

## Diskussion

### Logbuch Mathematik, *Mitteilungen* 26-4 (2018)

Die Ausführungen von Thilo Kuessner zum Konvergenzverhalten der Folge

$$x_0 := x, x_{n+1} := x^{x^n} \quad (n \geq 0)$$

der iterierten Potenzen einer festen reellen Zahl  $x > 0$  möchte ich wie folgt ergänzen:

Die Folge  $(x_n)_{n \geq 0}$  konvergiert *genau* für  $e^{-e} \leq x \leq e^{1/e}$  (einschließlich der Intervallgrenzen!), und zwar konvergiert die Folge gegen die im Intervall  $[e^{-1}, e]$  gelegene eindeutig bestimmte Lösung  $t$  der Gleichung  $t^{1/t} = x$ . (Für  $x = \sqrt{2}$  konvergiert  $(x_n)_{n \geq 0}$  daher gegen  $t = 2$ , da  $1 < \sqrt{2} < e^{1/e} = 1,444668\dots$  und  $2 < e$ . Auch für  $x = 3^{1/3}$  konvergiert  $(x_n)_{n \geq 0}$ , da  $3^{1/3} < e^{1/e}$ , aber die Folge konvergiert *nicht* gegen 3, sondern gegen die in  $[1, e[$  gelegene Lösung  $t$  der Gleichung  $t^{1/t} = 3^{1/3}$ .)

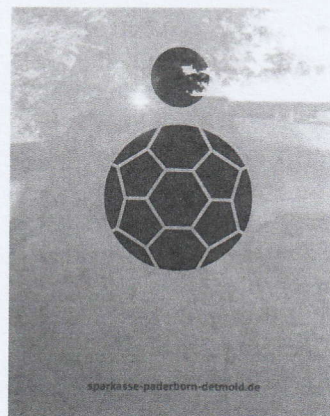
Für  $0 < x < e^{-e}$  konvergiert  $(x_{2n})_{n \geq 0}$  streng monoton wachsend gegen einen Limes  $u$ ,  $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$  streng monoton fallend gegen einen Limes  $v > u$ , und  $x, u, v$  lassen sich als bijektive Funktionen eines Parameters  $s > 0$  darstellen. Weitere Einzelheiten findet man bei J. Elstrodt, Iterierte Potenzen. *Math. Semesterber.* 41 (1994), 167–178.

Zum vorliegenden Problemkreis gibt es eine ausgedehnte Literatur; siehe S.J. Anderson, Iterated Exponentials. *Amer. Math. Monthly* 111 (2004), 668–679, und R. A. Knoebel, Exponentials reiterated. *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), 235–252.

Jürgen Elstrodt, Münster

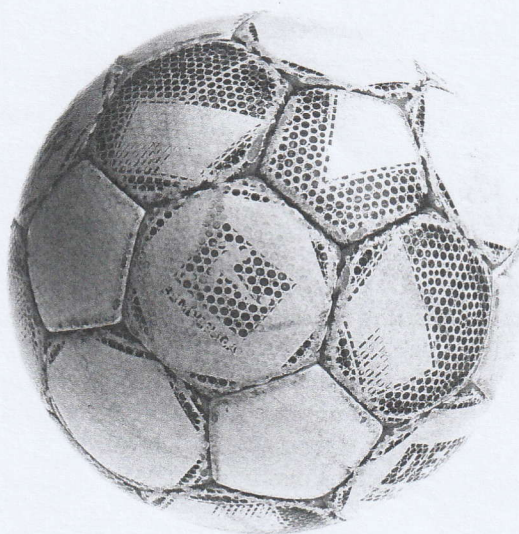
### Sparkassen-Fußball

2018 haben viele deutsche Unternehmen in ihre Reklame die damals stattfindende Fußballweltmeisterschaft einbezogen und zum Beispiel das Spielgerät, den Fußball, abgebildet.



Die Grafiker der Sparkasse Paderborn-Detmold beziehungsweise die ihrer Werbeagentur hatten offenbar mitgekriegt, dass dieser nicht nur aus Sechsecken besteht, sondern auch Fünfecke enthält. Dann haben sie ihrem Fußball aber gleich ein paar Fünfecke zu viel beziehungsweise an falschen Stellen spendiert.

Peter Bender, Paderborn



(Foto: Christoph Eyrich)