Die Geometrie des Lederfußballs – ein Optimierungsproblem

Peter Bender, Paderborn

Zusammenfassung

Die geometrische Form des Lederfußballs in ihrer Entwicklung in den letzten 50 Jahren wird analysiert. Dabei erweisen sich unterschiedliche Formen als geeignet. Entweder sind die Bälle direkte Realisate archimedischer Körper, oder zumindest handelt es sich bei ihrer Symmetriestruktur um eine der drei platonischen Bewegungsgruppen. Ein Kurzbericht über eine ideale und eine reale Unterrichtseinheit ist beigefügt. Das Thema ist ein Beispiel für angewandte Geometrie, die i. W. ohne Rechnen auskommt.

1 Motivation

"Dass ich den Flächeninhalt eines Kreisrings ausrechnen können muss, akzeptiere ich; denn ich könnte ja von Beruf Installateur werden. Warum ich mich jedoch mit der geometrischen Struktur des Fußballs befassen soll, kann ich nicht einsehen." Dieser Kommentar eines 14-jährigen Hauptschülers (auf dem Land; im Jahr 1978) zur Unterrichtseinheit "Geometrie des Fußballs" bringt unverfälscht das alte Vorurteil zum Ausdruck, das in der Gesellschaft, auch von vielen Lehrern und Schülern, gehegt wird: Der Mathematik-, und ganz besonders der Geometrieunterricht, kann höchstens damit gerechtfertigt werden, dass er Formeln bereitstellt, die man "später" einmal im Beruf (keineswegs aktuell, etwa im Alltag) braucht. Bezieht man in dieses Vorurteil die Möglichkeiten moderner Elektronenrechner ein und denkt es vordergründig zu Ende, dann kann der Mathematikunterricht an der allgemeinbildenden Schule heute gar nicht mehr gerechtfertigt werden. Diese Meinung wurde in den 1970/1980-er Jahren, auch auf andere Fächer und auf die Schule insgesamt bezogen, durchaus hin und wieder vertreten.

Diesem naiv-utilitaristischen, oft plutokratisch unterfütterten Denken setzt die Pädagogik seit einigen Jahren einen renovierten Allgemeinbildungsauftrag für die Schule entgegen (übrigens auch in der alten DDR). Eine typische Ausprägung liefert die anwendungsorientierte Mathematikdidaktik. Der Bildungsgehalt wird nicht mehr aus der Mathematik allein geschöpft, sondern verstärkt aus deren Anwendungen. Das *Anwenden*, sowie die *Einsicht* in die umfassende Bedeutung der Mathematik und des Mathematisierens in vielen Bereichen menschlichen Daseins ist hierbei ein fundamentales Lernziel (vgl. Blum 1991). Erst in zweiter Linie kommt es auf die konkrete Anwendung an. Für die Mathematikdidaktik tut sich hier ein bisher unterschätztes Arbeitsfeld auf, das zunächst nur mittelbar mit dem Unterricht zusammenhängt: Die potenziell mathematikhaltigen Bereiche sind auf eben diese Mathematikhaltigkeit zu durchforsten, sei es mit dem Ergebnis eines konkreten Unterrichtsvorschlags für die allgemeinbildende Schule, sei es mit einer Erweiterung des Bilds von Mathematik und ihrer Bedeutung, unmittelbar lediglich auf Didaktiker, Lehrer u. ä. gemünzt.

Als Modell für den realen Raum ist z. B. die Geometrie von vorneherein eng mit ihren Anwendungen verwoben. Gemäß dem erkenntnistheoretischen Ansatz von Bender & Schreiber (1985 & 2012) sind die Anwendungen sogar Teil der geometrischen Begriffe. Diesen Ansatz haben wir in das "Prinzip der operativen Begriffsbildung" gefasst (S. 26): "Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen … werden in Herstellungsvorschriften … umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlagen der ihnen entsprechenden Begriffe." In der Unterrichtspraxis können Formen i. Allg. nicht auf diese ideale Weise neu erfunden werden. Vielmehr ist von vorgefundenen, von Menschen hergestellten Formen auszugehen. Die möglichen Zwecke einer solchen Form sind zu rekonstruieren. Es ist zu fragen, welche Eigenart die Form hat, aufgrund deren sie zweckentsprechend funktioniert (Symmetrie, ebene Seitenflächen, konstante Krümmung usw.). Mittels Idealisierung wird daraus der mathematische Begriff i. e. S. (Würfel, Kugel, Ebene usw.) gebildet. Anschließend werden Fragen der Herstellung diskutiert. Je nach Zweck wird dabei eine ideale Form unterschiedlich genau realisiert (z. B. ebener Sportplatz versus ebener Spiegel). Herstellverfahren sind in dieser Phase der Begriffsbildung von Interesse. Schließlich kann durch realen Gebrauch festgestellt werden, ob die Form ihre Zwecke tatsächlich gut erfüllt.

Dieses Muster operativer Begriffsbildung kann gewiss nicht die einzige Form des Begriffserwerbs im Geometrieunterricht sein, aber es sollte dort wenigstens immer wieder aufscheinen. Es trägt wesentlich zu dessen Verankerung in der Lebenswelt bei, von der positive Impulse auf Begriffsbildung, Argumentationsfähigkeit, Anwendungsfähigkeit, Motivation und Allgemeinbildung ausgehen können. Allerdings stellt es auch besondere Anforderungen an die fachübergreifende Kompetenz der Lehrer.

Das Eingangszitat weist mit aller Deutlichkeit darauf hin, dass einem noch so überzeugenden Konzept der Erfolg versagt bleibt, wenn es nur in einer vereinzelten Unterrichtseinheit realisiert wird. Es muss vielmehr in einen Unterricht eingebettet sein, in dem immer wieder gefragt wird: Warum ist ein bestimmter Sachverhalt gerade so? Wie könnte er noch sein? Was geschieht, wenn man gewisse Bedingungen, Größen o. Ä. variiert? Diese Forderung nach funktionalem, plausiblem Denken bedeutet nicht, dass sich der ganze Unterricht um Anwendungen drehen muss. Die Mathematik entfaltet ja gerade ihre Kraft, indem sie zunächst, eventuell über längere Strecken, von der konkreten Anwendungssituation gelöst und danach wieder in diese eingebracht wird. Die Forderung bezieht sich auch auf diejenigen Unterrichtsphasen, in denen reine Mathematik getrieben wird, auf Definitionen, Sätze, Formeln usw.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich zwar wesentlich auf die Ausführungen in (Bender & Schreiber 1985 & 2012, 126ff), sie sind aber insofern neu, als die Optimalität des Fußballs zunächst völlig ohne Rückgriff auf die Idee des archimedischen Körpers diskutiert wird. Diese wird erst spät ins Spiel gebracht und entfaltet dann besonders eindringlich die formale und heuristische Kraft eines mathematischen Begriffs. Die Sachanalyse in Kap. 2 liefert nicht nur den stofflichen Hintergrund einer möglichen Unterrichtseinheit, sondern zugleich eine ausführliche Vorlage für den Unterricht selbst. Wegen restriktiver Platzvorgaben durch die Herausgeber muss ich mich jedoch, vor allem in den Abschnitten 2.2 und 2.3, auf Stichworte beschränken. In Kap. 3 wird dann, basierend auf eigenen Erfahrungen (anknüpfend an Bender & Schreiber 1985 & 2012, 224ff), ein Unterrichtsvorschlag konkretisiert.

2 Die Geometrie der Lederdecke des modernen Fußballs

2.1 Der Zweck und die Funktionsweise der Lederdecke

Als 1970 der Fußball mit der geometrischen Struktur des archimedischen Körpers (5 6 6) (Ikosaederstumpf) eingeführt wurde, geschah dies in zeitlichem Zusammenhang mit dem Einzug des Farbfernsehens in weite Bevölkerungskreise. Die Fernsehzuschauer waren angetan vom Grün des Fußballrasens und von der Kontrastwirkung des neuen, schwarzweiß gefärbten Fußballs. Dieser wurde deswegen auch "Fernsehball" genannt. Allerdings war das wesentlich Neue nicht die Farbgebung – eine ähnliche hätte man ja auch den alten Bällen verpassen können –, sondern die geometrische Struktur der Lederdecke des Balls. Der bis dahin übliche vom Würfel abstammende 12- bzw. 18-Flächner mit der Oktaeder- bzw. Tetraedergruppe als Symmetriegruppe wurde abgelöst vom Ikosaederstumpf mit 32 Flächen und der Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe.

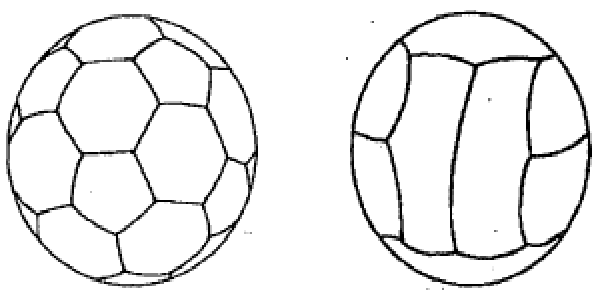


Abb. 1

Ein Fußball ist ein Gerät, das beim Fußballspiel auf einem ca. 3/4 ha großen rechteckigen Platz vornehmlich mit dem Fuß, durchaus auch mit anderen Körperteilen, mit der Hand aber nur in besonderen Spielsituationen (Einwurf, Torwartabspiel) bewegt werden darf. – Beim American Football dagegen z. B. darf der Ball auch unter dem Arm getragen und mit der Hand geworfen werden; er ist daher so geformt, dass für seine Behandlung ein größeres Geschick erforderlich und seine Flugbahn besonders stabil ist. – Die Flugbahn des Bumerangs soll einen geschlossenen Weg beschreiben; dies kann auf der Basis seiner raffinierten Form mit einer besonderen Wurftechnik erreicht werden. – Der Spielwürfel soll ein Stück weit rollen, damit er wirklich ein Zufallsgerät ist, aber aus praktischen Gründen nicht allzu weit; und prinzipiell soll er nur endlich viele, deutlich unterscheidbare Ruhelagen einnehmen können.

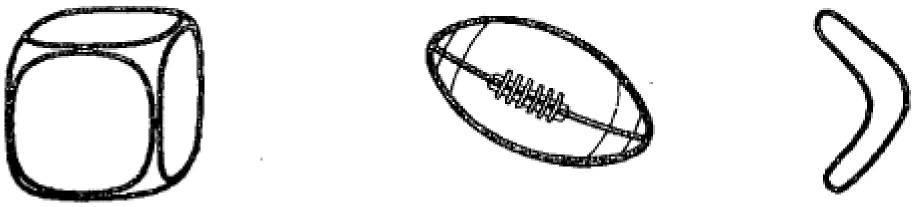


Abb. 2

Alle diese Zweck- und Funktionsanalysen führen nicht notwendig auf bestimmte Formen, sondern erweisen lediglich gewisse Formen als besser geeignet im Vergleich zu gewissen anderen. Neben rein geometrisch-physikalischen Aspekten spielen physiologische, ökonomische und ästhetische Gesichtspunkte eine bedeutende Rolle, und zwar nicht nur für die Auswahl und Verarbeitung des Materials oder für die optische Gestaltung, sondern sehr wohl auch für die Formgebung. Der Verbreitung neuer Formen zur Erfüllung alter Zwecke stehen das Vorhandensein von Maschinen, ausgebildeten Menschen, Verhaftung in der Tradition, Trägheit im Denken u. v. a. entgegen (z. B. bei der Anordnung der Schreibmaschinentastatur); ihre Durchsetzung kann von offensichtlichen Vorteilen, gezielter (Des-) Information, Mode u. v. a. gefördert werden (Nase am Schiffsrumpf unter der Wasserlinie zur Stabilisierung, Fosbury-Flop beim Hochsprung, Bauchlage beim Schlafen für Säuglinge). Man liegt selten falsch mit der Annahme, dass ökonomische Interessen den Ausschlag geben. Allerdings kann man im Nachhinein häufig objektive Merkmale feststellen; und um solche geht es im Folgenden.

Ein Fußball besteht aus einer flexiblen Gummiblase, die von einer Decke aus Leder bzw. lederähnlichem Kunststoff geschützt ist. Diese Decke ist aus im Prinzip ebenen Stücken zusammengenäht. Durch Befüllen der Blase mit Luft mit hohem Druck wird der Decke eine Form verpasst, die die ideale Kugel hinreichend gut annähert und dem Ball folgende Eigenschaften verleiht: Nicht zu weich, nicht zu hart; nicht zu elastisch, nicht zu starr; nicht zu schwer, nicht zu leicht. Immerhin ist er wuchtigen Fußtritten ausgesetzt, soll hohe Geschwindigkeiten erreichen und zugleich von menschlichen Körpern schmerzfrei gestoppt werden können. Im Moment eines Aufpralls muss er erhebliche Verformungen erleiden können, aber danach wieder die ursprüngliche Form annehmen, als ob er nie verformt gewesen wäre, und das Millionen Mal. Ein Vollkörper (z. B. Vollgummiball) kommt daher nicht in Frage. Anscheinend kennt man aber kein erschwingliches Material, das so stark gekrümmt werden kann, dass man die Decke unter Beachtung der o. a. Eigenschaften aus einem einzigen Stück anfertigen kann.

So nimmt man bei der Herstellung den zusätzlichen Arbeitsgang des Zusammennähens und beim fertigen Ball die Nähte als Schwachstellen in Kauf. Je kleiner man die Stücke macht, aus denen sich die Decke zusammensetzt, desto geringeren Verformungskräften wäre das einzelne Stück ausgesetzt. Der Verkleinerung der Stücke sind aber durch den Arbeitsaufwand und durch die Forderung Grenzen gesetzt, dass die Nähte einzeln und insgesamt nicht zu lang werden dürfen, da ja dann diese die Kräfte aushalten müssen.

2.2 Kriterien für die Optimierung der geometrischen Struktur der Lederdecke

Der gerade beschriebene Konflikt zwischen der Forderung kleiner Flächenstücke und der Forderung einer kurzen Gesamtnaht ist typisch für Optimierungsprobleme. Bei isolierter Betrachtung einer Größe müsste diese möglichst extrem (je nach dem: groß oder klein) gemacht werden, um eine relevante Wirkung in größtmöglicher Ausprägung zu erzielen. Dabei verändern sich aber häufig andere Größen mit, wodurch die gewünschte Wirkung kompensiert wird, und es gilt, die Eingangsgrößen zu optimieren, was meistens bedeutet, sie nicht zu maximieren oder zu minimieren. Dieser Konflikt konkurrierender Forderungen bzw. Größen wird uns in diesem Abschnitt laufend begegnen.

Damit sich die Oberfläche lückenlos und überlappungsfrei aus ebenen Teilflächen zusammensetzt (Realisierung der Idee des Passens), müssen diese Flächen Polygone sein, zumal ihre Ränder von den Nähten gebildet werden. Die Lederdecke des Fußballs ist also ein Polyeder, selbstredend ein konvexes (d. h. der eingeschlossene Vollkörper ist konvex), mit Polygonen, die, weil sie starke Verformungskräfte aushalten müssen, günstigerweise möglichst kreisähnlich sind.

Bei gegebener Eckenzahl n ist das regelmäßige n-Eck besonders kreisähnlich in folgendem Sinn: Der kleinste Winkel ist besonders groß, nämlich $(n-2)\cdot180°/n = 180°-360°/n$, und die längste Seite ist besonders kurz. Auch bezüglich anderer Kreisähnlichkeitskriterien ist das regelmäßige n-Eck optimal: mit seinem Quotienten aus minimalem Radius aller umbeschriebenen und maximalem Radius aller einbeschriebenen Kreise; seinem Quotienten aus Flächeninhalt des kleinsten umbeschriebenen Kreises und des Polygons; seiner Größe der Symmetriegruppe, u. a.

Das regelmäßige n-Eck hat die Diedergruppe als räumliche Symmetriegruppe, d. h. es hat $2\cdot n$ Deckdrehungen, mindestens doppelt so viele wie jedes nicht-regelmäßigen-Eck. Diese Eigenschaft prädestiniert regelmäßige Polygone zur Verwendung für kugelähnliche Polyeder. – Im Folgenden werden die betrachteten Polygone grundsätzlich als regelmäßig vorausgesetzt und damit durchaus denkbare Alternativen ohne weitere Begründung ausgeschlossen. – Eine unmittelbare Konsequenz dieser Einschränkung ist, dass alle Kanten des Polyeders gleiche Länge haben (die ein- für allemal 1 gesetzt wird).

Mit wachsender Eckenzahl n ist zwar das regelmäßige n-Eck immer kreisähnlicher, aber zur Erzeugung kugelähnlicher Polyeder eignen sich Polygone mit großer Eckenzahl dennoch nicht, weil sie – bei fester Seitenlänge 1 – einen großen Flächeninhalt, nämlich $n\cdot\cot(180°/n)/4$, haben und ausgedehnte flache Stellen bilden. (Teilt man das n-Eck in n gleichschenklige Dreiecke wie in Abb. 3, dann wird deren Winkel an der Spitze mit zunehmendem n immer kleiner, die Dreiecke werden wegen der festen Basislänge immer größer, und zusätzlich wird ja ihre Anzahl immer größer.)

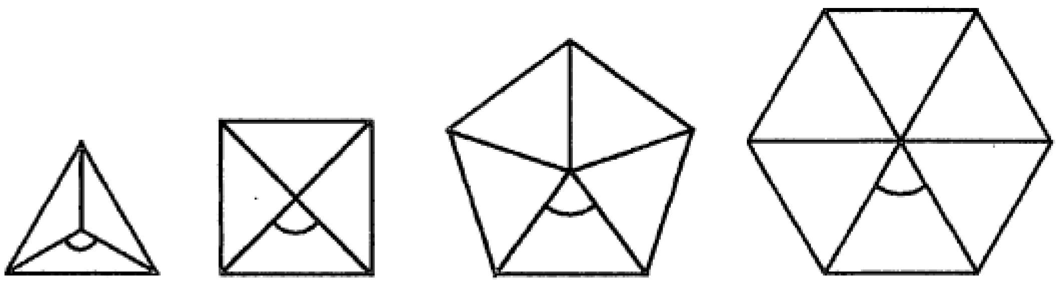


Abb. 3

Die häufig erfolgreiche Strategie, dreidimensionale Probleme auf zweidimensionale zu reduzieren, greift hier nicht. Man muss auch die gegenseitige räumliche Lage der ebenen Teilflächen des Polyeders beachten. Wenden wir uns daher dessen räumlichen Ecken zu: Im Folgenden wird unterschieden zwischen Ecke (= Eckpunkt) und Eckenkranz (= Vereinigung aller Flächen, die an eine Ecke stoßen, = "räumliche Ecke"). Die k Polygone eines Eckenkranzes liegen in einer natürlichen zyklischen Ordnung. Wenn sie, in dieser Ordnung, die Eckenanzahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ haben, dann wird der Eckenkranz auch mit $(n_1\ n_2 \ldots n_k)$ bezeichnet. Ist bei einem Polyeder jeder Eckenkranz vom selben zyklischen Typ, dann erhält es als Ganzes diese Bezeichnung. Ist k=3, dann heißt der Eckenkranz simpel. Hat ein Polyeder lauter simple Eckenkränze, dann heißt es insgesamt simpel. Die Winkel eines Eckenkranzes sind gerade diejenigen Polygonwinkel, die die zugehörige Ecke als Scheitel haben.

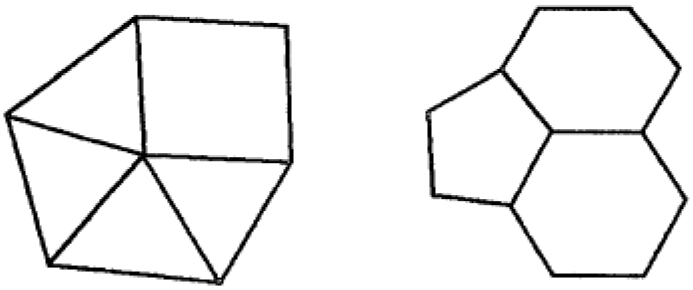


Abb. 4

Die Winkelmaßsumme eines konvexen Eckenkranzes ist <360°. Dies kann man sich klar machen, indem man einen simplen Eckenkranz entlang einer seiner Kanten aufschneidet und so ein ebenes Netz herstellt. Durch die drei Polygone wird der Vollwinkel um die zugehörige Ecke nicht ganz ausgefüllt, sondern es entsteht eine Lücke. Diese ist nötig, damit wirklich erst nach der Erzeugung eines räumlichen, d. h. nicht-ebenen, Eckenkranzes keine Lücke mehr vorhanden ist. Das Argument lässt sich auf beliebige konvexe, nicht aber auf nicht-konvexe Eckenkränze verallgemeinern.

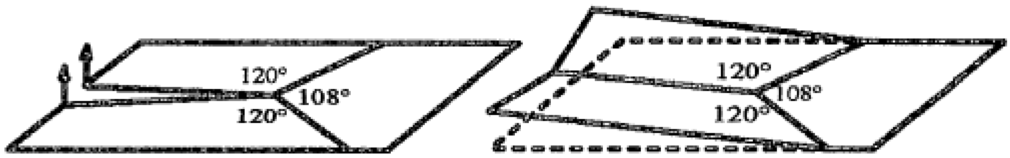


Abb. 5

Für den Fußball kommen nur simple Polyeder in Frage, weil an keiner Stelle mehr als drei Nähte zusammenlaufen sollen. Außerdem steht dann den Winkeln eines Eckenkranzes ein größtmögliches Winkelmaß zur Verfügung. Große Winkel sind aber, wie oben ausgeführt, wünschenswert.

Enthält ein konvexer Eckenkranz lauter regelmäßige Polygone, so muss darunter eines sein, dessen Eckenanzahl ≤ 5 ist; denn drei Polygone mit Eckenanzahlen n_1, n_2, $n_3 \geq 6$ liefern eine Winkelmaßsumme $\geq 3 \cdot 120° = 360°$. Gemäß dem Prinzip möglichst großer Polygonwinkel wird im Folgenden n_1, n_2, $n_3 \geq 5$ angenommen. (Die Fälle, bei denen Vier- oder sogar Dreiecke beteiligt sind, wären in prinzipiell gleicher Weise, allerdings aufwendiger und mit schlechteren Ergebnissen zu behandeln.)

Ob es ein Polyeder, dessen Polygone alle eine Eckenzahl >4 haben, überhaupt gibt, steht im Augenblick noch dahin. Die Existenz des Lederfußballs ist kein Beweis, denn es könnte ja sein, dass es nur dadurch gelingt, seine Flächen zusammenzufügen, dass man sie und die Kanten ein wenig verbiegt, so dass das Polyeder gar kein solches mehr wäre, da es nicht-ebene Seitenflächen enthielte. Aus der Sicht der Anwendungspraxis sticht dieser Einwand jedoch nicht; denn es kommt nicht auf die mathematische Existenz eines archimedischen Polyeders (5 6 6), sondern auf die praktische, d. h. im Rahmen einer vernünftigen Genauigkeitsforderung liegende Existenz und eigentlich nur auf die Möglichkeit der Verformung zu einer guten Kugel an. Hierfür ist das Realisat "Fußball" dann doch ein Beleg.

Als Eckenkränze kommen wegen der beschränkten Winkelmaßsumme dann nur (5 5 5), (5 5 6), (5 5 7), (5 5 8), (5 5 9), (5 6 6) und (5 6 7) in Frage, wobei allerdings gegen 7-, 8- oder gar Neunecke von vorneherein deren große Fläche im Vergleich zum Fünfeck spricht.

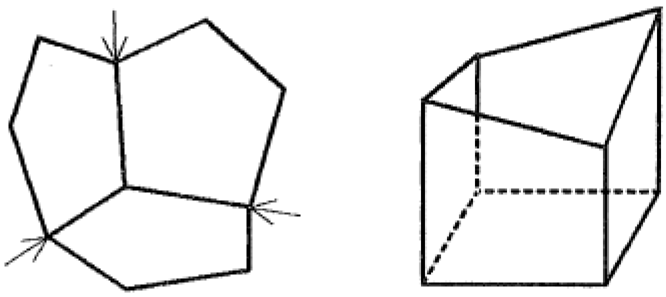
Der beschriebenen Herstellung eines Eckenkranzes aus einem ebenen Netz entnimmt man direkt, dass in einem simplen Eckenkranz

– durch die 3 Polygonwinkel in der Ecke auch die 3 Neigungswinkel je zweier Polygone bzw.
– durch 2 Flächenwinkel in der Ecke und den Neigungswinkel der beiden zugehörigen Polygone der dritte Flächenwinkel und die Neigungswinkel des dritten Polygons gegen die beiden ersten

festgelegt ist.

Zur Konstruktion eines simplen konvexen Polyeders kann man mit zwei konvexen Polygonen beginnen, die nicht in ein und derselben Ebene liegen, aber eine Kante und damit zwei Ecken gemeinsam haben. Die beiden Polygone legen zwei simple Eckenkränze fest, in denen jeweils der Flächenwinkel des dritten Polygons und dessen Neigungswinkel gegen die Ausgangspolygone eindeutig bestimmt sind. I. Allg. können diese dritten Polygone wegen des unpassenden Winkelmaßes nicht regelmäßig gemacht werden. Verzichtet man nun auf die Forderung der Regelmäßigkeit der Polygone, so kann man auf diese Art und Weise munter weiter bauen: Es entstehen immer wieder neue Ecken, in deren Eckenkränze bereits zwei Polygone vorhanden sind und ein drittes eingepasst werden muss.

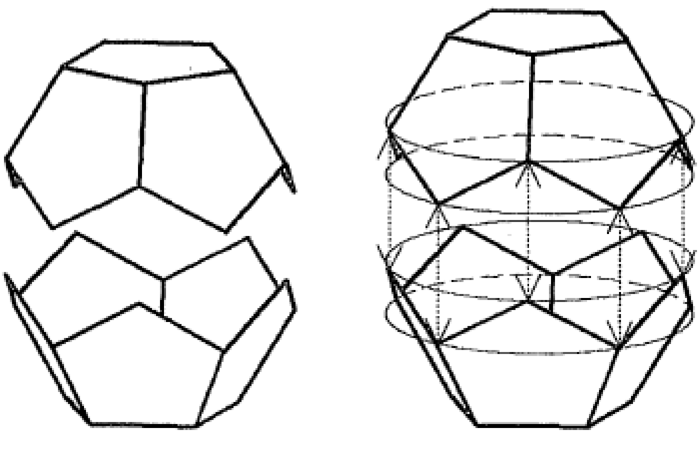
Dabei verhält sich die globale Krümmung des Polyeders (die man hier intuitiv-naiv mit beiden Händen veranschaulicht, die eine große Kugel formen) so, dass eine randlose konvexe Fläche, topologisch eine Kugel, entstehen müsste, jedenfalls wenn man mit den Flächenwinkelmaßen um eine feste Größe e unter 180° und mit den Winkelmaßsummen in den Eckenkränzen um e unter 360° bleibt.



a b

Abb. 6

Leider schafft man es aber meistens auf diese Art nicht, ein Polyeder zu bauen. Man stößt nämlich unweigerlich auf die Situation, dass durch Anfügen eines Polygons zwei (oder mehr) Eckenkränze simultan geschlossen werden sollen. Das klappt dann und nur dann, wenn die vorhandenen Kanten, an die das neue Polygon angeheftet werden soll, alle in einer Ebene liegen. Dies ist i. Allg. nicht der Fall (s. Abb. 6b). Und nun zeigt sich, dass die Forderung regelmäßiger Polygone keine Erschwerung, sondern eine Erleichterung darstellt, wie man an den Beispielen(5 5 5) und (5 6 6) sieht:



a b

Abb. 7

Hat man drei kongruente regelmäßige Fünfecke zu einem Eckenkranz (5 5 5) zusammengefügt, dann passt aus Kongruenzgründen in jede der nächsten drei Ecken wieder ein solches Fünfeck (s. Abb. 6a). Von der lokalen Betrachtung gehen wir nun zur globalen über: Man stellt zwei Puddingschalen (s. Abb. 7) her, die drehsymmetrisch mit Drehwinkel 360°/5=72° sind. Der Rand dieser Puddingschalen ist eine Zickzacklinie mit je fünf Punkten oben und unten. Die oberen Punkte liegen auf einem Kreis um die Symmetrieachse, die unteren ebenfalls, und die beiden Kreise sind kongruent mit Radius 1/tan36°. Daher passt die eine Schale, mit dem Boden nach oben, genau in die andere, und zusammen erzeugen sie das Polyeder (5 5 5), das Dodekaeder. Dieses käme als Fußball durchaus in Frage, und tatsächlich ist es als Spielzeug für Kleinkinder realisiert.

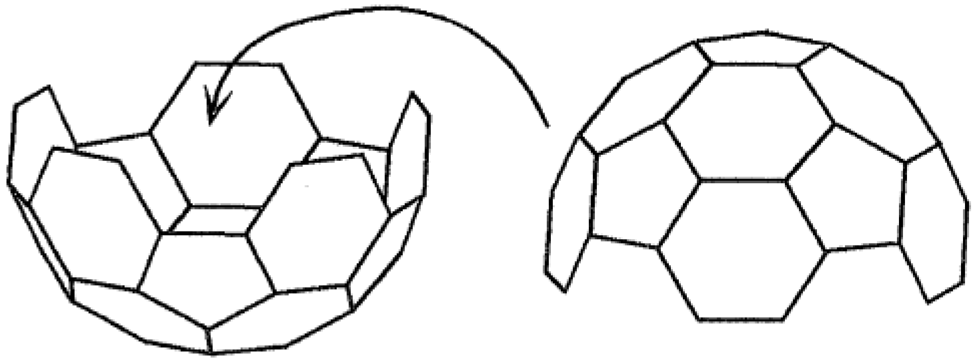


Abb. 8

Für das Polyeder (5 6 6) sind Konstruktion und Existenznachweis prinzipiell dieselben; sie sind nur etwas komplizierter. Man beginnt mit einem Fünf- und zwei Sechsecken in der Ebene um einen Punkt herum, so dass zwischen den beiden Sechsecken eine Lücke von 12° auftritt, konstruiert durch Klappen die räumliche Ecke und überzeugt sich so, dass wieder eine fünfzählig drehsymmetrische Puddingschale, diesmal mit Sechsecken an den Seitenflächen, gebaut werden kann. Anders als bei (5 5 5) kann man nun nicht einfach mit einer dazu kongruenten Schale das Polyeder abschließen. Aus Kongruenzgründen passen in die fünf Zacken nämlich Fünfecke, und nur solche. Von den danach entstehenden zehn Ecken werden immer zwei simultan durch je ein Sechseck geschlossen, was sich auch wieder aus naheliegenden Kongruenzbetrachtungen ergibt. Diese Schale, bestehend aus 16 Flächen, kann nun mit einer zweiten, dazu kongruenten, zu einem Polyeder ergänzt werden. Dass die beiden Schalen genau ineinander passen, ist nicht mehr so offensichtlich wie der entsprechende Sachverhalt beim Dodekaeder, und vielleicht erkennt man erst jetzt, warum dort an dieser Stelle der Konstruktion eine Beweisüberlegung über die Anschauung hinaus erforderlich ist.

Sind p-Ecke (mit p>6) beteiligt, so schafft man zwar vielleicht noch eine Puddingschale, z. B. mit p-eckigem Boden und fünfeckigen Randstücken, aber dann ist kein Weiterbauen mehr möglich.

Bei den beiden Polyedern (5 5 5) und (5 6 6) hat sich automatisch die Eigenschaft eingestellt, dass ihre Eckenkränze alle kongruent sind. Aus der bisherigen Diskussion ergibt sich direkt für jedes simple Polyeder mit regelmäßigen Polygonen, dass alle seine Eckenkränze kongruent sind. Diese Kongruenz hätte man auch vorab fordern können mit dem Ziel, gleichartige "Stellen" der Fußballoberfläche (also die Ecken, die inneren Punkte der Kanten und die inneren Punkte der Flächen mit ihren Umgebungen) möglichst homogen zu machen, um eine möglichst gute Kugelform und eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Zugkräfte zu erreichen.

Die nun endlich in den Blick gerückte Kongruenz der Eckenkränze stellt einen wesentlichen Zusammenhang her zwischen der lokalen und globalen Form eines Polyeders. Sie wird daher als ein definitorisches Element für einen besonderen Typ von regelmäßigem Polyeder herangezogen, dem archimedischen Polyeder.

2.3 Der Nutzen des Begriffs des archimedischen Polyeders

<u>Definition:</u> Ein konvexes, nicht notwendig simples, Polyeder, das nur aus regelmäßigen Polygonen besteht und dessen Eckenkränze alle kongruent sind, heißt archimedisch.

Der Eckenkranz eines archimedischen Polyeders enthält höchstens fünf Polygone. Das kleinste Polygon, das Dreieck, trägt nämlich schon 60° zur Winkelmaßsumme bei, die ja unter 360° liegen muss. Wenn man sich also einen Überblick über alle archimedischen Polyeder verschaffen will, betrachtet man die drei Fälle: drei, vier oder fünf Polygone in einem Eckenkranz. In jedem dieser Fälle berechnet man bei den verschiedenen Kombinationen die Winkelmaßsumme und schließt diejenigen aus, bei denen diese ≥360° ist.

Von den verbleibenden Kombinationen scheiden zahlreiche aus kombinatorischen Gründen aus. Wenn man z. B. einen Eckenkranz (m n p) hat und eine der drei Zahlen m, n und p ungerade ist, dann müssen die beiden anderen gleich sein. Also ist (5 5 p) mit p≠5 nicht möglich, weil m=5 ungerade und dann n=5≠p ist. Baut man nämlich (in diesem Beispiel) die Puddingschale mit dem m-Eck als Boden, dann müssen sich bei der Schalenwand n- und p-Ecke abwechseln, damit in jedem Eckenkranz je ein m-, n- und p-Eck enthalten ist. Da m ungerade ist, ist dieses Abwechseln nicht möglich.

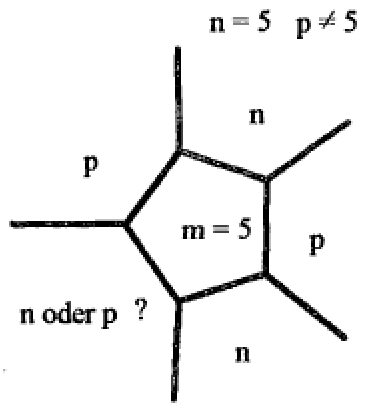


Abb. 9

Ähnliche Regeln gibt es für Eckenkränze mit vier bzw. fünf Polygonen. Dass die dann noch übrigbleibenden Kombinationen alle als Polyeder realisiert werden können, kann man konstruktiv nachweisen: Offensichtlich existieren (3 3 3) (Tetraeder)und (4 4 4) (Würfel = Hexaeder); die Existenz von (5 5 5) (Dodekaeder) ist in 2.2 gezeigt; außerdem sind trivialerweise die Prismen (4 4 n) mit den regelmäßigen n-Ecken als Boden- und Deckflächen und Quadraten als Seitenflächen archimedische Polyeder. Von diesen vier Grundtypen, die man sich am besten als Vollmodelle vorstellt, ausgehend kann man nun durch Abstumpfen von Ecken, Kanten und ähnliche Operationen (bei denen immer auf das Einhalten der Definition zu achten ist!) sämtliche archimedische Polyeder herstellen (s. Aschkinuse 1963 & 1969: 435, 443 & 445). Einige Beispiele:

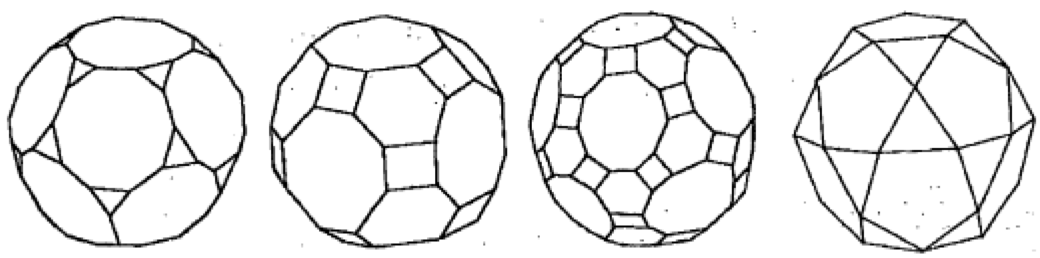


Abb. 10

Bereits bei bloßem Hinsehen erweist sich (5 6 6) als der Kugel am ähnlichsten. Dieses Argument ist jedoch riskant und mathematisch angreifbar. Bezüglich welcher Kriterien ist (5 6 6) der Kugel am ähnlichsten? Z. B. hat (5 5 5) den Vorzug, dass alle Seitenflächen kongruent sind; oder das Prisma (4 4 n) mit n>30 hat eine größere Symmetriegruppe.

Die Größe der Symmetriegruppe ist in der Tat ein Hinweis auf Kugelähnlichkeit. Die vier oben genannten Polyeder haben als Symmetriegruppen die

– Tetraedergruppe mit 12 Elementen (bei 7 Drehachsen),
– Oktaedergruppe mit 24 Elementen (bei 13 Drehachsen),
– Ikosaedergruppe mit 60 Elementen (bei 31 Drehachsen),
– Diedergruppe mit 2·n Elementen (bei n+1 Drehachsen),

wobei die Drehachsen alle durch einen Punkt gehen, den natürlichen Mittelpunkt des Polyeders.

Alle anderen archimedischen Polyeder haben eine dieser vier Gruppen als Symmetriegruppe. Während sich aber bei den drei erstgenannten Gruppen die Richtungen der Drehachsen einigermaßen im Raum verteilen, liegen bei der Diedergruppe (fast) alle Achsen in einer Ebene, und eine einzige steht senkrecht auf dieser. In der Tat wird das Prisma mit wachsendem n der Kugel immer unähnlicher und einer flachen Scheibe immer ähnlicher, weil Boden- und Deckfläche im Vergleich zu den Seitenflächen riesig werden. Man kann es also aus der weiteren Betrachtung ausschließen. Damit ist auch noch einmal das Argument aus 2.2 bestätigt, dass eine große Eckenzahl einer Seitenfläche zwar deren Kreisform förderlich, aber der Kugelform des ganzen Polyeders hinderlich ist.

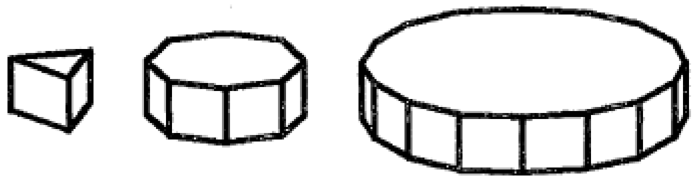


Abb. 11

Nimmt man nun die Größe der Symmetriegruppe als Kriterium, dann kommen diejenigen archimedischen Polyeder in Betracht, die zur Ikosaedergruppe "gehören". Beachtet man noch, dass diese simpel sein sollen, dann bleiben (5 5 5), (5 6 6), (3 10 10) und (4 6 10). Bei einer ungefähr vorgegebenen Größe des Balls zeigt sich nun, dass bei (5 5 5) die Fünfecke und bei (3 10 10) sowie (4 6 10) die Zehnecke sehr große flache Bereiche darstellen und die Polyeder dort sehr stark von der Kugel abweichen (s. Abb. 11).

Für (5 6 6) sprechen weitere Kriterien, für deren Verifizierung man aber stärker in konkrete, z. T. umständliche Berechnungen einsteigen muss: Das ebene Netz des Eckenkranzes hat eine besonders kleine Lücke, nämlich nur 12°. Dies bedeutet, dass die beiden Sechsecke nicht sehr weit geklappt werden müssen, bis sie sich treffen, d. h. dass die räumliche Ecke sehr flach ausfällt (vgl. Abb. 5). – Die Rolle der Neigungswinkel müsste nun quantifiziert werden, z. B.: Rechnet man für alle simplen archimedischen Polyeder die maximale Seitenflächenneigung aus, dann erweist sich die von (5 6 6) als minimal. Dafür ist die kleine Lücke beim Ausbreiten eines Eckenkranzes in die Ebene ein guter Indikator, aber noch kein sicherer Nachweis. Dieser ergibt sich, unter Vermeidung umständlicher Rechnungen, erst dadurch, dass man vergleicht, wie weit bei diversen Polygonkonfigurationen in der Ebene jeweils geklappt werden muss, bis die räumliche Ecke geschlossen ist. Da man nur endlich viele Möglichkeiten prüfen muss, genügen hier qualitative Abschätzungen.

Beim Aufpumpen geht die polyedrische Lederdecke p in eine Kugel über, die etwas größer als seine Umkugel u ist (welche für ein archimedisches Polyeder eindeutig existiert). Während sich die Ecken beim Aufpumpen anfangs fast nicht bewegen, legen die Mitten der Seitenflächen die weitesten Wege zurück, und zwar umso weiter, je größer die Seitenfläche ist. Dieser weiteste Weg, ungefähr die metrische Abweichung $\max_{P \in p}(\min_{X \in u}(d(P;X)))$ des Polyeders p von seiner Umkugel u, normiert mit deren Radius, ist ein direktes Maß für die Verformung. Mit membrantheoretischen Methoden hat Schoop (1986) diese Verformung beim Polyeder (5 6 6) untersucht und dabei erwartungsgemäß festgestellt, dass die mittlere Zugspannung in den Sechsecksmitten etwas größer als in den Fünfecksmitten und dort wesentlich größer als in den Ecken ist.

Weitere Kriterien für Kugelähnlichkeit sind z. B. das Verhältnis der beiden Oberflächeninhalte sowie das Verhältnis der beiden Volumina von Polyeder und Umkugel (bzw. kleinster umfassender Kugel). Alle diese Kriterien führen, unter den simplen archimedischen Polyedern, auf (5 6 6) als Optimum.

An die Beschränkung der Grundmenge muss immer wieder einmal erinnert werden. Z.B. liegt das Verhältnis der Volumina näher bei 1, wenn man bei (5 6 6) alle Kanten zwischen je zwei Sechsecken etwas verkürzt und die Fünfeckskanten entsprechend verlängert, wobei das Optimum bei einer Verkürzung um etwa 10 % liegt (Pedersen 1980). Dieses Polyeder ist nicht archimedisch, weil die Sechsecke nicht regelmäßig sind, aber es hat noch die volle Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe. In der Herstellpraxis wird es dennoch nicht verwendet, da der Unterschied so gut wie nicht spürbar ist. Ein gewichtiges Argument dürfte auch darin bestehen, dass mit dem regelmäßigen Sechseck die Ebene lückenlos parkettiert werden kann, dass also beim Ausschneiden regelmäßiger Sechsecke aus einem flachen Stück Leder weniger Abfall entsteht als bei unregelmäßigen.

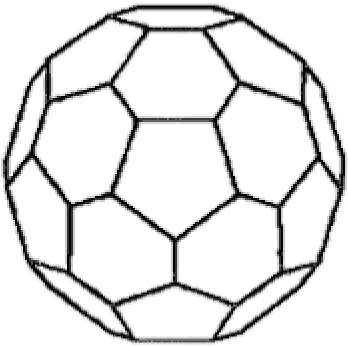


Abb. 12

2.4 Die praktische Verwendung archimedischer Polyeder

In unserer vom Menschen gemachten Umwelt begegnen uns archimedische Polyeder auf Schritt und Tritt. Allerdings wird bei vielen der so geformten Gegenstände nur ein Teil der Eigenschaften gebraucht, die sich aus der Archimedizität ergeben, und diese wird dann häufig nur partiell verwirklicht. Insbesondere haben oft die Kanten unterschiedliche Längen, d. h. die Seitenflächen sind nicht alle vollkommen regelmäßig. Trotzdem ergibt sich in vielen Fällen immer noch einer der vier in 2.3 genannten Typen von Symmetriegruppen.

Prisma (4 4 n): Streckt man bei einem archimedischen Prisma die quadratischen Seitenflächen, so dass diese zu länglichen Rechtecken werden, so hat die neue Form immer noch die volle Diedergruppe als Symmetriegruppe. In dieser abgeschwächten Form sind archimedische Polyeder, insbesondere Quader (Gebäude, Verpackungen, Möbel usw.) allgegenwärtig. Allerdings ist die hohe Symmetrie für den Gebrauch nicht wesentlich, sondern es kommt auf die Orthogonalität der Seitenflächen zueinander bzw. zum Erdboden und auf das Passen solcher Gegenstände aneinander an.

Tetraeder (3 3 3): Ähnlich verhält es sich mit tetraederförmigen Getränketüten. Bei ihrer Herstellung (beschrieben in Wittmann & Müller 1977 & 1984, 127ff) ergibt sich wohl ein Tetraeder. Dessen Kanten müssen aber nicht gleichlang sein und sind es auch nicht. – Die Gerüste für Heuhaufen (sog. Heubock), wie man sie früher auf unseren Feldern sehen konnte, waren oft Tetraeder. Der Nutzen dieser Form liegt nicht in der räumlichen Symmetrie, sondern in der primitiven Herstellbarkeit zusammen mit ihrer Stabilität: Man braucht ja nur sechs, am einfachsten – aber nicht notwendig – gleichlange, Stangen entsprechend zusammenzubinden, und man hat ein simples Polyeder aus vier Dreiecken, die wegen des Kongruenzsatzes SSS alle starr sind.

Wie hier kommt es bei Bauwerken, die archimedisch gestaltet sind, i. Allg. nicht auf die räumliche Symmetrie an, sondern meistens nur auf eine ebene Drehsymmetrie. Trotzdem werden oft alle Flächen (bzw. Kanten) kongruent gewählt. Dies hat zum einen ökonomische Gründe, da die Bauteile dann einheitlich vorgefertigt werden können, und kann zum anderen rein geometrisch bedingt sein: Wir haben schon festgestellt, dass eine durch zwei Flächen vorgeformte räumliche Ecke nur durch eine ganz bestimmte dritte Fläche geschlossen werden kann und dass sich Archimedizität dabei u. U. ganz von selbst einstellt.

Dodekaeder (5 5 5): Brauner & Kickinger (1982, 8) beschreiben ein Kohlensilo, das 1951 in Madrid von E. Torroja mit ökonomisch vorgefertigten fünfeckigen Platten konstruiert wurde. – In der Illustrierten Stern vom 29.12.1988 ist eine von "über 140 festungsartig ausgebauten ... supermodernen jüdischen Siedlungen im Westjordanland" abgebildet, deren Wohneinheiten größtenteils aus Dodekaedern bestehen. Neben der Möglichkeit, eine große Anzahl einheitlicher Platten zu verwenden, könnte ein Grund für diese Bauweise in der Stabilität, z. B. gegenüber Beschuss, solcher kugelähnlichen Wohnwaben liegen.

Würfel (4 4 4): In der Nähe von Eindhoven hat P. Blom Baumhäuser mit würfelförmigen, auf der Spitze stehenden Kronen gebaut (nach Schoemaker u. a. 1981, 149ff). Hier kommt es auf die dreizählige Drehsymmetrie bezüglich einer Eckenachse an. Zunächst stellt man sich den unteren Teil als eine Tüte vor, die aus drei quadratischen Platten zusammengesetzt ist und deren oberer Rand ein gezackter Streckenzug mit drei Ecken oben und drei unten ist. Dass nun eine dazu kongruente Tüte mit der Spitze nach oben genau auf die erste Tüte passt und mit dieser einen Würfel erzeugt, erscheint nun gar nicht mehr so trivial, wie wenn ein Würfel in kanonischer Lage, d. h. mit einer Fläche auf dem Boden, gebaut wird (vgl. den Existenzbeweis für das Dodekaeder). Interessant sind hier auch die Grundrisse der einzelnen Stockwerke.

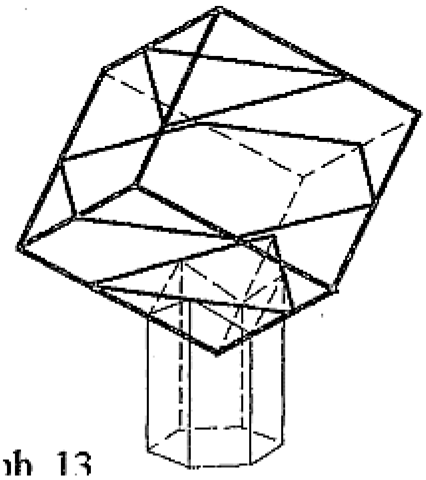


Abb. 13

Ikosaeder (3 3 3 3 3): Seit einigen Jahren sind Bausätze für ikosaederförmige Gartenhäuschen auf dem Markt. Das Ikosaeder ist nicht komplett realisiert; sondern ein Eckenkranz ist entfernt und durch ein (virtuelles) Fünfeck ersetzt, auf dem der Bau auf dem Erdboden aufsitzt. Dies ist bei den wenigsten Polyedern der Fall, dass die Entfernung eines Eckenkranzes eine ebene Schnittlinie ergibt. Der Bausatz besteht i. W. aus 25 Balken, mit denen das Kantenmodell des Rest-Ikosaeders zu konstruieren ist. Das Konstruktionsprinzip beruht auf der Stabilität von Dreiecken (Kongruenzsatz SSS) und der Starrheit der Eckenkränze des Ikosaeders. Diese besteht zwar nicht für einen einzelnen Eckenkranz, aber für das Polyeder insgesamt (nach einem tiefliegenden geometrischen Satz, dass konvexe Polyeder starr sind). Die Seitenwand steht nicht lotrecht, sondern die Dreiecke mit der Spitze nach oben sind nach außen, die anderen sind nach innen geneigt. Die Seitenwand kann also nicht gemauert, sondern nur ausgekleidet werden.

Fußball (5 6 6): Bei dem Haus in Abb. 14 ist die Außenwand aus dreieckigen Platten zusammengesetzt und die Form einer Halbkugel besonders gut angenähert:

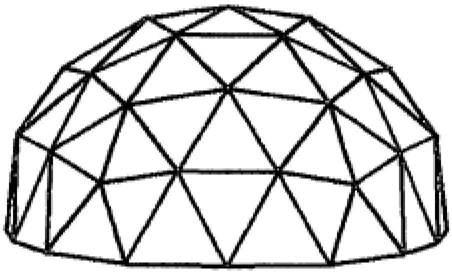
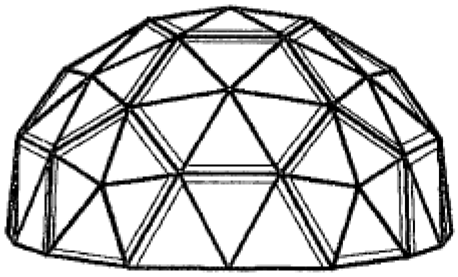
 

Abb. 14

Bei geeigneter Zusammenfassung der Dreiecke entdeckt man, dass diesem Dreiecksflächner (Deltoid) die Struktur (5 6 6) unterliegt. Auf jedes der Fünf- und jedes der Sechsecke ist eine kleine Pyramide gesetzt, deren Spitze der Umkugel näher ist als die ursprüngliche Flächenmitte. Das Deltoid ist nicht archimedisch: Seine Dreiecke sind nicht gleichseitig, sondern nur noch gleichschenklig; außerdem hat es Eckenkränze mit sechs und solche mit fünf Dreiecken. Aber es ist ein Beispiel dafür, dass die Realisierung einer großen endlichen Symmetriegruppe im Raum immer in engem Zusammenhang mit einem der in 2.2 genannten vier Typen von archimedischen Polyedern steht.

Seit einigen Jahren haben sich auch die Chemiker der geometrischen Struktur des Lederfußballs bemächtigt und ein reines Kohlenstoffmolekül C_{60} als Polyeder(5 6 6) mit 60 C-Atomen zunächst theoretisch beschrieben und 1985 hergestellt. Die Atome sind die Ecken. An jedes C-Atom sind genau drei Nachbarn gebunden, und diese $60 \cdot 3/2=90$ Bindungen werden durch Kanten repräsentiert. Jeweils fünf bzw. sechs Atome sind mittels dieser Kanten zu einem Polygon zusammengefasst, und jedes Atom gehört dabei zu einem Fünfeck und zu zwei Sechsecken. Diese Modellierung des Moleküls C_{60} hat einen realistischen geometrischen, chemischen und physikalischen Hintergrund. Sämtliche 60 Atome reagieren auf chemische und physikalische Einwirkungen gleichartig; man hat schon andere Substanzen in den Hohlraum des Moleküls praktiziert; und die gute Kugelform korrespondiert mit einer außerordentlichen Härte und zugleich einer ebensolchen Elastizität (nach Curl & Smalley 1991).

(3 4 3 4): Wir haben bereits einige Spielgeräte kennengelernt zwischen den beiden Extremen "Kugel" und "Würfel". Abgesehen von den in 2.1 angesprochenen Ausnahmen ist räumliche Symmetrie durchweg ein wichtiges Merkmal, es sei denn, man beschränkt sich wie beim Glücksrad auf ebene Symmetrie. Selbst wenn das Gerät eine besonders gute Kugel sein soll, werden auch Formen gewählt, die nicht die Ikosaedergruppe mit 60, sondern nur die Oktaedergruppe mit 24 oder gar die Tetraedergruppe mit 12 Elementen als Symmetriegruppe hat, z. B. bei der früheren Form des Fußballs (s. Abb. 1a).

Anstelle von Würfeln mit 6 Ausfällen kommen als Zufallsgeneratoren auch die anderen platonischen Körper mit 4, 8, 12 oder 20 Ausfällen in Frage. Während das Tetraeder aber zu schlecht rollt und nach dem Wurf die einzige ausgezeichnete Fläche nicht sichtbar ist, rollt das Ikosaeder zu gut und die Fläche, auf der es nach dem Wurf liegen bleibt, ist zu klein. Außerdem ist kein platonisches Polyeder als Vollkörper so leicht herstellbar wie der Würfel. Allerdings rundet man dessen Ecken zum Zwecke des besseren Rollens ab (vgl. Abb. 2c). Diese Abrundung könnte man zum archimedischen Polyeder (3 8 8) idealisieren; jedoch kommt es auf eine einheitliche Kantenlänge beim abgerundeten Würfel nicht an. Wenn man von den Ecken des Würfels noch größere Stücke abschneidet, nämlich die Schnitte durch die Kantenmitten führt, entsteht (3 4 3 4). Dies ist der Kompromiss, den die Erfinder des Tippkick-Spiels für ihren Ball gefunden haben. Auf dem begrenzten Spielfeld soll der Ball nicht so gut wie eine Kugel, aber besser als ein Würfel rollen. Da er ein Vollkörper ist, brauchen Stabilitäts- und Verformungsfragen nicht beachtet zu werden. Die nach der Bewegung oben liegende Fläche gibt mit ihrer Färbung immer genau an, welcher Spieler an der Reihe ist (s. Abb. 15c).

3 Zur unterrichtlichen Realisierung

3.1 Allgemeine Bemerkungen

Vom gewöhnlichen Geometrieunterricht unterscheidet sich eine Einheit "Geometrie des Lederfußballs" nicht nur im Inhalt (genuine Raumgeometrie, zentraler Anwendungsbezug), sondern auch darin, dass das abwägende Argumentieren (Zwecke, Funktionsweise, Optimierung) eine tragende Rolle bei der

Entfaltung dieses Inhalts und bei der Ausbildung der Begrifflichkeit spielt. Dies macht sich weniger im zeitlichen Anteil solcher Diskussionen bemerkbar. Über weite Strecken besteht auch dieser Unterricht aus "reiner" Polyeder-Lehre, eventuell mit praktischer Herstellung von Polyedern, jedoch ohne direkten Anwendungsbezug und, je nach Zielgruppe, mit mehr oder weniger Theorie. Aber diese Polyeder-Lehre steht letztlich im Dienste der Lösung eines realen, echten, interessanten Problems. Insofern ist die Einheit idealtypisch für den anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Ist in einer Sachsituation wirklich anspruchsvolle Mathematik enthalten, so muss der Unterricht sich längere Zeit von der Ausgangssituation entfernen und sich auf das Gebiet der idealen Mathematik begeben, sei es *vor* der Darbietung der Sachsituation oder *anlässlich* dieser Darbietung. Dabei zeigt sich die Potenz einer von der konkreten Situation losgelösten Mathematik. Man empfindet es förmlich als Befreiung, wenn man ein Gebiet wie die archimedischen Polyeder, durchaus angeregt von realen Körpern, ganz allein nach den mathematischen Möglichkeiten in Ruhe aufbauen und strukturieren kann und die Ergebnisse erst danach wieder auf die Realität anzuwenden hat.

Die folgende Beschreibung beruht auf einer eigenen Erprobung im 9. Schuljahr einer Hauptschule, der allerdings nur mäßiger Erfolg beschieden war. Die Schüler waren schon zu lang im Alltagstrott der Schule gefangen. Sie ließen den Unterricht, durchaus gutwillig, über sich ergehen, freuten sich aber auf die Wiederaufnahme des gewohnten Stils durch ihren bewährten Mathematiklehrer. In der Tat kann Anwendungsorientierung und Operative Genese der Geometrie nicht Sache von 14 Tagen sein, sondern muss langfristig angelegt werden.

Die Einheit umfasste acht Unterrichtsstunden zuzüglich einer Stunde für den Abschlusstest und der Zeit für Schüleraktivitäten außerhalb der Schule (sog. Hausaufgaben). Wesentliche Kürzungsmöglichkeiten sehe ich nicht, auch wenn die darin enthaltene Diskussion der archimedischen Parkette scheinbar nicht so eng zum Thema gehört. Diese sind als ebene Objekte manuell und kognitiv leichter handhabbar als die Polyeder, und sie fungieren als systematischer und didaktischer Zugang zu diesen. Da es bei ihnen weniger Varianten gibt, ist es leichter, die vollständige Menge aller Typen zu bestimmen. Dies können "die" Schüler – mit Hilfe – selbst leisten, und man kann es sich dann erlauben, ihnen eine fertige Sammlung der archimedischen Polyeder vorzulegen, die allerdings noch strukturiert werden muss.

Die Ermittlung aller archimedischen Parkette, in Verbindung mit dem Nachweis, dass es keine weiteren gibt, ist das Musterbeispiel eines sinnvollen Beweises im Geometrieunterricht. Da werden keine den Schülern anschaulich klare Sachverhalte verdunkelt, sondern echte Fragen konstruktiv beantwortet.

Anders als in der Stoffanalyse in Kap. 2 entsteht der Begriff des archimedische Polyeders nicht fast zwangsweise aus der Analyse der Kriterien für die Lederdecke des Fußballs, sondern er wird von der Lehrperson eingebracht. Das Vorgehen hierbei ist also analytisch und nicht synthetisch, und damit – global gesprochen – schülergemäßer. Hierin eine Einengung selbstständiger Schüleraktivitäten zu sehen, halte ich für einen realitätsfremden Einwand.

Eine Fortsetzung der Einheit innerhalb der Mathematik ist dagegen in viele Richtungen in beliebigem Umfang möglich:

- Gruppen, insbesondere Symmetriegruppen,
- topologische und kombinatorische Betrachtungen im Umfeld der Euler-Charakteristik,
- Trigonometrie, insbesondere zur Berechnung von Flächenneigungen,
- nicht-archimedische Polyeder, z. B. Deltoide oder nicht-konvexe Polyeder, auch die archimedischen Sterne,
- archimedische Polyeder ausführlicher, u. a. die dualen.

3.2 Ein möglicher Verlauf

An Materialien werden eingesetzt: Papier, Bleistift, Pappe, Scheren, Klebstoff, Schablonen von

Polygonen, Lineale, Winkelmesser, Taschenrechner, Arbeitsblätter mit Definitionen, Ergebnissen oder Aufgaben, Drucke aller archimedischen Parkette, Baupläne für die platonischen Polyeder, Abbildungen aller archimedischen Körper, Tageslichtprojektor mit Folien des gesamten Materials für die Schüler, Wandtafel mit Kreide und nicht zuletzt zahlreiche Bälle und ähnliche Körper mit verschiedenen geometrischen Oberflächenstrukturen.

Die Schüler beschreiben die anfangs vorliegenden Bälle und ähnlichen Körper. Ihre Aufmerksamkeit wird auf die geometrische Oberflächenstruktur gelenkt. Insbesondere für den Fußball wird die Zweckmäßigkeit genauer analysiert und die Eignung anderer Bälle für denselben Zweck geprüft. Diese Unterrichtsphase darf nicht zu lange dauern. In einer halben Stunde sollten aber einige wesentliche Gesichtspunkte angesprochen sein. Die Problemstellung, die die Aktivitäten der nächsten Stunde leitet, muss wohl vom Lehrer eingebracht werden: Gibt es vielleicht eine noch günstigere Oberflächenstruktur? Welche Möglichkeiten kommen denn überhaupt sonst in Frage? Dieses Problem wird im Rest der ersten und in den nächsten Stunden von ebenen Parketten aus angegangen. Startend mit Parketten der Umwelt (Bürgersteige, Fußböden, Mauern usw.) wird der Parkettbegriff zunehmend spezialisiert bis zu dem des archimedischen Parketts. Auch hier werden, allerdings nur knapp, Zweckanalysen durchgeführt. Nach bestimmten Vorgaben zeichnen, legen, beschreiben die Schüler Parkette. Wir zeigen, dass die Ebene mit jedem Dreieck und mit jedem (auch nicht-konvexen) Viereck parkettiert werden kann. Mit anderen n-Ecken ist das i. Allg. nicht möglich. Die Schüler erkennen die Bedeutung der inneren Winkel der Polygone und entwickeln ein Verfahren zur Ermittlung der Winkelmaße bei regelmäßigen Polygonen. Es wird eine Tabelle erstellt für dieses Winkelmaß in Abhängigkeit von der Ecken-Anzahl, die im weiteren Verlauf dauernd verwendet wird.

Die archimedischen Parkette werden mit Hilfe ihrer Eckenkränze symbolisiert, z. B. 3 4 3 4 3 im Kreis angeordnet (hier im Aufsatz aus satztechnischen Gründen (3 4 3 4 3) geschrieben). Es entsteht die Aufgabe, alle archimedischen Parkette zu finden. Nach eher zufälligen Versuchen wird gemeinsam eine Systematisierung entwickelt. Man kann vier Fälle unterscheiden, je nachdem, wie viele Polygone in einer Ecke zusammenstoßen. Diese Fälle werden in Gruppen bearbeitet, und die Ergebnisse der einzelnen Gruppen werden dann zusammengetragen. Es kommt weniger darauf an, dass jeder Schüler jedes Parkett selbst findet, sondern auf die Einsicht, dass es nur endlich viele gibt, und auf die prinzipielle Verfügbarkeit einer Methode, mit der man alle finden kann. Der Einsatz des Computers hierbei wäre unangemessen.

Der Übergang zu räumlichen Parketten (= Polyeder) wird über Fünfecke geleistet. Mit regelmäßigen Fünfecken lässt sich die Ebene nicht pflastern; denn legt man drei Fünfecke um einen Punkt, bleibt eine Lücke von 36°. Klappt man zwei davon hoch, so entsteht plötzlich ein ausgefüllter Eckenkranz, jetzt ein räumliches Gebilde. Baut man entsprechend weiter, dann entsteht ein geschlossener Körper. Die Schüler erhalten den Bauplan des Dodekaeders, stellen es als Flächenmodell her und bilden in Analogie zum Begriff des archimedischen Parketts den des archimedischen Körpers (Polyeders), wobei sie Definition und Symbolik ohne Änderungen übernehmen können, also hier (5 5 5).

Zunächst werden dann die platonischen Körper studiert und mit Hilfe fertiger Netze als Flächenmodelle hergestellt. Beim Vergleich dieser fünf Körper fällt auf: Die Kugelform wird umso besser angenähert, je kleiner die Lücke ist, die ein Eckenkranz lässt, wenn er in die Ebene ausgebreitet ist. Die Lücke kann noch kleiner gemacht werden, wenn man in einem Eckenkranz auch verschiedenartige Polygone zulässt. Die Schüler schlagen Möglichkeiten mit kleinen Lücken vor und realisieren in Teamarbeit die entsprechenden archimedischen Körper in Teilen.

Die Frage, welche archimedischen Körper es gibt und wie sie alle zu finden sind, wird durch ein Übersichtsblatt mit der Abbildung aller Typen und dem Hinweis beantwortet, dass man den Nachweis genau wie bei den Parketten führen kann. Damit sich die Schüler wenigstens einmal mit allen archimedischen Körpern beschäftigen und sie dabei bewusst wahrnehmen und auf ihre Kugelähnlichkeit prüfen, erhalten sie aber die Aufgabe, an jeden seine Charakteristik zu schreiben. Rein optisch erweist sich das Polyeder (5 6 6) als allen anderen klar überlegen. Dieses Kriterium, möglichst gut wie eine Kugel auszusehen, gibt im Unterricht den Ausschlag.

Ein bisschen sollte man sich in der Menge der archimedischen Körper noch umsehen und z. B. darauf eingehen, wie bei Vollmodellen durch Abschneiden von Ecken gewisse Typen aus anderen, insbesondere den platonischen, erzeugt werden können, z. B. (5 6 6) aus dem Ikosaeder oder nacheinander (3 8 8), (3 4 3 4), (4 6 6) und (3 3 3 3) aus dem Würfel.

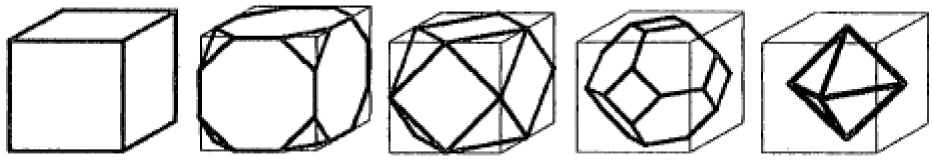


Abb. 15

Erst jetzt kehrt der Unterricht zu realistischen Anwendungen zurück: Es werden bekannte Gegenstände aus der Umwelt genannt, die die Form archimedischer Körper haben, und diese Formen begründet.

3.3 Aufgaben für einen Test

1. Beschreibe die Oberfläche des heutzutage üblichen Fußballs, und gib vier Gründe für diese Oberflächengestaltung an.
2. Vervollständige die Tabelle:

Eckenzahl	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Winkelmaßsumme	180	360		720	900	1080		1440	1620	1800
Einzelwinkel	60	90		120	128,6		140	144	147,3	150

3. Zeichne das archimedische Parkett mit dem Eckenkranz (3 6 3 6).
4. Setze für x eine Zahl ein, so dass (3 x 6 4) der Eckenkranz für ein archimedisches Parkett wird.
5. Gib einen gebräuchlichen Namen für den archimedischen Körper (4 4 4) an.
6. Nenne drei Gegenstände, die dir in deiner Umwelt schon begegnet sind und die die Form von archimedischen Körpern haben; nenne jeweils einen Grund für die Formgebung; und schreibe den Eckenkranz dazu.
7. Prüfe bei den folgenden Parketten, ob sie archimedisch sind. Wenn du ein Parkett nicht für archimedisch hältst, gib eine Begründung an. Wenn du es für archimedisch hältst, schreibe den Eckenkranz auf. (Zeichnungen von einigen Parketten)
8. Wie kann man ohne Zeichnung erkennen, dass (3 12 12) ein ebenes archimedisches Parkett und (3 10 10) ein archimedischer Körper ist?
9. Welches Winkelmaß hat die Lücke, die bleibt, wenn man je ein regelmäßiges Drei-, Sechs- und Neuneck in der Ebene um einen Punkt herum aneinanderlegt?

4 Nachtrag zwanzig Jahre später

Bis 1970 waren die üblichen Fußbälle durchweg von der Würfelform abgeleitet. Allerdings setzten sich die sechs Seitenflächen wiederum aus mehreren Teilen zusammen. Dadurch wurden die vierzähligen Symmetrieachsen der Würfelflächen zweizählig, die Symmetrieachsen der Würfelkanten fielen weg, und bei der Symmetriegruppe handelte es sich nicht um die Oktaedergruppe mit ihren 24 Elementen, sondern um die halb so große Tetraedergruppe. In (Ludwig 2008, 101ff) sind für diese Bälle sowie für zahlreiche Varianten die räumlichen Beziehungen zwischen ihnen, ihren "zugehörigen" archimedischen Körpern und den Symmetriegruppen schön veranschaulicht. Der Akzent ist allerdings auf die Gruppen gelegt, und dabei wird der eigentliche Würfelcharakter der Oberflächenstruktur dieser Bälle etwas verdunkelt.

Nachdem der Fußball mit der Struktur (5 6 6) 1970 der Öffentlichkeit präsentiert worden war, verdrängte er bald die bis dahin üblichen Fußbälle. Trotz allerlei Neuentwicklungen ist er heute noch weltweit verbreitet, – auch wenn hin und wieder seine Struktur wegen einer willkürlich davon abweichenden Farbgebung erst bei genauerem Hinsehen zu erkennen ist.

Einige dieser Neuentwicklungen sollen im Folgenden betrachtet werden. Das Auswahlkriterium ist ein sehr äußerliches: es handelt sich um die drei Bälle, die bei den jüngsten Fußballweltmeisterschaften vom Veranstalter FIFA als die "offiziellen" vorgestellt wurden.

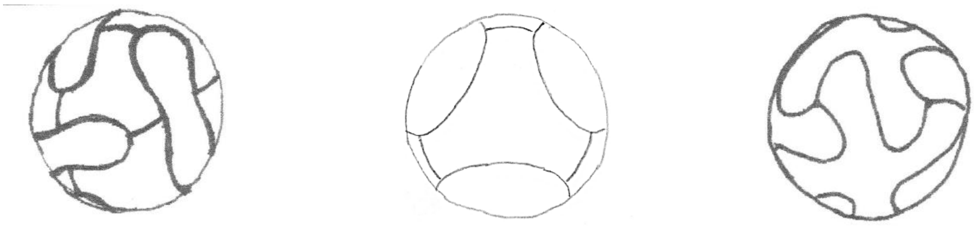


Abb. 16:2006 in Deutschland 2010 in Südafrika 2014 in Brasilien

Beim Fußball von 2006 gibt es keine möglichst kreisähnlichen Polygone mehr, aus denen sich die Oberfläche zusammensetzen würde. Im Gegenteil, die Panels (die Einzelteile der Decke) sind dezidiert nicht-konvex gestaltet; die "Nähte" verlaufen nicht gerade, und die Symmetriegruppe ist nicht mehr vom Typ "Ikosaeder" mit 60, sondern wieder "nur" vom Typ "Tetraeder" mit zwölf Elementen. Erneut stellt man sich günstigerweise trotzdem nicht das Tetraeder, sondern den Würfel als Urform vor: die "Katzenzungen" kommen von den Würfelquadraten, lassen aber nur 180°-Symmetriedrehungen zu, die dreiflügligen Panels kommen von den Würfelecken.

Als Liebhaber der archimedischen Körper habe ich bedauert, dass hier der Zweiunddreißigflächner vom Thron seiner schönen Anwendung geholt wurde. Zugleich wurde mit dieser Abkehr von der Archimedizität das Prinzip der Operativen Begriffsbildung (POB) aus (Bender & Schreiber 1985 & 2012) in glänzender Weise bestätigt: neben dem Gebrauch ist eben das Herstellverfahren ein wesentlicher Einflussfaktor für die Gestaltgebung einer nutzbaren Form.

Die Schweineblase im Innern und das Leder der Decke sind durch Kunststoffe ersetzt, die noch robuster sind, Feuchtigkeit nicht aufnehmen, sondern abweisen, und die eine Gestaltung der Mikrostruktur der Oberfläche zulassen, die für stabilere Flugbahnen sorgt. Das Gerät ist insgesamt komplexer aufgebaut und besteht aus mehreren Schichten aus verschiedenen Materialien. Nach wie vor ist aber die Decke aus mehreren Panels zusammengesetzt.

Der Tennisball ist ein Beispiel für eine Kugeloberfläche, die aus zwei Stücken besteht. Seine Drehsymmetriegruppe ist die Kleinsche Vierergruppe, die man auch als Diedergruppe des "zwei"eckigen Prismas auffassen kann.

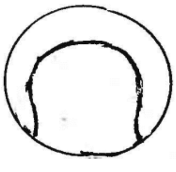


Abb. 17

Wegen des verwendeten Materials kommt man beim Fußball – jedenfalls derzeit noch – mit so wenigen Stücken nicht hin. Aus physikalischen Gründen reichen ein oder zwei Stück für die komplette Kugeloberfläche nicht, weil sie aus ebenen Stücken ausgeschnitten werden und anschließend ihre Wölbung verpasst bekommen. Ein Ziel scheint jedoch zu sein, ihre Anzahl klein zu halten, vermutlich, um die Herstellung zu vereinfachen. Und da die Stücke nicht mehr zusammengenäht, sondern auf die Karkasse geklebt und verschweißt werden, kann auf ihre Konvexität verzichtet werden.

Zahlreiche weitere interessante Details brauchen hier nicht dargestellt zu werden. Man findet sie alle in Wikipedia, wenn man unter dem Stichwort "Herstellung des Lederfußballs" und von da aus unter zusätzlichen Stichwörtern stöbert.

Beim Ball von 2010 besteht die Oberfläche nur aus acht Panels. Man erkennt die Struktur direkt als vom Tetraeder abstammend. In den fast kreisrunden Panels sieht man die Flächen und in den vier "sechseckigen" Panels die Ecken des Tetraeders, zusammen mit je drei halben Kanten, welche flächig ausgeformt sind.

Die Oberfläche des Balls von 2014 ist eine besondere Novität. Sie besteht aus nur noch sechs Panels in Form von vierarmigen Propellern, die so weit von der Konvexität entfernt sind, dass ihre Urform (die Quadrate eines Würfels) kaum noch zu erahnen ist. Die Symmetriegruppe ist überraschenderweise wieder größer, nämlich vom Typ "Oktaeder". Mit seinen Armen verbindet ein solches Panel weit auseinander liegende Teile der Oberfläche und lässt sich leichter der Kugelform anpassen als kompaktere Stücke mit gleichem Flächeninhalt.

Im Handballsport wird munter weiter der Zweiunddreißigflächner verwendet. Allerdings wird dort ja der Ball nicht getreten, sondern – sanfter – mit der Hand gespielt, er ist kleiner, seine Flugbahnen sind i. Allg. kürzer, er ist nicht Kälte, Nässe und Wind ausgesetzt, und Hallenböden reagieren i. d. R. gleichmäßiger als gewöhnliche Fußballrasen. Ein Handball muss also insgesamt niedrigere physikalische Anforderungen erfüllen, und da zudem der Handballsport weniger populär ist, wird bei ihm auch weniger Innovations- und Reklameaufwand getrieben.

Wer denkt sich eigentlich immer wieder diese neuen Formen aus? Es sind die Ingenieure des deutschen Sportartikelherstellers Adidas, der seit 1970, aktuell bis 2030, den Weltfußballverband FIFA vertraglich an sich gebunden hat und seitdem der Entwickler der FIFA-"offiziellen" Fußbälle sein darf, die regelmäßig anlässlich größerer Ereignisse wie Fußballweltmeisterschaften u. a. veröffentlicht und dort auch benutzt werden. In welchem Sinn hier noch eine Optimierung einer geometrischen Form stattfindet, sei dahingestellt. Jedenfalls wird ein weltweiter Reklameeffekt erzielt. Selbstredend gibt es noch mehr Hersteller, und deren Bälle sind bestimmt nicht von schlechterer Qualität.

Mögen die Oberflächen aller dieser modernen Bälle noch so ausgefallen strukturiert sein, man kann immer einen archimedischen, letztlich sogar einen platonischen, Körper mit seinen Drehsymmetrien in ihnen erkennen.

Literatur

[1] Aschkinuse, W. G. (1963 & 1969): Vielecke und Vielflache. In: P. S. Alexandroff, A. I.Markuschewitsch& A. J. Chintschin (Hrsg.): Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band 4. Moskau 1963. Dt.: Berlin: Verlag der Wissenschaften 1969, 393-456.

[2] Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985 & 2012): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, Reprint Berlin: epubli (2012).

[3] Blum, Werner (1991): Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects. In: Mogens Niss, Werner Blum & Ian Huntley (Hrsg.): Teaching of Mathematical Modelling and Application. Chichester: Ellis Horwood, 10-29.

[4] Brauner, Heinrich & Walter Kickinger (1982): Gebaute Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 28, Heft 2, 5-28.

[5] Curl, Robert F. & Richard E. Smalley (1991): Fullerene. In: Spektrum der Wissenschaft 1991, Heft 12, 88-98.

[6] Ludwig, Matthias (2008): Mathematik + Sport. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

[7] Müller, Gerhard & Erich Chr. Wittmann (1977 & 1984): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg 1977, 3. Aufl. 1984.

[8] Pedersen, J. J. (1980): Geometry is Alive and Well: The Coxeter Symposion in Toronto. In: Two-Year College Mathematics Journal 11, 19-25.

[9] Schoemaker, George, Aad Goddijn, Jan de Lange & Martin Kindt (1981): Neuer Geometrie-Unterricht auf der Sekundarstufe. In: Hans-Georg Steiner & Bernard Winkelmann (Hrsg.): Fragen des Geometrieunterrichts. Köln: Aulis, 99-155.

[10] Schoop, Heinrich (1986): Wie rund ist ein Fußball? In: Didaktik der Mathematik 14, 1-11.