Entwicklungen bei didaktisch-orientierten Softwarewerkzeugen zur Geometrie

Vom interaktiven Programmieren zur direkten Interaktion

Rolf BIEHLER, Bielefeld

Kurzreferat: Entwicklungstendenzen in der Unterrichtssoftware zur Geometrie werden am Beispiel der drei werkzeugartigen Programme LOGO, Geometric Supposer, Cabri Géomètre in historischer Perspektive aufgezeigt. Für die Beurteilung der Software und der mit ihr verbundenen didaktischen Intentionen wird ihre *didaktische Offenheit*, ihre Eignung als kognitives Werkzeug für die Lernenden sowie ihr Verhältnis zu mathematischem Wissen untersucht, welches sowohl die neu eingeführten Repräsentationsmittel als auch die curriculare Topographie, die Epistemologie und die Arbeitsweise der Mathematik betrifft.

Abstract: The historical succession of tool-like programs for geometry teaching is analyzed. LOGO, The Geometric Supposer, and Cabri Géomètre are taken as representatives for a typical development towards a new kind of interactive software. In which sense can this development be regarded as „progress"? The pedagogical *openess* of the software, its qualification as a cognitive tool for the learners is analyzed as well as the relation to mathematical knowledge. The focus is on the new mathematical representations that are offered by the software and on the effects on the curricular topography, epistemology and working style of mathematics.

ZDM-Classification: G10, R20, U70

1. Einleitung

Die Entwicklungen im Bereich der Unterrichtssoftware zur Geometrie lassen sich grob in drei Richtungen einteilen:

- Entwicklung von Werkzeugen zum Geometrietreiben
- Entwicklung von Programmen, die auf die Visualisierung und experimentelle Untersuchung spezieller geometrischer Sachverhalte zugeschnitten sind
- Entwicklung von Intelligenten Tutoriellen Systemen (ITS) zur Unterstützung des Geometrielernens und -treibens

Die Entwicklungen sind nicht unabhängig voneinander: Die Entwicklung von ITS-Komponenten baut häufig auf Werkzeugen zum Geometrietreiben auf, beispielsweise das System GEOLOG von G. Holland. Werkzeuge zum Geometrietreiben lassen sich zur Visualisierung vieler spezieller Zusammenhänge nutzen.

Wir wollen uns in diesem Beitrag auf die Entwicklung von Werkzeugsoftware konzentrieren und an einigen Beispielen wichtige Veränderungen, möglicherweise Fortschritte, aufzeigen und analysieren. Dabei wollen wir allgemeine Entwicklungstendenzen in der Softwareentwicklung zur Analyse heranziehen und nicht so sehr allein aus der Geometriedidaktik heraus argumentieren. Als wichtige Repräsentanten sollen LOGO, die Geometric Supposer und Cabri Géomètre betrachtet werden. Aus Platzgründen können diese Programme in diesem Artikel nicht durch Beispiele näher vorgestellt werden. Bei Schumann (1988) findet man eine Übersicht und einen exemplarischen Vergleich der Interaktionsstile.

Diese drei nacheinander entstandenen Programme repräsentieren bestimmte Generationen und Typen von didaktisch orientierter Werkzeugsoftware. Die späteren Programme sind zum Teil aus der Kritik der früheren entstanden, konnten aber auch auf anderen Software- und Hardwarevoraussetzungen aufsetzen. Ihnen gemeinsam ist die Entstehung in einem didaktisch-pädagogischen Forschungskontext, in dem zugleich auch erhebliche Kompetenz und Kapazität hinsichtlich der Softwaregestaltung und -entwicklung angesiedelt ist.

LOGO ist dabei nicht nur schlicht als eine höhere Programmiersprache oder nur als Mikrowelt zur Turtle-Geometrie zu verstehen, sondern als relativ universell gemeintes mathematiknahes Medium, in dem spezielle Mikrowelten zu verschiedensten Themenbereichen erstellt werden können. Die Geometric Supposer wurden von J. L. Schwartz und M. Yerushalmy 1985 entwickelt. Mittlerweile gibt es eine Vielzahl von Begleitmaterialien und empirischen Untersuchungen zum Einsatz dieser Software im Unterricht. Sie stellen geschlossene benutzerfreundliche Systeme zur Geometrie aus Zeiten des Apple II Computers dar. Dieser Entstehungskontext ist auch den später vorgenommenen Implementationen auf den Betriebssystemen MS-DOS und Apple Macintosh anzumerken. Cabri Géomètre ist an der Universität Grenoble entwickelt worden, in Verbindung von einer Informatiker- und Mathematikdidaktikergruppe. Dieses Programm ist hinsichtlich der Benutzerschnittstelle und der Interaktionsstruktur eine typische Software mit der graphischen Benutzerschnittstelle der Apple Macintosh Computer, sie ist zu den erweiter- und adaptierbaren Systemen zu rechnen. Die Anpassung kann der Benutzer vornehmen, ohne sich im „Quellcode" des Programms wie z. B. bei LOGO zurechtfinden zu müssen.

Cabri kann man derselben Klasse von Software zuordnen wie GEOLOG, Felix und Geometer's Sketchpad, insofern ist es hier als Repräsentant zu verstehen. Auf der anderen Seite nimmt Cabri am weistestgehenden Konzepte einer graphischen Benutzerschnittstelle mit direkten Manipulationsmöglichkeiten auf, wie sie die moderne Softwaregeneration kennzeichnet. Dies stellt für die weitere Diskussion einen günstigen Vergleichspunkt dar.

Legt man lediglich softwaretechnologische Fortschrittskriterien an, so findet man hier den für viele Anwendungsbereiche typischen historischen Übergang von universell einsetzbaren höheren Programmiersprachen über relativ geschlossene Anwendersysteme – die zwar *bedienungs*freundlich, aber nicht unbedingt *benutzer*freundlich sind, da nur eingeschränkt verwendbar, – zu modernen flexiblen und adaptierbaren Anwendersystemen vor.

2. Zur Beurteilung von Werkzeugsoftware

Der hiermit charakterisierte softwaretechnologische Fortschritt kann aber nicht notwendigerweise und schon gar nicht automatisch auch als Fortschritt aus *mediendidaktischer* oder *fachdidaktischer* Sicht gewertet werden. Was wir hierunter verstehen wollen, soll im folgenden genauer erläutert werden. Diese drei Dimensionen oder Perspektiven liegen den Softwareanalysen bei Biehler, Winkelmann & Rach (1988) zugrunde (vgl. auch Biehler & Winkelmann 1988 und Biehler 1991 für eine ausführliche Darstellung).

2.1. *Mediendidaktische Aspekte*

Die mediendidaktische Perspektive abstrahiert von fachspezifischen Besonderheiten und sieht Software als ein Medium und Arbeitsmittel im Unterricht, das mit der außerschulischen Nutzung von Medien und Arbeitsmitteln auf komplexe Weise verknüpft ist. Zentrale Kriterien und Anforderungen sind:

1) *Die didaktisch-pädagogische Entwicklungsfähigkeit und der Gestaltungsspielraum für Lehrende und Curriculumentwickler (Offenheit)*
Werkzeugsoftware erlaubt i.d.R. einen größeren Gestaltungs- und Entwicklungsspielraum für die Unterrichtenden und die Curriculumentwickler hinsichtlich gewählter thematischer Schwerpunkte und didaktisch-methodischer Entscheidungen. Offenere Curricula werden möglich, welche auch hinsichtlich der Software offen und veränderbar bleiben. Unterricht bleibt mindestens so gestaltbar wie bei traditionellen Medien. Dies setzt allerdings i.d.R. ein adaptier- und erweiterbares System voraus. Eine spezielle *Lehrerschnittstelle* kann den Lehrenden Möglichkeiten für die Gestaltung der Software im Unterricht eröffnen.

2) *Die Eignung als kognitives Werkzeug für SchülerInnen*
Das kognitive System der SchülerInnen kann sich vermittels (kulturell entwickelter) Werkzeuge so entwikkeln, daß eine Verstärkung alter oder qualitativ neue Formen des Denkens und Problemlösens hervorgebracht werden (Verstärkungs- und Umorganisationsmetapher), Computer werden als eine kognitive Technologie zur Stärkung der SchülerInnen (empowerment) eingesetzt (Pea 1987, Dörfler 1991).
Bei Kaput (1988) finden wir diesbezüglich Anforderungen, die auch allgemein in der Softwareergonomie formuliert werden:
- *Transparenz* (Durchschaubarkeit)
- *Natürliche Ko-Evolution* von Werkzeug und geistigem Wachstum der Lernenden

Die Forderung nach Transparenz bleibt auch im Zeitalter komplexer „black boxes" ein aufklärerisches Postulat, das aber nur dann realistisch ist, wenn es im Sinne benutzer- und problembezogener Modellvorstellungen über die Wirkungsweise und Struktur von Softwarewerkzeugen interpretiert wird. Software muß so gestaltet sein, daß die Entwicklung solcher Vorstellungen möglich ist.

Die Forderung nach Ko-Evolution beinhaltet, daß nur *eine* Werkzeugsoftware unterrichtsbegleitend verwendet wird, um Vielfalt und Inkohärenz für Lehrende und Lernende zu vermeiden. Das Prinzip erkennt an, daß das Paradox zwischen Komplexität und wachsenden Ansprüchen an Software nur dynamisch aufgelöst werden kann. Dies kann die Mitgestaltung der Software durch die Lernenden einschließen.

2.2 Fachdidaktische Aspekte

Aus der fachdidaktischen Perspektive ist eine der wesentlichen Fragen, in welcher Beziehung Softwarewerkzeuge zur Mathematik, bzw. zu mathematischem und mathematikbezogenem Wissen stehen. Man muß hier von Chancen der Weiterentwicklung und zugleich von tiefen Irritationen sprechen.

1) *Repräsentationsmittel und Werkzeuge*
Mit der Informationstechnologie werden neue Formen von Repräsentationsmitteln sowie *verbundene multiple Darstellungen* verfügbar, die die Bedeutung dessen, was man unter dem Lernen und Anwenden von Mathematik versteht, radikal verändern (Kaput 1986, S. 188). Programmiersprachen und neue Visualisierungen verändern sich schneller als die traditionelle symbolische Notation der Mathematik und erzeugen neuartige Probleme der Auswahl und der Anpassung. Die Funktion und das relative Gewicht einzelner Repräsentationssysteme und -mittel verschiebt sich. Neue Darstellungen in Form (virtueller) Maschinen kommen hinzu. Nicht alle Werkzeuge werden als sinnvoller Bestandteil von Mathematik akzeptiert.
Es wird häufig erwartet, daß man fachspezifisch profitieren kann von technologischen Entwicklungen, die zum *Verschwinden der Benutzerschnittstelle* als vermittelnder Instanz zugunsten einer direkten Operation mit den mathematischen Objekten und Darstellungen führen können (Kaput 1988). Weiterhin können die neuen Repräsentationsmöglichkeiten als *mediale Brücke* genutzt werden. Mit „medialer Brücke" soll hier die didaktische Forderung bezeichnet werden, solche Repräsentationen und Umgangsweisen zu nehmen, die einerseits stärker mit dem Erfahrungshintergrund der SchülerInnen verbunden sind, andererseits einen Übergang zu den üblicheren mathematischen Repräsentationen erlauben. Dieses Prinzip ist bezogen auf die Nutzung der Computertechnologie ursprünglich vor allem von Papert (1980) herausgestellt worden (siehe auch Fey (1989, S. 256), der von Systemen mit „intermediate abstractness" spricht).

2) *Topographie, Epistemologie und Arbeitsweise der Mathematik*
Neue inner- und außermathematische Querverbindungen werden möglich oder naheliegend, andere curriculare Topographien werden denkbar; Erkenntnismethoden, Arbeitsweisen und Begriffsstrukturen verändern sich. Dies betrifft Formen explorativen, experimentellen Arbeitens, aber auch konstruktives, herstellendes Arbeiten in der Mathematik. Die Verbindungen zu Anwendungen und zur Informatik gefährden die Identität der Mathematik.

Die vorausstehenden Beurteilungsdimensionen und Anforderungen definieren die Perspektive, aus der im folgenden analysiert werden soll. Dabei wird nicht nur die Software „an sich" betrachtet, sondern auch die damit verbundenen didaktischen Intentionen.

3. Von LOGO zum Cabri Géomètre

LOGO verdeutlicht exemplarisch die „topographische Irritation" der Schulmathematik durch die Computertechnologie. Verbunden mit der Einführung von LOGO war eine andere Grundkonzeption der Geometrie. Papert spricht von einem algorithmischen Stil der Geometrie, die Geometrieauffassung lehnt sich stark an die intrinsische Geometrie an (vgl. Richenhagen 1985 zur Kritik an dem universellen Anspruch dieser Geometrieauffassung). Hierüber und über die Turtle als einem sich bewegenden Objekt wurden für das Schulniveau neue Beziehungen der Geometrie zur Differentialgeometrie, zur Physik, zur Analysis, zur Technik (Robotersteuerung), zur Kunst und zum alltäglichen Malen und Zeichnen von Bildern durch Kinder hergestellt. Gewachsene Fachsystematiken wie etwa die Trennung von Geometrie und Kinematik werden ebenso infrage gestellt wie bisherige didaktische Auffassungen zum Verhältnis von Schulgeometrie und Alltagsdenken.

Mit dem neuen Werkzeug sind ganz andere Figuren auf einfache Weise" erzeugbar als mit Zirkel und Lineal, genauer gesagt, die einfachen Kombinationen der LOGO-Primitive ergeben ganz andere Figuren (Spiralen, Vielecke) als die einfache Kombination der Primitive der Euklidischen Geometrie. Daß SchülerInnen im Unterricht neben/statt Dreiecken auch Blumen konstruieren, mag man je nach pädagogischem Standpunkt als begrüßenswerte

Öffnung oder als Abirrung von einer wissenschaftlich verstandenen Geometrie bewerten. Der algorithmische Stil der Geometrie beinhaltet eine auch für andere Gebiete computer-inspirierter Mathematik (Chaos, Zellularautomaten) eine Verschiebung von Arbeitsweisen: Durch Abarbeitung und Veränderung einfacher Algorithmen entstehen mitunter überraschende geometrische Objekte, deren Eigenschaften und theoretische Beschreibung zunächst nicht klar ist. In der herkömmlichen Geometrie sind dagegen häufig Eigenschaften vorgegeben, zu denen dann Algorithmen/Konstruktionen gesucht werden. Die Möglichkeiten für derartige Überraschungen in der Geometrie sind bei den Supposern und beim Cabri wesentlich beschränkter.

Die Neuheit der Geometrieinterpretation führte auch dazu, ein neues mathematisches Wissensgebiet zu konstruieren, die Turtle-Geometrie (Abelson & DiSessa 1984), von dem sich die Anwendung in der Schule dann (teilweise) als ein legitimer Abkömmling darstellen kann. Die Schwierigkeit von LOGO bestand auf der anderen Seite darin, daß die traditionelle Euklidische Geometrie nur mit großer Mühe, wenn überhaupt, unterstützt werden konnte.

Als formale Sprache stellt LOGO auch ein neues symbolisches Repräsentationsmittel für geometrische Figuren dar, das Konstruktionsprozesse vergegenständlicht und manipulierbar macht. Dies ist zunächst als wesentliche Bereicherung des Darstellungsrepertoires der Geometrie zu interpretieren. Eine softwareergonomische Perspektive, die dies lediglich als zu überwindende neue Barriere im Zugang zu mathematischem Wissen sieht, greift zu kurz. Von Papert (1980) ist ja sogar im Gegenteil für LOGO das Konzept der *medialen Brücke* in Anspruch genommen worden: LOGO als Möglichkeit, mit Formalem zu experimentieren.

Vom Ansatz her ist LOGO als allgemeines kognitives Werkzeug für SchülerInnen konzipiert worden. Ziel des Einsatzes von LOGO war, zu einem kreativeren, selbstbestimmten Lernen und Aneignen von geometrischem Wissen beizutragen. SchülerInnen werden als Baumeister ihrer intellektuellen Strukturen verstanden. Transparenz sollte durch die einfache Turtle-Metapher befördert werden. Eine natürliche Ko-Evolution von Werkzeug und Lernenden erschien möglich durch Aufbau eines sich erweiternden Wortschatzes (Prozedurensystem) in LOGO. Die Liste als zentrale Datenstruktur stellte de facto aber doch eine wesentliche Barriere natürlicher Ko-Evolution dar. Die Verbindung zu traditionellen Lerninhalten war schwer herzustellen. Teilweise konkurrierten die Ideen, mit LOGO eine neue Geometrie zu unterrichten, auch mit der Parole des „Lernens ohne Curriculum".

Die Geschichte der Anwendung von LOGO im Bildungswesen exemplifiziert sehr schön Probleme und Chancen des *didaktisch-pädagogischen Gestaltungsspielraums*, den man an einer Werkzeugsoftware schätzen kann. Während dieser Spielraum von Didaktikern und Curriculumentwicklern breit genutzt wurde, konnte dies allerdings von Seiten der Lehrenden im Sinne einer Entwicklung spezieller Mikrowelten vor Ort, im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung, offenbar nur selten wahrgenommen werden. Beispielsweise ist es theoretisch und praktisch sehr aufwendig, eine LOGO-Mikrowelt zu entwicklen, die sich stärker an den Grundbegriffen der Euklidischen Geometrie orientiert. Derartige Systeme sind in eigens dafür gewidmeten Entwicklungsprojekten entstanden.

An diesen Problemen setzen die Geometric Supposer ein, die die formalsprachliche Darstellung durch ein Menüsystem ersetzen und deren Grundbegriffe unmittelbarer an der Euklidischen Geometrie orientiert sind. Es erfolgt in inhaltlicher und medialer Hinsicht eine Domestizierung der Technologie auf der Linie schulmathematischer Tradition. Diese Anpassung verstehen die Softwareautoren teilweise aber als lediglich von taktischer Natur, da trotzdem an Innovationszielen festgehalten wird, die auch im Kontext von LOGO vertreten werden (Schwartz 1986).

Wesentliche Charakteristika der Supposer sind (siehe auch Abb. 1):

- Es wird mit einem elektronischen Zirkel/Lineal/Geodreieck-Ensemble gearbeitet, wobei ein *festes* System „primitiver" Konstruktionsbefehle über ein Menüsystem zugänglich ist. Aufrufbar sind: *Strecke, Kreis, Seitenhalbierende, Höhe, Parallele, Senkrechte, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Streckenmittelpunkt, Verlängern.* Beim Konstruieren können Elemente gelöscht und Beschriftungen hinzugefügt werden.
- Es bestehen ferner Meß- und Berechnungsmöglichkeiten für Längen, Abstände, Flächen und Winkel in ausgeführten Konstruktionen.
- Ausgehend von einem Basisdreieck kann eine Konstruktion schrittweise ausgeführt werden. Hierbei wird die Konstruktion verdeckt als Prozedur gespeichert. Anschließend kann man durch nur ein Kommando *Neues Dreieck* eine Wiederholung der Konstruktion auf ein anderes Basisdreieck ablaufen lassen. Hierunter finden wir etwa die Wahlmöglichkeiten: *rechtwinklig, stumpfwinklig, spitzwinklig, gleichschenklig, gleichseitig, eigenes.* Hiermit wird gewissermaßen für die Lernenden eine für geometrische Untersuchungen als wesentlich angesehene Klassifikation durch einfache Aufrufmöglichkeit nahegelegt. Die Möglichkeit zur schnellen Variation des Basisdreiecks erlaubt es, Invarianten und Besonderheiten zu explorieren, um so auf geometrische Vermutungen zu kommen.

Geometric Supposer:

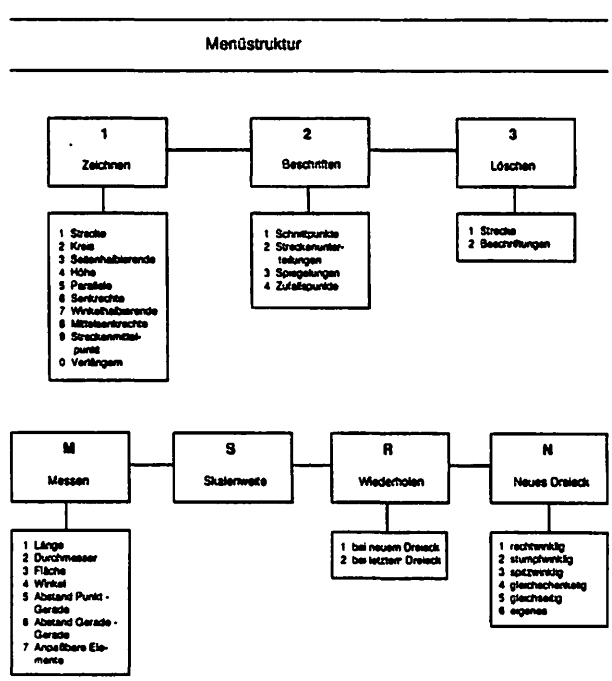

Abb. 1 Geometric Supposer: Menüstruktur

Dies gilt für den Geometric Supposer Triangle. Für Vierecke und Kreise gibt es jeweils ein eigenes Programm. Aus der Sicht möglichst weitreichender Funktionalität wird man dies als Mangel empfinden müssen, oder auch dann, wenn man aus didaktischen Gründen die Einteilung in Dreiecks-, Vierecks- und Kreisgeometrie nicht für wünschenswert hält.

Die Beschränkung auf wesentliche Begriffe der Euklidischen Geometrie, diese im Vergleich zu LOGO vorgenommene Reduktion der Offenheit, soll gerade innovative Erkenntnis- und Lernmethoden eröffnen, vor allem Möglichkeiten für ein induktives Vorgehen, für die Nutzung und Variation von Figuren als Erkenntnismittel und für die Einbeziehung des Messens als Element der Erkenntnisgewinnung in der Geometrie. Die pädagogische Intention besteht nicht darin, ein fertiges System von Theoremen zu vermitteln, sondern im Rahmen der vorgegebenen Begrifflichkeit die Lernenden zu angeleiteten Explorationen und zur Formulierung von Vermutungen und Sätzen anzuregen. Die Bedeutung von Beweisen, von Beispielen und Gegenbeispielen im Kontext der empirischen Überprüfbarkeit von Vermutungen soll erfahrbar gemacht werden.

Zwar kann man hierbei nicht vom Lernen ohne Curriculum sprechen, wie es teilweise in Zusammenhang mit LOGO vertreten wurde, aber für die Geometric Supposer ist eine Öffnung des Curriculums für „Euklidische SchülerInnen-Geometrie" intendiert, die in scharfem Widerspruch zur schulmathematischen Tradition der Vermittlung eines bereits vorher fixierten Wissensbestandes steht. Hier verstehen sich ebenso wie LOGO auch die Supposer durchaus als subversiv hinsichtlich der Verteilung der „epistemologischen Autorität" (Kaput 1986) im Unterricht: SchülerInnen soll ein direkterer Zugang zu Wissen ermöglicht werden, nicht nur vermittelt durch Lehrende und Lehrbücher. Mit dem Supposer soll das „Bauen eigener intellektueller (geometrischer) Strukturen" gleichsam im Rahmen sozial vorgegebener Begrifflichkeiten erfolgen.

Auch bringt die Betonung induktiven Arbeitens mit variierbaren Computerfiguren und unter Zuhilfenahme des Messens am Computer neue Erkenntnismittel und damit auch neue Komponenten in eine schulische Geometrieauffassung. Beweisen als unhinterfragtes Ritual muß sich als Methode der Begründung, Einsichtgewährung und Erkenntnissicherung stärker legitimieren.

Für die seinerzeit übliche Komplexität „benutzerfreundlicher" Systeme für die Sekundarstufe I war mit den Supposern eine qualitativ neue Stufe von Unterrichtssoftware erreicht, die im Grunde der Idee der Mikrowelt folgt, in welcher eine endliche Anzahl von didaktisch gewählten Primitiven zu freier Kombination zur Verfügung steht. Dieses Urteil bezieht sich nicht nur auf die formale Komplexität. Am Markt der seinerzeitigen Unterrichtssoftware in den USA war die Entwicklung fachbezogener Werkzeugsoftware, die auf äußerliche Visualisierung und motivationale Effekte verzichtete, ein Novum. Attraktiv ist auch das relativ einfach zu durchschauende Systemmodell, das für die NutzerInnen zumindest eine *metaphorische Transparenz* bietet: Mit dem System wird eine Konstruktion auf einem Basisobjekt ausgeführt, diese Konstruktion wird vom System automatisch als Konstruktionsverfahren „gelernt" und kann nun für andere Basisobjekte wiederholt werden.

Man programmiert „am Beispiel", ohne es zu merken. Das ist ein Konzept, das auch in neueren Softwaresystemen angestrebt wird. Im Algebraic Proposer von J. L. Schwartz ist eine ähnliche Idee verwirklicht: Man arbeitet zur Berechnung einer Größe zunächst nur mit konkreten Zahlen, hat dann aber vermittels der gewählten Operationen schon eine algebraische Beziehung zwischen bekannten und unbekannten Größen gestiftet (vgl. Schwartz 1989). Das mit dem Supposer erzeugte Objekt (die Konstruktionsvorschrift) ist jedoch hier für die Lernenden nicht zugänglich, nicht zu benennen, nicht abzuspeichern, und auch nicht zu modifizieren. Wieweit hier ein metaphorisches Verständnis möglich ist, ohne daß man geeignet Grundkonzepte wie Programm/Prozedur und Variable dazu verdeutlichen müßte, wäre noch näher zu untersuchen.

Die Menge der Primitive zum Konstruieren und zum Messen" im Supposer ist wesentlich breiter als in der Turtle-Geometrie. Hiermit wird die Möglichkeit zum modularen Konstruieren" im Sinne von Holland (in diesem ZDM-Heft) genutzt: anders als mit Zirkel und Lineal kann man mithilfe des Computers die Primitive bestimmen, von denen man ausgehen will. Diese Eigenschaft der Supposer wird aber auch kritisiert: aus der Sicht des üblichen Geometrieaufbaus wird gefordert, daß man etwa ein Kommando *Winkelhalbierende* erst dann benutzen solle, wenn man bereits Winkelhalbierende (mit Zirkel und Lineal) konstruieren könne, nicht schon, wenn der (relationale) Begriff der Winkelhalbierenden bekannt ist. Ähnlich argumentieren manche Vertreter von LOGO: Die Primitive von Mikrowelten sollten mithilfe der Basisprimitive der Turtle-Geometrie gemeinsam mit den Lernenden definiert worden sein. Mindestens aber wird die Möglichkeit, sich eine derartige Definition anzeigen zu lassen, als wesentliches Element von *Transparenz* angesehen. Von diesem Standpunkt aus ist auch das „Messen" im Supposer, das „in Wirklichkeit" ein Berechnen auf der Basis analytischer Geometrie sei, eine problematische Verkehrung in der Topographie des mathematischen Curriculums.

Die mit LOGO gestifteten neuen inhaltlichen Bezüge der Geometrie sind ansonsten jedoch in den Geometric Supposern wieder eliminiert worden. Die Nutzung einer formalen Sprache (LOGO) als neuem Repräsentationsmittel für geometrische Konstruktionen wird zugunsten herkömmlicher Darstellungsmittel wieder aufgegeben. Die Möglichkeiten des Computers als eines *expressiven Mediums* werden weitgehend zurückgenommen. Die Idee von LOGO als einem Rahmensystem für Mikrowelten, die die Lehrenden auswählen und an spezifische Lernsituationen anpassen können, wird aufgegeben zugunsten eines vorgegebenen festen Systems von Kommandos, einer fest vorgegebenen Mikrowelt, die zwar für SchülerInnen i.d.R. noch hinreichend komplex ist, aber den Entscheidungs- und Gestaltungsspielraum der Lehrenden und Curriculumentwickler *prinzipiell* stark einengt. Der *effektive* Gestaltungsspielraum von Lehrenden, die unter üblichen Alltagsbedingungen das Thema Euklidische Geometrie unterrichten müssen, mag sich aber – auch im Vergleich zur Anwendung von LOGO – durchaus deutlich erweitern. Hierin liegt jedenfalls eine wesentliche Absicht der Softwareentwickler.

Die Supposer sind zugeschnitten auf das induktive Arbeiten durch Variation von Basisobjekten. Als allgemeines Konstruktionswerkzeug für den Geometrieunterricht, mit dem auch andere Absichten verfolgt werden können, weisen sie erhebliche Schwächen auf.

LOGO verstand sich auch als ein kognitives Werkzeug, mit dessen Anwendung auf spezielle Probleme, z. B. aus der Geometrie, allgemeine Denkweisen und Lernhaltungen gefördert werden, welche insbesondere wichtige Begriffe und Denkweisen beim Programmieren betreffen und die – von Papert – als von allgemeiner kultureller Bedeutung eingeschätzt werden. Eine über die Geometrie hinausgehende Dimension könnte sich bei den Geometric Supposern, wenn überhaupt, möglicherweise auf den Umgang mit menügesteuerten Werkzeugen beziehen. Auch mit den Supposern wird die Idee von den „Kindern als Epistemologen" (Papert) aufgenommen, aber mathematik- bzw. geometriespezifisch konkretisiert. Themen wie die Rolle von geometrischen Diagrammen, von induktivem und deduktivem Vorgehen in der Geometrie, die Rolle von Beispiel und Gegenbeispiel sollen vermittels der Software im Unterricht thematisierbar werden.

Der Cabri gehört softwaretechnisch zu einer neuen Generation von Software, in der viele Funktionen, die ursprünglich bereits für Programmiersprachen wie LOGO verfügbar waren, die aber von der „benutzerfreundlichen Generation" wie den Supposern nicht mehr angeboten wurden, neu und in einfacherer Weise wieder zur Verfügung gestellt werden, z. B. das Abspeichern und Ausdrucken von Figuren, die Weiterbearbeitung gespeicherter Figuren; das Menüsystem ist nicht starr, sondern konfigurier- und erweiterbar; einfache Möglichkeiten der Makrodefinition sind gegeben; Möglichkeiten zum Replay einer Konstruktion (einer ganzen Sitzung) bestehen. Die Qualität der Graphik erreicht – gegenüber dem APPLE II-Graphik der Supposer – ein neues Niveau, das die Platonischen Objekte der Geometrie wieder besser ahnen läßt. Mit diesen Optionen wird der didaktisch-pädagogische Gestaltungsspielraum erweitert, da vielseitige Möglichkeiten für die Vorbereitung des Systems für den Unterricht bestehen („Lehrerschnittstelle"), außerdem sind Möglichkeiten der Ko-Evolution von Werkzeug und Lernendem gegeben, indem sowohl das Repertoire verfügbarer Konstruktionsbefehle als auch das Repertoire konstruierter Figuren erweitert werden kann.

Eine wesentliche weitere Eigenschaft des Cabri besteht in Möglichkeiten zur „direkten Manipulation" einer geometrischen Bildschirmzeichnung, wie das im Prinzip auch bei anderen modernen Mal- und Zeichenprogrammen der Fall ist. Direkte Manipulation wird angewendet für die Auswahl von geometrischen Objekten aus einer Zeichnung, auf die eine Operation angewendet werden soll, z. B. 2 Punkte für die Definition einer Gerade. Zum anderen ist direkte Manipulation wichtig für die *kontrollierte direkte Variation*: Man kann im sog. „Zugmodus" z. B. einzelne ausgewählte Punkte auf dem Bildschirm verschieben, womit sich gleichzeitig die ganze davon abhängige Konstruktion quasi-stetig ändert. Direkte Interaktion birgt das Problem, daß die durchgeführten Operationen nicht mehr dokumentiert und damit weder für andere noch für einen selber leicht rekonstruierbar sind. Dies Problem ist von den Softwareautoren erkannt worden, und in den neueren Versionen begegnet Cabri diesem Problem durch die automatische Generierung einer symbolisch-textlichen Konstruktionsbeschreibung, die man sich bei Bedarf anzeigen lassen kann. Dies ist eine Systemfunktion, die in anderen Systemen auch unter „job log" oder „script file" bekannt ist.

Worin besteht die grundlegende Modellvorstellung für ein Verständnis von Cabri? Die Idee ähnelt der versteckten Generierung einer Prozedur im Supposer: Während auf dem Bildschirm eine Zeichnung entsteht, werden zugleich im Rechner symbolische Objekte und Relationen zwischen ihnen erzeugt, z. B. ein bestimmter Punkt als Schnittpunkt von einer Geraden und einem Kreis. Die vermeintlich durch ein „Verschwinden der Benutzerschnittstelle" ermöglichte direkte Manipulation einer Zeichnung auf dem Bildschirm ist „in Wirklichkeit" eine indirekte Manipulation eines neuen symbolischen Objektes, der „Cabri-Figur". In diesem mittels der Technologie geschaffenen Objekt liegt die entscheidende Innovation. Dies verkompliziert die epistemologische Situation, für die Sträßer (1991) in Anknüpfung an Parzysz (1988) die Unterscheidung zwischen Figur und Zeichnung eingeführt hat (vgl. auch Holland in diesem ZDM-Heft). Umgekehrt liegen spezifische didaktische Vorteile des Cabri gerade in der Ausnutzung dieser neuen Repräsentation geometrischer Zusammenhänge. Auch hinter anderen objektorientierten Mal- und Zeichenprogrammen stehen bestimmte „symbolische Objekte". Die Cabri-Figur repräsentiert aber die beabsichtigte Verbindung zur semantischen Tiefenstruktur der im Programm intendierten Geometrieauffassung. Im Zentrum steht ein von Basisobjekten her konstruiertes Relationengefüge. Transparenz auf dieser Ebene ist notwendig, wenn man die Phänomene verstehen will, die bei der Anwendung des Zugmodus entstehen. Ein Grundproblem in der Anwendung von Cabri – in ähnlicher Weise auch bei den anderen vergleichbaren Systemen – besteht darin, daß man in der Bildschirmzeichnung Relationen und Objekte erkennen kann, die der Cabri-Figur aber nicht direkt „bekannt" sind.

Die Spezifika von Cabri bestehen des weiteren in den der üblichen Euklidischen Geometrie angepaßten primitiven Objekten und Konstruktionsbefehlen und darin, daß im Zug-Modus einer der unabhängigen Eingabeparameter des versteckt generierten Konstruktionsverfahrens variiert werden kann, so daß geometrisch relevante Invarianten erkennbar werden.

Mit dieser Möglichkeit zur dynamischen Variation wird ein qualitativ neues Erkenntnis- und Darstellungsmittel in die Geometrie eingeführt.

Die didaktischen Anwendungsmöglichkeiten hiervon sind vielfältig, da man ganz unterschiedliche Figuren vorbereiten kann:

- Überprüfung der Allgemeinheit einer Konstruktion durch Prüfung, ob Eigenschaften invariant bleiben bei der Variation der Eingangsparameter; damit Möglichkeiten zur Einsicht in Unterschiede zwischen Konstruieren und Zeichnen;
- Cabri als stetiger Supposer: Variation zur Entdeckung und Visualisierung von geometrischen Theoremen über Invarianten, Unterstützung des funktionalen Aspekts in der Geometrie; Zugmodus zum Experimentieren mit verschiedenen geometrischen Transformationen (Schumann 1989, 1990);
- Cabri als Rahmen- und Entwicklungssystem für „Cabri-Figuren" mit speziellen didaktisch-fachliche Absichten, z. B. für geometrische Anwendungen in Physik und Technik.

Bei Laborde & Sträßer(1990) findet sich etwa eine Cabri-Figur zur geometrischen Optik mit der Modellierung einer Abbildung durch eine Linse: Größe und Lage des Urbildes, Lage und Brennweite der Linse können stetig durch direkte Manipulation verändert werden. Schumann (1990a) hat eine Reihe von weiteren Anwendungen der Geometrie entwickelt, z. B. ein Modell für Kolbenhub und Getriebe und bewegliche Garagentore.

Der Cabri ist also ein offenes System, das sowohl von den Lehrenden als auch von Curriculumentwicklern gestaltet werden kann. Eine enge Festlegung auf bestimmte

Anwendungsformen und Geometriekonzepte wie beim Supposer findet sich nicht. Programmieren im Cabri erfolgt „am Beispiel" als Konstruieren einer Cabri-Figur. Die Allgemeinheit der Euklidischen Geometrie schlägt sich in der Allgemeinheit der Konstruktionsmöglichkeiten nieder, die sogar Konstruktionen in einer Art und Komplexität erlaubt, wie sie auch in CAD-Systemen möglich sind. Ähnlich wie bei LOGO einfache technische Anwendungen zur sequentiellen Robotersteuerung denkbar sind, so sind beim Cabri Verbindungen zur Technik über das „technische Zeichnen" prinzipiell möglich, während die Supposer diesbezüglich wenig Möglichkeiten bieten.

Ähnlich wie LOGO kann und wird auch Cabri außerhalb der Schule zur Problemlösung oder Ausbildung angewendet, während die Supposer wegen ihrer schulmeisterlich begrenzten Funktionalität dies wenig wahrscheinlich erscheinen lassen.

Auch der Cabri bringt eine erhebliche Irritation in die Schulgeometrie:
- die Möglichkeiten zur dynamischen Variation steigern die Verläßlichkeit der induktiven Methode beträchtlich, mit möglicherweise noch weiterreichenden Konsequenzen für die Bedeutung von Beweisen in der Schulgeometrie;
- die synthetische, konstruktive Geometrie könnte im Verhältnis zur analytischen Geometrie eine neue Blüte erleben;
- die faktische Tätigkeit kann sich von der Auseinandersetzung mit Beweistexten und Argumenten zu einem konstruktiven, praktischen, „herstellenden" Arbeiten mit einem Werkzeug verschieben, auch wenn Cabri mehr der theoretischen Geometrie als der angewandten CAD entsprungen ist.

Viele der neuen Querbezüge der Geometrie, wie sie von LOGO angestoßen wurden, sind allerdings im Cabri nicht wieder aufgenommen worden.

4. Zusammenfassung

Zusammenfassend für die Entwicklung vom LOGO zum Cabri soll festgehalten werden:
- Softwaretechnologische Fortschritte werden genutzt, um den didaktischen Gestaltungsspielraum der LehrerInnen (wieder) effektiv zu vergrößern. Allerdings wird die prinzipielle Anwendungsbreite einer allgemeinen Programmiersprache nicht wieder erreicht, so daß sich die mit einem Werkzeug gegebene Ökonomie der Einarbeitung nur auf den Bereich der Geometrie beziehen kann.
- Es erfolgt eine stärkere Anpassung an schulgeometrische Traditionen und Begrifflichkeiten, in deren Rahmen aber neue Erkenntnis- und Lernmethoden, sowie Anwendungsmöglichkeiten eröffnet werden.
- Hinsichtlich der Repräsentationsmittel bringt LOGO die neue Möglichkeit, Konstruktionsprozesse symbolisch darzustellen, zu manipulieren und in einer Maschine zu repräsentieren. Die Supposer zielen – ohne jedoch wirklich neue Repräsentationen anzubieten – auf die Entfaltung der Möglichkeiten, geometrische Figuren und ihre Variation als Erkenntnismittel zu nutzen. Dies wird von Cabri fortgesetzt, aber mit der Einführung von zwei neuen Repräsentationen verbunden: der direkt manipulierbaren Cabri-Figur und der automatisch generierten symbolisch-textlichen Konstruktionsbeschreibung, die aber im Unterschied zu Geolog und LOGO nicht selber expressives Medium ist, sondern orientierende Stütze. Dies senkt die Einstiegsschwelle zum aktiven Geometrietreiben mit der Software beträchtlich, blockiert aber Entwicklungen im Sinne einer Ko-Evolution nicht.

Software der „Cabri-Generation" stellt eine neue qualitative Stufe von Unterrichtssoftware zur Geometrie dar. Auf dieser Software-Basis läßt sich die Idee eines unterrichtsbegleitenden ko-evolutiven Werkzeuges zur Geometrie, das didaktischen Gestaltungsspielraum eröffnet, weiter verfolgen und untersuchen. Wesentlich „einfachere" *Werkzeug*software zur Geometrie, die diese Funktion erfüllen, kann man sich derzeit kaum vorstellen. Wenn auch Werkzeuge der Cabri-Generation unter schulischen Rahmenbedingungen wenig Akzeptanz und kreative Verwendung finden werden, so würde das verschärft die Frage aufwerfen, wieweit curriculumbegleitende Werkzeugsoftware minimaler Komplexität überhaupt in den Mathematikunterricht integrierbar ist oder wieweit (noch) ein Geometrieunterricht möglich und sinnvoll ist, der sich stark an einer wissenschaftlich betriebenen Geometrie orientiert. Denn zwischen der Gesamtheit der vielfältigen und faszinierenden Anwendungen der auf geometrisch-mathematischen Kenntnissen beruhenden Computer-Graphik und der im Grunde traditionellen Geometrie des Cabri und der anderen genannten Werkzeuge klafft letztlich doch eine große Lücke.

5. Literatur

Abelson, H.; DiSessa, A. (1984): Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics. – Cambridge (MA): MIT Press

Biehler, R. (1991): Fortschritte der Software und die Tradition der Schulmathematik. – In: W. Dörfler, W. Peschek, E. Schneider; K. Wegenkittl (Ed.), Computer-Mensch-Mathematik. (pp. 17-42). Wien/Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky/B.G. Teubner

Biehler, R.; Rach, W.; Winkelmann, W. (1988): Bewertung von Software für den Mathematikunterricht: Beurteilungsdimensionen und Ergebnisse einer internationalen Recherche. – In: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung Soest (Ed.), Neue Medien im Unterricht: Mathematik 1987/88. (pp. 29-128). Soest: Soester Verlagskontor

Biehler, R.; Winkelmann, B. (1988): Mathematische Unterrichtssoftware: Beurteilungsdimensionen und Beispiele. – In: Der Mathematikunterricht, 34(4), 19-42

Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. – In: W. Dörfler, W. Peschek, E. Schneider; K. Wegenkittl (Ed.), Computer-Mensch-Mathematik. (pp. 51-75). Wien/Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky/B.G. Teubner

Fey, J. T. (1989): Technology and mathematics education: a survey of recent developements and important problems. – In: Educational Studies in Mathematics, 20, 237-272

Holland, G. (1992): Computerunterstützung beim Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 24(4),

Kaput, J. J. (1986): Information technology and mathematics: opening new representational windows. – In: Journal of Mathematical Behavior, 5, 187-207

Kaput, J. J. (1988): Looking Back From the Future: A History of Computers in Mathematics Education, 1978-1998. Unpublished Manuscript. – Cambridge (MA): Educational Technology Center

Laborde, J.-M.; Sträßer, R. (1990): Cabri-Géomètre: A mircoworld of geometry for guided discovery learning. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 22(5), 171-177

Papert, S. (1980): Kinder, Computer und neues Lernen. – Basel: Birkhäuser

Parzysz, B. (1988): Knowing vs. seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. – In: Educational Studies in Mathematics, 19, 79-92

Pea, R. D. (1987): Cognitive technologies for mathematics education. – In: A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education. (pp. 89-122). Hillsdale: L. Erlbaum

Richenhagen, G. (1985): Kinder, Computer und Mikrowelten – Bemerkungen und Fragen zu Seymor Paperts „Mindstorms". – In: Journal für Mathematik, 20, 248-263

Schumann, H. (1988): Der Computer als Werkzeug zum Konstruieren im Geometrieunterricht. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 20, 248-263

Schumann, H. (1989): Satzfindung durch kontinuierliches Variieren geometrischer Konfigurationen mit Computern als didaktischem Werkzeug. – In: Der Mathematikunterricht, 35(4), 22-37

Schumann, H. (1990): Geometrie im Zugmodus. Drag-Mode-Geometrie, Teil 1. – In: Didaktik der Mathematik, 18(4), 290-303

Schumann, H. (1990a): Workshop auf der Tagung Mensch-Mathematik-Computer, Klagenfurt September 1990

Schwartz, J. L. (1986): Persönliche Mitteilung

Schwartz, J. L. (1989): From numbers to letters: Moving from the particular to the general in the argebraic supposer. – In: W. Blum et al. (Ed.), Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood

Sträßer, R. (1991): Schüler zeichnen ein Quadrat. Theoretische und empirische Begriffe am Computer. – In: W. Dörfler, W. Peschek, E. Schneider; K. Wegenkittl (Ed.), Computer-Mensch-Mathematik. (pp. 271-278). Wien/Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky/B.G. Teubner

6. Software

Algebraic Proposer 1988/J.L. Schwartz. – True BASIC Inc., Hanover, New Hampshire. – MS-DOS u.a.

Cabri Géomètre 1988ff./Baulac, Y.; Bellemain, F.; Laborde, J.M. – Laboratoire LSD 2, Grenoble. – Macintosh, MS-DOS

Felix 1991/Kadunz, G.; Kautschitsch, H.; Jochum, G.; Stocker, H. – Universität Klagenfurt. – MS-DOS

GEOLOG 2.0. 1990/G. Holland. – Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Gießen. – MS-DOS

Geometer's Sketchpad 1991/Jackiw, N. – Key Curriculum Press, 2512 Martin Luther King Jr. Way, P.O. Box 2304, Berkeley, CA 94702, USA, 510/548-2304. – Apple Macintosh

Geometric Supposer.: Triangles. 1985/Schwartz, J.L. u.a. – Sunburst Communications Inc., 39 Washington Ave, Pleasantville NY 10570, USA. – Apple II, MS-DOS, Apple Macintosh

Geometric Supposer: Quadrilaterals 1985/Schwartz, J.L. u.a. – Sunburst Communications Inc., 39 Washington Ave, Pleasantville NY 10570, USA. – Apple II, MS-DOS, Apple Macintosh