Peter Bender
U Paderborn
EIM-Fakultät
bender@upb.de

Volker Hagemeister
ehemals: Berliner Landesinstitut für Schule und Medien
volker@hagemeister.name

Weitere schlechte Aufgaben aus PISA

In der Matik 54 vom WS 04/05 hatten wir bereits einige schlechte Aufgaben aus den internationalen Vergleichsuntersuchungen TIMSS (1995) und PISA (2000, 2003) vorgestellt. Zur Erinnerung: Bei (TIMSS und) PISA wurden und werden u.a. die Leistungen der 15-Jährigen in Mathematik und Naturwissenschaften getestet. Dabei wird eine bestimmte Vorstellung von sog. "Mathematical Literacy" zugrunde gelegt: Über Mathematical Literacy verfügen, heißt "die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht."

Mathematical Literacy ist, auch aus unserer Sicht, ein wichtiges Ziel für den Mathematik-Unterricht in allen Schulformen. Der Grad ihres Vorhandenseins ist aber faktisch nicht in üblichen Tests (schriftlich, mit begrenzter Zeit, allgemein vergleichbar, ökonomisch auswertbar) zu überprüfen. Der Versuch, dies in TIMSS und PISA doch zu tun, ist folglich nicht gut gelungen. Dies kann man an der Gesamtheit der (freigegebenen) Aufgaben (die meisten werden geheim gehalten) und an vielen Einzelaufgaben erkennen. Hier zwei weitere Exemplare: Die erste ("Gehen") war schon in etwas ausführlicherer Form bei PISA-2000 dabei gewesen und wurde als Beispielaufgabe nach dem PISA-Testeinsatz im Jahre 2003 veröffentlicht (u.a. im Westfälischen Volksblatt am 15.07.2005 abgedruckt), die zweite ("Rennwagen") gehört zu den Beispielaufgaben, die nach PISA-2000 herausgegeben wurden (siehe http://pisa.ipn.uni-kiel.de/beispielaufgaben.html). Die Rennwagen-Aufgabe wurde inzwischen von so manchem Ausbildungsseminar u.ä. als musterhaft übernommen.

"Gehen: *(Zeichnung)* Das Bild zeigt die Fußabdrücke eines gehenden Mannes. Die Schrittlänge P entspricht dem Abstand zwischen den hintersten Punkten von zwei aufeinander folgenden Fußabdrücken.

Für Männer drückt die Formel $n/P=140$ die ungefähre Beziehung zwischen n und P aus, wobei

n = Anzahl der Schritte pro Minute und

P = Schrittlänge in Meter.

Frage 1: Wenn die Formel auf Daniels Gangart zutrifft und er 70 Schritte pro Minute macht, wie viel beträgt dann seine Schrittlänge?

Frage 2: Bernhard weiß, dass seine Schrittlänge 0,80 Meter beträgt. Die Formel trifft auf Bernhards Gangart zu. Berechne Bernhards Geschwindigkeit in Metern pro Minute und in Kilometern pro Stunde. Gib an, wie du zu deiner Antwort gekommen bist."

Die Aufgabe ist sehr schlecht formuliert (vielleicht unvermeidbar wegen der erforderlichen Knappheit). Dies trägt mit dazu bei, dass man sogar als Experte für anwendungsorientierten Mathematik-Unterricht Schwierigkeiten hat, den behaupteten Zusammenhang überhaupt zu verstehen. Was für eine Konstante mit der Dimension 1/(Minute mal Meter) ist das? Alle Erfahrungen besagen doch, dass n und P nicht proportional, sondern eher umgekehrt proportional sind. Ihr *Produkt* ist eine sinnvolle physikalische Größe, die Geschwindigkeit (Meter/Minute). Normalerweise übt man die Tätigkeit des Gehens zu einem bestimmten Zweck aus, vor allem um von einem Ort zu einem anderen zu gelangen, aber auch um zu schlendern oder sich sportlich zu betätigen. Besonders wenn man gemeinsam mit anderen Menschen geht, legt man quasi die Geschwindigkeit fest, und selbst wenn man sie in verschiedenen Zeitintervallen ändert, so ist sie doch die *primäre* Größe, und die Schrittfrequenz stellt sich entsprechend der Schrittlänge ein (wobei diese Abhängigkeit nicht unidirektional ist).

Nun hatten die PISA-Leute eine sportmedizinische Untersuchung ausgegraben, nach der der o.a. Zusammenhang gilt, jedenfalls im Bereich von 0,5 bis 0,9 Meter Schrittlänge. Natürlich müsste man hier genauer wissen, wie in dieser Untersuchung dafür gesorgt wurde, dass die Versuchspersonen gehen, ohne sich eine Geschwindigkeit vorzugeben. Mit realistischen Kontexten dürften diese Versuche wenig zu tun haben. Jedenfalls hängt unter diesen Bedingungen in dem genannten Bereich die Geschwindigkeit quadratisch von der Schrittlänge ab. Und dann könnte dieser Zusammenhang sogar plausibel sein, wenn man bedenkt, dass die Muskelmasse ja prinzipiell kubisch mit der Beinlänge wächst.

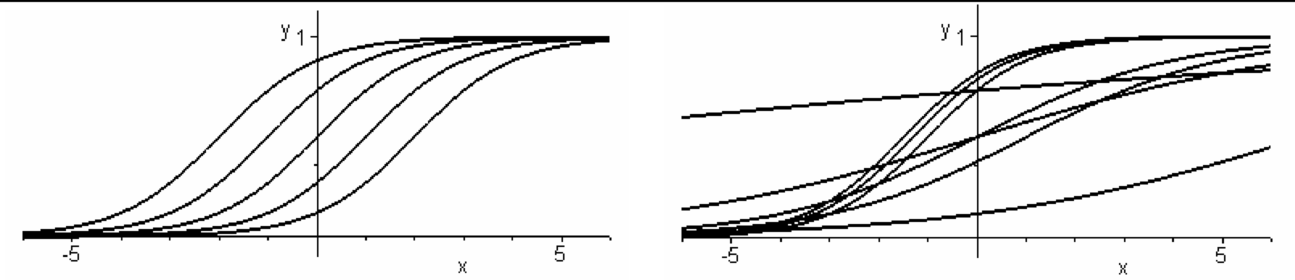
Im "üblichen" Mathematik-Unterricht der Sekundarstufe I würde man eher den mathematischen Zusammenhang $n \cdot P = v$ (Geschwindigkeit) analysieren: man nimmt jeweils eine der drei Größen als Parameter und betrachtet den funktionalen Zusammenhang der beiden anderen. In der Aufgabe hat man dagegen die Menge aller Menschen als Definitionsbereich, und jedem Menschen ist die konstante Zahl n/P zugeordnet, die sich als solche ergibt, wenn man unter ganz bestimmten, Nicht-Alltags-, Bedingungen bei ihm n und P misst. Das wesentliche Ergebnis dieser sportmedizinischen Untersuchung lautet also, dass sich (bei Männern im Bereich $0,5<P<0,9$) überhaupt eine konstante Zahl ergibt, dass n und P dabei proportional sind und dass diese Zahl (unabhängig von Alter, Körperbau und Konstitution) etwa 140 beträgt. Das wird jedenfalls in der Aufgabe "Gehen" so behauptet. Dass der Gültigkeitsbereich fehlt, ist nicht korrekt, aber verständlich, weil seine Angabe das Ganze für die Probandinnen & Probanden noch unübersichtlicher machen würde. Eine uralte mathematikdidaktische Weisheit besagt, dass die Nennung einer Größe wie 140 in einem Anwendungskontext nur sinnvoll ist, wenn man sie mit anderen Größen konfrontiert, also z.B. wenigstens mit der Konstanten von Frauen (wenn es sie denn dort gibt), was hier allerdings versäumt ist.

Man könnte auf den Gedanken kommen, diesen Sachkomplex wenigstens für den Unterricht fruchtbar zu machen, um vielleicht herauszuarbeiten, wie wichtig es ist, sich klar zu machen, welche Größen man konstant hält, welche man variiert, und überhaupt, was Definitions- und Wertebereiche sind. Vom Inhaltlichen her ist mir das Thema zu weit hergeholt und irrelevant, und ich stelle in Abrede, dass man seine knappe Unterrichtszeit darauf verwenden sollte. Vom mathematischen Gehalt her sind "gewöhnliche" Schülerinnen & Schüler bis in die Oberstufe m.E. überfordert (man hat doch selbst seine anfängliche Mühe, diese funktionale Begrifflichkeit auf die Reihe zu kriegen).

Aus fachdidaktischer Sicht ist diese Aufgabe als *Test*-Aufgabe völlig ungeeignet. Der Kontext, der da vor den Probandinnen & Probanden entworfen wird, ist nicht nur ungewohnt, sondern seine zentrale Aussage ist unplausibel bis hin zur Unverständlichkeit. Den meisten dürfte es weder innerhalb der stressigen Testsituation, noch gar aus irgendeiner Erinnerung heraus gelingen, den Sachverhalt zu verstehen. Sie verhalten sich falsch, wenn sie lange über den Sinn nachdenken, weil sie damit Zeit verlieren, und sie tun gut daran, die Werte in die Formel einzusetzen und das Ergebnis rechnerisch (und sinnlos) zu produzieren. Lediglich die Umrechnung am Schluss von m/min in km/h erscheint sinnvoll.

Da haben wir die vielbeklagte Pervertierung der Anwendungsorientierung prototypisch vor uns: Für die Probandinnen & Probanden reduziert sich die Aufgabe auf das Einsetzen von Werten in die Formel, und der Kontext erweist sich als letztlich irrelevante Einkleidung, die man wieder beseitigen muss, was bei dieser Aufgabe relativ einfach möglich ist. Probandinnen & Probanden mit einer gesunden Mathematical Literacy werden durch diese Aufgabe benachteiligt, wenn sie (gemäß dem, was sie in gutem Mathematik-Unterricht gelernt haben sollten) versuchen, den Anwendungsgehalt zu erschließen, dabei viel Zeit verlieren und vielleicht sogar vor lauter Verwirrung die Proportionalität durch die scheinbar plausiblere Antiproportionalität ersetzen, usw. Ein besonders hohes Maß an Mathematical Literacy läge vor, wenn sie sich weigern würden, diese Aufgabe überhaupt zu bearbeiten.

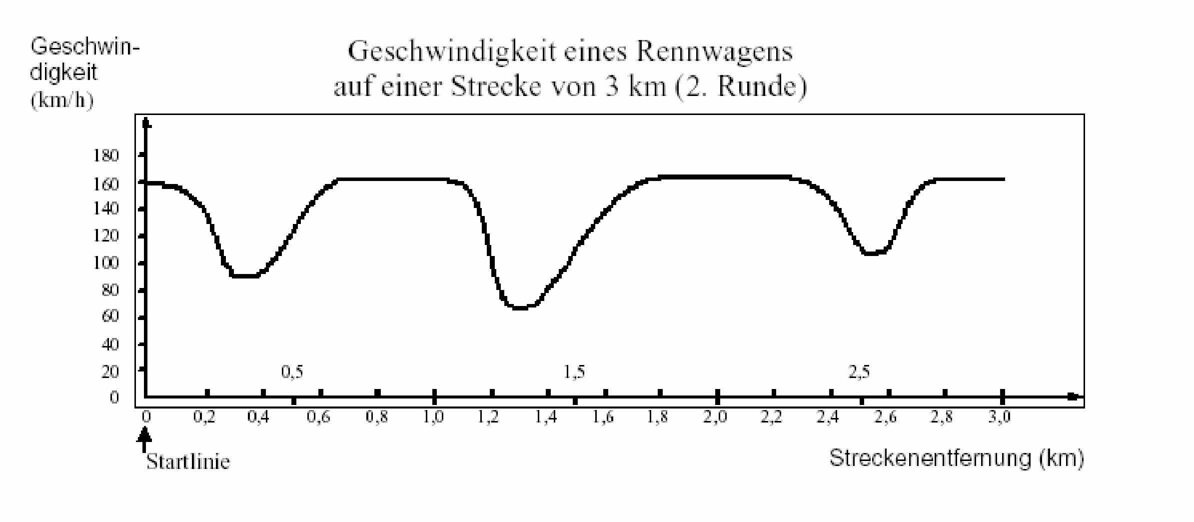
Bei der PISA-Deutschland-Mathematik-Gruppe ist ja einige fachdidaktische Kompetenz versammelt, und so hat man auch dort die Mangelhaftigkeit dieser Aufgabe bemerkt und im Internet eine erläuternde Sachanalyse hinzugefügt: bei pisa.ipn.uni-kiel.de im Text auf "Beispielaufgaben PISA-Testung" klicken und dann unter der Überschrift "Beispielaufgaben aus PISA 2003" die Datei "Mathematische Grundbildung (Beispielaufgaben)" (nicht: "Lösungen") downloaden. — Diese Mangelhaftigkeit spielt aber für PISA keine Rolle, da ja die Aufgabe "empirisch gut gelaufen" ist, so dass man sie nach 2000 nun schon zum zweiten Mal eingesetzt hat. Hier fragt sich natürlich, wie schlecht eine Aufgabe noch sein muss (ich kann mir das kaum vorstellen), damit sie trotz empirisch guten Laufens eliminiert wird. Die Grenze ist erklärtermaßen erreicht, wenn fachliche Fehler enthalten sind, wie z.B. bei der in der Matik 54 vorgestellten Aufgabe "Tageslicht 1", die ebenfalls empirisch gut gelaufen sein muss, wurde sie doch gleich zu mehreren Gelegenheiten in der Presse veröffentlicht (Die Zeit am 09.12.2004; Frankfurter Rundschau am 15.07.2005). — Mit "empirisch gut gelaufen" wiederum ist, so fürchte ich, lediglich gemeint, dass dem tatsächlichen Lösungsverhalten der Probandinnen & Probanden eine Aufgabencharakteristik entspricht, die in ein Ensemble wie in der linken Grafik passt (während das rechts dargestellte Ensemble von Aufgabencharakteristiken als "empirisch schlecht" gelten dürfte).



Nun zur zweiten Aufgabe:

GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.

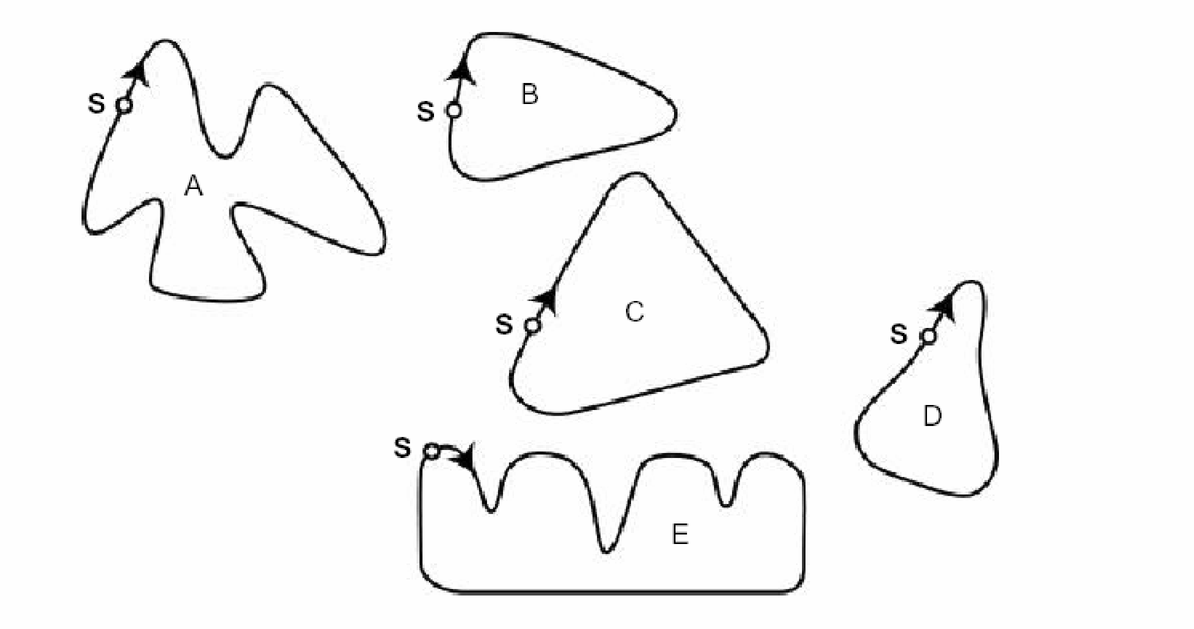


Frage 5: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS
Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?
A 0,5 km
B 1,5 km
C 2,3 km
D 2,6 km

Frage 6: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS
Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?
A an der Startlinie
B bei etwa 0,8 km
C bei etwa 1,3 km
D nach der halben Runde

Frage 7: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS
Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?
A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

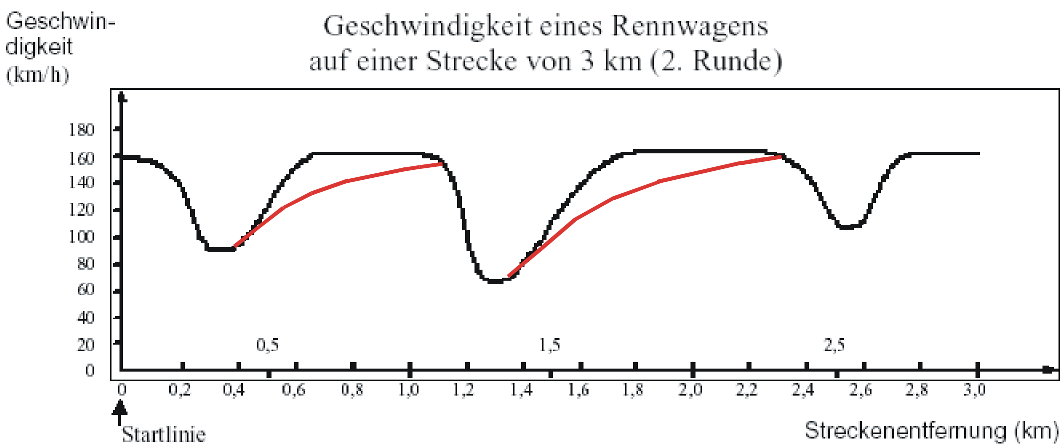
Frage 8: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS
Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken:
Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



S: Startlinie

Diese freigegebene PISA-Aufgabe ist aus fachdidaktischer Sicht durchaus in Ordnung. Hier werden unterschiedliche Darstellungsformen (Texte, Grafiken, Tabellen) in sinnvoller Weise miteinander verknüpft. Leider enthält die Aufgabe aus Sicht der "Realität" jedoch einige gravierende Fehler:

Falls der "Rennwagen" tatsächlich eine Höchstgeschwindigkeit von 160 km/h hätte (also ein historischer Rennwagen von 1908 oder 1909 wäre), dann würde er auf den geraden Stücken die Höchstgeschwindigkeit nicht erreichen. Zwischen Kilometer 0,6 und 1,0 würde der Graph weiter ansteigen; ebenso beim nächsten geraden Streckenstück zwischen Kilometer 1,5 und 2,2). In dem o.a. Geschwindigkeits-Weg-Diagramm müsste also der Graph von den jeweiligen Tiefpunkten aus zunehmend langsamer ansteigen und seine Hochpunkte erst an den Stellen erreichen, wo es unmittelbar danach wieder nach unten geht. Das Geschwindigkeits-Weg-Diagramm müsste wie in der folgenden Grafik modifiziert werden; d.h. die "Hochplateaus" müssten durch die zusätzlich eingezeichneten Linien ersetzt werden:



Nimmt man andererseits an, dass hier mit modernen Wagen ein Rennen gefahren wird, so würden auch diese auf den relativ kurzen geraden Streckenstücken ihre Höchstgeschwindigkeit (von 350 bis 400 km/h) nicht erreichen, da ja mit dem Annähern an die Höchstgeschwindigkeit die Beschleunigung immer kleiner wird. Weil bei Autorennen ständig am Limit gefahren wird, würden die Fahrer auf den geraden Streckenstücken laufend beschleunigen, um erst kurz vor einer Kurve scharf zu bremsen. Konstante Geschwindigkeiten werden bei aktuellen Autorennen meist nur in Kurven gefahren.

Die PISA-Grafik zu diesem Thema entspricht also nicht der Realität; auch dann nicht, wenn man die Geschwindigkeits-Skala den aktuell erreichbaren Geschwindigkeiten anpassen würde. Man müsste außerdem noch die geraden Streckenabschnitte der Rennstrecke (unrealistisch) stark verlängern, damit hier tatsächlich Höchstgeschwindigkeit erreicht werden könnte (was dann den "Hochplateaus" im Geschwindigkeits-Weg-Diagramm entsprechen würde).

Die Fragen 5 und 8 können nicht sinnvoll beantwortet werden (auch wenn man Rennwagen von 1908 oder 1909 annimmt). Die durch die Fragen und Antwortmöglichkeiten suggerierten Überlegungen, die zu den für richtig erklärten Antworten führen (beides Mal B), lauten nämlich "ein gerades Streckenstück liegt genau dann vor, wenn (bis auf ein kurzes Anfangs- und ein kurzes Endstück) die Geschwindigkeit konstant ist". Diese Überlegungen sind, wie ausgeführt, objektiv falsch. Erschwerend kommt hinzu, dass die Korrespondenz "gerades Stück bei der Rennstrecke" und "gerades Stück beim Geschwindigkeits-Weg-Diagramm" bei beiden Fragen auch ohne jedes Verständnis Antwort B nahe legt.

Allerdings ist die Rennstrecke B so schlecht gezeichnet, dass sie eigentlich weder bei der offenbar von den Aufgabenautorinnen & -autoren erdachten, scheinbar angemessenen, tatsächlich aber sachwidrigen Vorgehensweise, noch bei dem oberflächlichen Schluss aus der äußerlichen Geradheits-Korrespondenz in Frage kommt. Zum einen müsste nämlich in der Zeichnung B der Punkt S weiter oben liegen. Zum anderen müssten sich die beiden geraden Streckenstücke in B, auf denen S nicht liegt, in der Länge um etwa 20% unterscheiden.

Offensichtlich wurde diese PISA-Aufgabe am Schreibtisch erfunden ohne jede Recherche in der Realität; und wenn man sie lösen will, braucht man sich nicht bei Autorennen auszukennen, sondern man muss nur nachvollziehen können, wie die PISA-Autorinnen und -Autoren sich Autorennen vorstellen.