unkonventionelle Wort-Beiträge auf. Am Ende hat er auch die beste Klausur geschrieben.

In der Episode geht es einleitend um die Frage, inwiefern Cinderella das Lernen von Geometrie unterstützen kann. – Für mich macht das *Herstellen von geometrischen Zusammenhängen*, kulminierend in der Tätigkeit des *Beweisens*, einen bedeutenden Wesenszug des Geometrie-Treibens und damit des Geometrie-Lernens aus, und ich habe diesen Wesenszug in der Veranstaltung intensiv gepflegt.

> „... Vorteile, mit Sicherheit **Anschaulichkeit**/ . ist absolut äh ... *(schnalzt mit der Zunge)* **verbessert** .. ich denke ma dass es . gerade mit Cinderella **ein**facher ist, so **Allgemein**sätze sich mal ranzupacken also nicht . immer die **Einzel**fälle/ sondern du kannst halt eben, wenn du jetzt zum Beispiel den, den Thaleskreis hast, oder was, und willst da gucken wie ist, wie ist das mit den rechten **Winkeln**\ *(zeigt mit den Händen ein Dach)*
>
> Wenn du halt ne normale **Skizze** machst, dann haste nur, in diesem Thaleskreis, halt eben nur **ein** rechtwinkliges Dreieck\ Mit Cinderella ziehste eben an dem Punkt auf dem Kreis *(zieht in der Luft einen Halbkreis entlang)* und siehst **Oh**, die sind ja **alle** rechtwinklig\“

Im Fortgang der Episode stimmt er später seiner Interview-Genossin zu, dass Cinderella aber dazu verleitet, *nicht mehr nach dem Warum der Sätze* zu fragen:

> „Ja ich denke auch, das verleitet halt irgendwie dazu . zu sagen . das **ist** einfach so\ Nicht mehr **warum** ist das so, sondern das **sieht** man doch . **is** ja so\
>
> Das ist halt eben so das, das Cinderella . einem so *(lächelnd:)* **erleichtert** . diesen Schritt zu sagen\ pft *(tut so, als würde er etwas über seine Schulter werfen)*“

In der nächsten Szene spricht der Interviewer A noch einmal auf sein Thalessatz-Beispiel an und fragt, ob für ihn das Ziehen mit Cinderella schon einen Beweis darstellt oder ob er noch etwas hinzufügen müsse:

> „Dem, müsste ich noch etwas hinzu, hinzufügen\ . Das wär ja einfach nur man **sieht** es ja\ *(zeichnet kleinen Halbkreis in die Luft)* das ist aber noch kein **Beweis**\“
>
> „Wieso **nich**/“ *(4 sec)*
>
> *(A grinst)* „Kann ich dir nicht beantworten.“
>
> „Ne, ich, oder, was **denkst** du wieso das, wieso is das für dich noch kein Beweis\ .. oder was müsstest du jetzt noch hinzufügen in diesem konkreten Beispiel“ *(2 sec)*

„Ne klare Argumentationskette\ *(grinst leicht) (4 sec, wibbelt mit dem Stuhl und nickt dabei nachdenklich)* Praktisch erst mal ne . ich muss ja erst mal irgendwie ‘n **Satz** haben, den ich überhaupt beweisen **will**, *(schnell:)* ja gut das wär vielleicht der Thalessatz, ne/ *(lächelt)* logischerweise ne/ *(lacht) (lehnt sich vor, verändert die Sitzposition zu einer aufrechteren)* Und dann ähm muss man halt so anfangen mit äh . Voraussetzung, Behauptung . und dann- *(schlägt mit der Handkante auf den Tisch)* . logisch\ schließen\ Weil du kannst halt eben nicht sagen, es **is’** so\ . **sieht** man doch\ dat reicht nich\“

Das klingt ja alles recht zufriedenstellend, – wenn nur der Interviewer jetzt nicht noch nach dem *Wert* eines Beweises gefragt hätte:

„angenommen du hast jetzt so’n, das bewiesen auch, mit Voraussetzung und Behauptung/ . Welchen **Wert** hat jetzt dieser Beweis, den du jetzt noch aufgeschrieben hast\ . für dich\“.

(bestimmt:) „Für **mich überhaupt** keinen\“

„Hat **gar** kein Wert\“

(bestimmt:) „Ne\ *(schüttelt den Kopf)*“

„Also für **dich** wär’s genauso auch, sag ich mal wenn du jetzt in Cinderella das anguckst . dann siehste dat is für jeden, für jedes Dreieck ist das im Thaleskreis so-“

(bestimmt:) „Ja\“ *(beide nicken)*

„Und dann ist das für dich bewiesen\“

„Also ja, im Prinzip ist das für mich der **Satz**\ Der Satz **gilt** damit für mich\ wenn ich sehe es gilt *(zeichnet in der Luft einen Halbkreis)* wenn ich sehe es **gilt** für alle- Dann äh wäre **ich** prinzipiell schon mal zufrieden\ *(lächelt leicht)*“

Jetzt sind *wir* auf einmal nicht mehr so zufrieden. Offenbar hat A einen recht logistischen Beweis-Begriff: es muss eine Deduktion erfolgen. Aber nicht die gelungene Deduktion überzeugt ihn von der Gültigkeit eines Satzes, sondern wenn er sieht, dass dieser für alle Konstellationen gilt (er nennt dies eingangs „*Allgemein*satz“). Vielleicht zieht er das formale Deduzieren nur formell in Betracht, weil er gelernt hat, dass man dies ‘in der Mathematik so’ macht, und der Interviewer ihn durch sein Nachfragen noch einmal darauf gestoßen hat. *Ich* möchte ihm gerne unterstellen, dass ihm unterschwellig nicht ganz wohl ist; denn er schwächt seine apodiktische Aussage ab durch Zusätze wie „im Prinzip (ist das für mich der Satz)“ und „wäre ich prinzipiell“ – „schon mal“ – „zufrieden“. Sozusagen: „Ich könnte im Geometrie-Treiben fortschreiten und dabei gegebenenfalls den Thales-Satz als wahren Satz benutzen, aber eigentlich weiß ich, dass ich noch etwas daran tun müsste“. (Allerdings passt diese Abschwächung auch zu der Interpretation des formalen Deduzierens quasi als formelle Beschwichtigung im Zuge der Nachfrage des Interviewers.) – Ein wenig würde ich A auch einen leicht widerspenstigen Geist gegenüber der autoritär gesehenen Mathematik zutrauen. Dahinter stecken möglicherweise gewisse Schul-Erfahrungen, wo vielleicht von den Schülerinnen und Schülern der Zwang zu unmotivierten und unverstandenen Beweisen als negative Disziplinierung empfunden wurde.

Die Mathematik-Didaktik ist da eigentlich ein Stück weiter als die verbreitete Schul-Praxis und sieht die Rolle des Beweisens, wie gesagt, im Herstellen von Zusammenhängen und deren Plausibel-Machen (durchaus auch in einer positiven Gedanken-Disziplinierung). Der Beweis soll also in erster Linie klären, *warum* ein Satz gilt und bestenfalls in zweiter Linie, *dass* er gilt. Gerade in der Geometrie besteht nämlich bei den meisten Sätzen gar kein Anlass, an ihrer Gültigkeit zu zweifeln, weil sie offensichtlich zutreffen, im Schulbuch stehen und schon die Lehrperson von ihnen überzeugt ist.

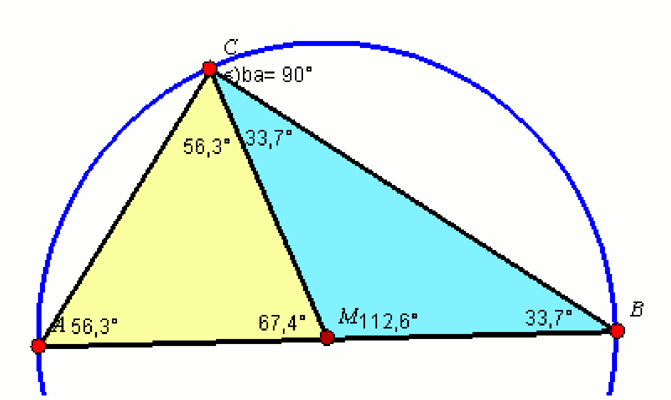


Abb. 2: Beweis-Figur für den Thales-Halbkreis

Dass der Thales-Satz gilt, steht wohl außer Zweifel, wenn man die Situation mit DGS erkundet hat. Trotz seiner Einfachheit lässt sich auch bei seinem Beweis die Funktion des Herstellens von Zusammenhängen überzeugend illustrieren: Der Schlüssel ist die Wanderung des Scheitels C auf dem Halbkreis. Vom Mittelpunkt M der Seite AB aus haben 'alle' Punkte C denselben Abstand, nämlich den Radius, und damit auch denselben Abstand wie die beiden Ecken A und B. Es liegen also immer zwei gleichschenklige Dreiecke AMC und BMC vor. Im gleichschenkligen Dreieck sind bekanntlich die beiden Basiswinkel gleichgroß, und die insgesamt vier Basiswinkel der beiden gleichschenkligen (kleinen) Dreiecke ergeben zusammen gerade die Winkel des (großen) Dreiecks ABC. Die eine Hälfte von dessen Winkelmaß-Summe 180° befindet sich in A und B, und die andere Hälfte, also 90°, in C.

Dass C auf dem Kreis um den Mittelpunkt der Seite AB liegt, ist wesentlich, weil so die Gleichschenkligkeit der beiden Dreiecke gewährleistet ist. Würde C nach außen oder innen abwandern, würde der Beweis nicht mehr funktionieren, der Winkel in C würde kleiner oder größer als 90° (Hinweis: Umfangswinkel-Satz).

Das ist bei der DGS fast immer so: Für eine Beweis-Führung muss man die Bewegung meistens anhalten und am festen Bild argumentieren. Für die Kognition ist dies deswegen angebracht, weil man sich auf die Zusammenhänge am fixierten Bild besser konzentrieren kann als am bewegten (vgl. Lewalter 1997). – Wo liegt dann noch der Vorteil einer DGS? – Da kann man eben Auffälligkeiten wahrnehmen, die man im Standbild eventuell gar nicht sieht.

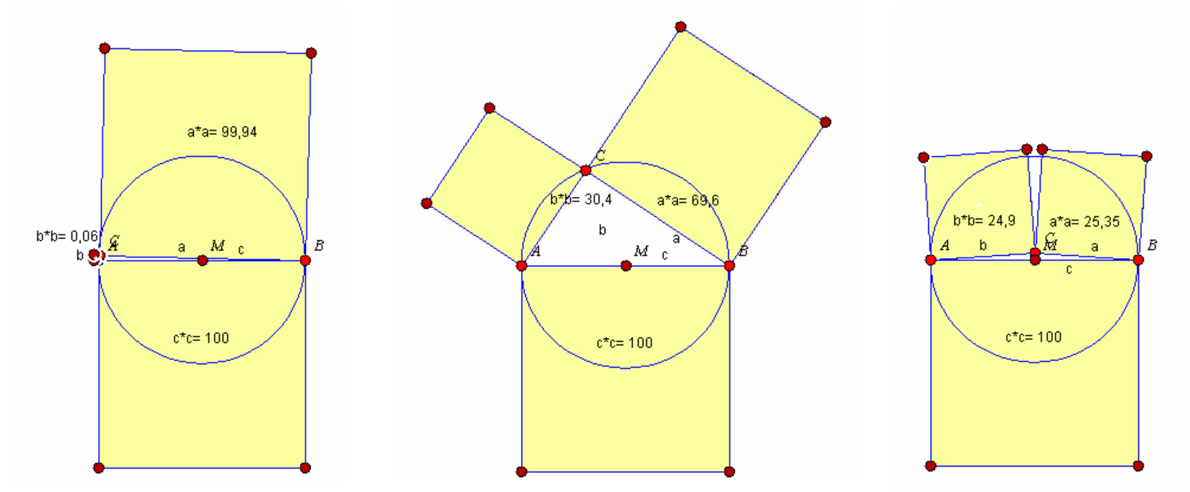
Es ist ein wesentliches Problem von DGS, dass sie im Prinzip alle möglichen Fälle und dadurch scheinbar den allgemeinen Satz zeigt, gerade im Kontrast zum Einzelbild. Aber die Bewegungen und Verformungen haben fast nie beweisende Funktion, sondern (Bender 1989):

(i) Sie *vertiefen den Glauben* an den Beweis, indem sie ihn plausibler erscheinen lassen.
(ii) Sie *unterstützen die Einsicht in die Allgemeingültigkeit,* indem sie viele Fälle, zumal Sonder-Fälle, und Übergänge dazwischen zeigen.
(iii) Sie *erzeugen Vermutungen, Beweis-Ideen* usw., indem sie Veränderungen und Invarianten zeigen.
(iv) Sie *visualisieren den Ablauf* eines Beweises und strukturieren ihn.
(v) Sie *stehen für Handlungen* und machen die geometrischen Operationen durchsichtiger.
(vi) Sie fördern *funktionales Denken* (d.h. oft daran zu denken: was passiert mit der einen Größe, wenn ich eine andere verändere?).
(vii) Nur manchmal *liefern* sie *den Beweis* selbst (z. B. mit Stetigkeits-Argumenten).

Besonders in meinem zweiten Durchgang im WS 03/04 habe ich vor allem das funktionale Denken und ein angemessenes Beweis-Verständnis zu fördern versucht. – Natürlich machen das *alle* Geometrie-Lehrenden; aber ich habe eben den Akzent *darauf* gelegt, viele Aktivitäten speziell darauf ausgerichtet, und immer wieder explizit darauf hingewiesen bzw. im Gespräch mit den Studierenden erarbeitet, welche Funktion im Zuge eines Beweises nun ein bestimmtes zu beobachtendes Phänomen hat und welche nicht.

In diesem Kontext folgende *Episode*: Bei der Frage nach der Veränderung seines Bildes von Geometrie hat S, ebenfalls ein guter Student,

„... diesen einen Beweis, Beweis vom Satz des **Pythagoras** zum Beispiel im Kopf ...“



3a **3b** **3c**

Abb. 3: Visualisierung der Pythagoras-Eigenschaft durch Bewegung der Rechte-Winkel-Ecke C auf dem Thales-Halbkreis über A und B (diese Abbildung lag beim Interview nicht vor)

> „Also für mich war das . **Besondere** oder das **Einleuchtende**, dass halt . ähm wenn man jetzt ähm meinetwegen an dem oberen Punkt, an dem Schnittpunkt der Katheten, wenn man jetzt da dran **zieht**/ dass halt . auf der **einen** Seite das **eine** Kathetenquadrat **kleiner** wird/ je nach dem, und das andere Kathetenquadrat **größer**\, je nach dem, in welche Richtung man geht\ .. und an irgendeinem **Punkt**/ wenn halt dieser . bestimmte Punkt, an dem man zieht, jetzt auf der Hypotenuse liegt, ähm . ist halt . ja, ist das Quadrat über der Hypotenuse genauso groß wie das Quadrat über den . ähm Katheten, wobei das eine Kathetenquadrat ja dann Null ist . oder sein sollte\
>
> Und dass man halt das **Verhältnis** auch sieht, wie sich das eine Quadrat gegenüber dem anderen verändert\“

Bei der Interpretation wurde S hier aufgrund seiner Rede von dem „Einleuchtenden“ unterstellt, dass er meint, dieses Ziehen liefere einen Beweis. In der Tat leistet dies das Ziehen mitnichten: Zwar ist tatsächlich in der Randlage, wo die Rechte-Winkel-Ecke auf eine der beiden anderen Dreiecks-Ecken gezogen ist, das eine Katheten-Quadrat auf einen Punkt zusammengeschrumpft, und das andere ist kongruent zum Hypotenusen-Quadrat (Abb. 3a), d.h. die Pythagoras-Gleichung gilt hier. Dass diese Gleichung beim Ziehen der Ecke auf dem Thales-Halbkreis erhalten bleibt (Abb. 3b), ist weder visuell direkt sichtbar, noch logisch auf der Hand liegend, und erst dann wieder klar, wenn man an der anderen Dreiecks-Ecke angelangt ist. Aber zwischendurch könnte die Kathetenquadratinhalts-Summe kleiner und dann wieder größer oder größer und dann wieder kleiner werden oder nach einer sonstigen Gesetzmäßigkeit schwanken. In der Tat ist das so, wenn man sich auf einem anderen Weg von der einen bis zur anderen Ecke bewegt, z.B. in der Nähe der Hypotenuse, wo zwischendurch die beiden Katheten-Quadrate zusammen nur etwa halb so groß wie das Hypotenusen-Quadrat sind (Abb. 3c).

Ich hatte *nach* einem gültigen Beweis des Pythagoras-Satzes diese Bewegung vorgeführt, um ihn für alle Fälle (bei fester Hypotenuse) zu visualisieren und so die *Aussage* des Satzes, nicht aber seinen *Beweis*, der Kognition zugänglich zu machen, und dabei – wohl nicht ganz korrekt – von *Plausibel-Machen* gesprochen. Anders als meine Mit-Interpretiererinnen und -Interpretierer unterstelle ich S den Gebrauch des Worts „das Einleuchtende“ in diesem Sinn.

4 Zum Einfluss der Lehrperson

Die Episode mit S ist ein treffendes Beispiel für meine schon lange gehegte Überzeugung, dass das Interpretieren allein von solchen Episoden eigentlich ungenügend ist, wenn man nicht viel über die Vor-Erfahrungen der Beteiligten weiß. Bei Alltags-Situationen sind hierbei die Probleme vielleicht geringer, weil man da von einem weitgehend geteilten Verständnis der Bedeutungen von Wörtern, Wendungen usw. ausgehen kann. Aber wenn es um elaborierte Begriffe geht, bei denen man unterstellen muss, dass sie anlässlich gezielter Unterweisungen gebildet wurden (ob im Sinne der Lehrenden oder nicht), dürfte es nicht reichen, sich auf die jeweilige Episode zu beschränken.

Allerdings gibt es auch im Mathematik-Unterricht deutschland-, ja welt-weit, Standard-Situationen, -Wörter, -Wendungen, -Verständnisse usw., wie nicht nur erfahrene Lehrerinnen und Lehrer, Didaktikerinnen unc Didaktiker, sondern auch aktuelle und ehemalige Schülerinnen und Schüler wissen. Hier über anekdotisches Wissen hinauszukommen, war Ziel der Adaption der interpretativen Interaktions-Analyse. Mit diesem Forschungs-Ansatz wurden durchaus Erfolge erzielt, aber die (vielleicht zunächst einmal wissenschafts-politisch nötige und praktisch unvermeidliche, zugleich aber doch reduktionistische) Ausblendung der Einflüsse von Lehrperson, Struktur des Inhalts und langfristigen Wirkungen musste bzw. muss überwunden werden (z.B. mit dem GVV-Konstrukt; s. Bender 1991, vom Hofe 1992, auch Blum 1998).

Das von vielen Angehörigen des Bildungs-Systems vertretene zentrale Paradigma der modernen Pädagogik, dass (etwas überspitzt ausgedrückt) das Mitteilen von Sachverhalten durch die Lehrperson nichts nützt, sondern die Lernenden sich diese, möglichst *kollaborativ, kollektiv, kooperativ, kommunikativ und konstruktiv*, und zwar i.W. mit ihresgleichen, nur selbst erarbeiten können, zumal wenn sie Computer zur Verfügung haben; – dieses Paradigma halte ich für ein gewaltiges naives, oft ideologisch motiviertes Missverständnis. Der erkenntnistheoretische Konstruktivismus (dem ich übrigens selbst anhänge) gibt es jedenfalls nicht her.

Natürlich habe auch ich immer wieder einmal ausgelotet, wie weit man die Gestaltung der Lern-Prozesse den Lernenden selbst überlassen kann. Nachdem da aber der Erfolg zu wünschen übrig ließ, habe ich im zweiten Durchgang mehr „belehrt“, und ich meine, dass dadurch das Niveau stieg, und zwar keineswegs nur in Sachen „Wissen und Fertigkeiten“ (die für mich eh nicht wichtig sind und die kaum abgefragt werden). Allerdings wurden in diesem Durchgang keine auswertbaren Interviews mehr geführt, sondern ich stütze meine Überzeugung auf die Mitarbeit in der Übungs-Gruppe (mit 30 Leuten), in der Vorlesung (mit 120 Leuten), auf die Lösungen der Haus-Aufgaben und nicht zuletzt auf die Klausur. – Ich erinnere daran, dass die Studierenden in Haus-Aufgaben und Übungs-Gruppen beliebig viele Gelegenheiten zu eigenen Aktivitäten haben. Aber nicht nur diese, sondern auch gezielte Unterweisungen durch die Lehrenden sind für jeglichen Lern-Erfolg unverzichtbar (s. z.B. Weinert 1996).

Nun will ich, jedenfalls im Prinzip, die Möglichkeit einräumen, dass mir vielleicht meine subjektive Sicht einen Streich spielt oder dass es stark von der Persönlichkeit der Lehrenden abhängt, mit welcher Methode sie erfolgreich sind, insbesondere dass man an den pädagogischen Konstruktivismus glauben muss, um damit Erfolg zu haben. Allerdings habe ich in begriffs-intensiven Fächern wie Mathematik noch keine wirklich erfolgreichen Lern-Prozesse erlebt oder überzeugende Berichte darüber zur Kenntnis erhalten, die ohne erhebliche Lehrenden-Intervention in Gang gekommen und aufrecht erhalten geblieben wären.

Jedenfalls habe ich aus diesen und weiteren Interview-Episoden die Konsequenz gezogen, viel mehr der möglichen kognitiven Probleme, die bei diesem Geometrie-Lehrgang auftreten können, quasi prophylaktisch explizit anzusprechen. Das reicht natürlich nicht, sondern muss immer auch durch studentische Eigen-Aktivitäten flankiert bzw. vertieft werden, in der von S aufgeworfenen Situation z.B. müssen den Studierenden andere Wege als nur ein Thales-Halbkreis von der einen zur anderen Ecke vorgegeben werden und ein explizites Diskutieren der Flächeninhaltsummen-Konstanz abverlangt werden.

Solche kognitiven Probleme haben sich der Geometrie-Didaktik eigentlich schon immer gestellt, und man kann fragen, was sie mit Neuen Medien zu tun haben. – Die Antwort lautet: Aufgrund deren Einbezug in den Mathematik-Unterricht stellen sie sich in erheblich verschärfter Form und z.T. auch in einer neuen Qualität. Das hohe Veranschaulichungs- und Plausibilisierungs-Potenzial einer DGS kann sich, zumal auf das zentrale Paradigma des Beweisens, durchaus auch nachteilig auswirken und erzwingt besondere Sorgfalt bei der Unterrichts-Vorbereitung und -Durchführung durch die Lehrperson.

5 Literatur

Bender, P. (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen und Verformungen. Hauptvortrag auf dem 7. Visualisierungs-Workshop in Klagenfurt 1987. – In: Kautschitsch, H. & W. Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, S. 95 – 145

Bender, P. (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. – In: Postel, H.; Kirsch, A.; Blum, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, S. 48 – 60

Bender, P. & D. Maczey (2004): Wirkung einer multimedialen Lernumgebung auf das Mathematiklernen. – Unveröffentlichter Projekt-Bericht. Paderborn: Universität

Blum, W. (1998): On the role of “Grundvorstellungen” for reality-related proofs – examples and reflections. – In: Galbraith, P.; Blum, W.; Booker, G.; Huntley, I. D. (Hrsg.): Mathematical modelling. Teaching and assessment in a technology-rich world. Chichester: Horwood, S. 63 – 74

Hofe, R. v. (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 13, S. 345 – 364

Lewalter, D. (1997): Kognitive Informationsverarbeitung beim Lernen mit computerpräsentierten statischen und dynamischen Illustrationen. – In: Unterrichtswissenschaft 25, S. 207 – 222

Maczey, D. (2002): Ein Projekt zum Einsatz Dynamischer Geometriesoftware in der Lehramts-Ausbildung. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 327 – 330

Oevermann, U. (1986): Kontroversen über sinnverstehende Soziologie. Einige wiederkehrende Probleme und Mißverständnisse in der Rezeption der „objektiven Hermeneutik“. – In: Aufenanger, S. & M. Lenssen (Hrsg.): Handlung und Sinnstruktur. Bedeutung und Anwendung der objektiven Hermeneutik. München: Kindt, S. 19 – 83

Strauss, A. & J. Corbin (1996): Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. – Weinheim: Psychologie Verlags Union

Weinert, F. E. (1996): Thesenpapier zum Vortrag „Ansprüche an das Lernen in heutiger Zeit“. – München: Manuskript