

## Von Glückstal (Ukraine) nach Frankfurt: Problemlösen, Algorithmen, Stochastik – Nachruf auf Arthur Engel

Rolf Biehler und Katja Krüger



Foto: Nachlass Arthur Engel

Abbildung 1. Arthur Engel 2012

Arthur Engel wurde am 12. Januar 1928 in der deutschen Siedlung Glückstal in der Ukraine (heute Hlinaja in Moldau/Transnistrien) geboren. Er starb am 11. November 2022 in Frankfurt am Main. Da sich sein Lebenswerk gut auf Grundlage seiner ihn prägenden Erfahrungen erfassen und würdigen lässt, möchten wir hier zunächst von ein-

nigen wichtigen persönlichen und beruflichen Lebensabschnitten berichten. Wir danken Arthur Engels Sohn Ralf und seinen ehemaligen Arbeitskollegen an der PH Ludwigsburg sowie der Goethe-Universität Frankfurt, die viele lebendige Erinnerungen beigesteuert haben. Sie beschreiben ihn einerseits als in sich gekehrt und zurückhaltend, andererseits bestach er in seinen mitreißenden Vorträgen durch Lebendigkeit, wenn er über seine mathematische Arbeit oder Ideen zum Unterrichten von moderner Mathematik sprach. Der erste Verfasser dieses Nachrufs hatte seit 1977 mehrere Gelegenheiten, Arthur Engel bei Vorträgen und Tagungen zu erleben und kann dies voll bestätigen. Wie Mathematik und fachbezogene Mathematikdidaktik zu seinem Lebensinhalt wurden und zu welchen Themen er Beiträge geleistet hat, darum soll es in unserem Nachruf gehen. Wir möchten Sie dabei auf eine Reise in die Zeit der Neuen Mathematik einladen, in der die Stochastik Eingang in den Schulstoff der Sekundarstufen I und II fand. Aus diesem Grunde ist unser Nachruf länger als üblich geraten.

### Biografisches

In seiner Kindheit war Arthur Engels Familie – wie viele Schwarzmeerdeutsche zur Zeit des Stalinismus – der Enteignung und Verfolgung ausgesetzt. Sein Vater wurde einige Jahre in Sibirien inhaftiert. Nach der russischen Grundschule konnte Arthur Engel die weiterführende Schule aufgrund der Schulschließungen in den deutschen Siedlungen nur für ein Jahr besuchen. Während des Krieges lebte die Familie unter deutscher Besatzung. Mit

dem Zusammenbruch der Front floh sie im Treck nach Deutschland. Dort angekommen wurde Arthur Engel Anfang 1945 als Soldat in die Wehrmacht eingezogen und verlor mit nur 16 Jahren seinen rechten Arm. Als „war displaced person“ erreichte er schließlich Stuttgart, wo er mit seinen Eltern und einem Bruder eine Heimat finden sollte. Nun konzentrierte er sich ganz auf das Lernen. So gelang es ihm, das Abitur nach nur drei Jahren Schulbesuch abzulegen. Anschließend studierte er an der Technischen Hochschule Stuttgart das Lehramt an Gymnasien mit den Fächern Mathematik und Physik. Diese beiden Wissenschaften hatten ihn schon als Kind fasziniert. Mit der Studienwahl Lehramt konnte er sein wissenschaftliches Interesse mit sicheren Berufsaussichten verknüpfen. Das war für ihn nach seiner bisherigen Lebenserfahrung und als ausgeprägter Familienmensch von großer Bedeutung. Von 1954 bis 1970 arbeitete er nach dem Referendariat am Karlsgymnasium in Stuttgart (Jungengymnasium) mit voller Begeisterung für sein Unterrichtsfach Mathematik. Bei seinen Schülern ist er als originelle Lehrerpersönlichkeit in bleibender Erinnerung geblieben, auch wenn er wohl eher die „Mathe-Cracks“ ansprach, so etwa Wolfram Koepf, bis 2019 Professor für Mathematik an der Universität Kassel, der jetzt noch verschiedene Anekdoten und Impressionen von seinen Mitschülern zusammentragen konnte. Als legendär sind Arthur Engels Aufgaben vom „Professor Idioti“, die teilweise auf „Ölsardinien“ spielen, in Erinnerung geblieben. Diese sich in seinem späteren Werk zeigende Neigung zu originellen fiktiven Einkleidungen reicht also bis in seine Lehrtätigkeit zurück.

Aufgrund der körperlichen Beeinträchtigung konnte er, ohne auf Experimente zu verzichten, nicht gut Physik unterrichten. Daher bildete er sich eigenständig in Geschichte fort, um auch ein zweites Fach lehren zu können. Die fortwährenden Selbststudien waren prägend für die weitere wissenschaftliche Entwicklung Arthur Engels. Sein Sohn berichtet über den überaus strukturierten und disziplinierten Tagesablauf des Vaters: vormittags Unterrichten in der Schule, nachmittags mathematische Studien und täglich Schwimmen oder Laufen. Arthur Engel hat sich hart arbeitend mathematisch weitergebildet und darauf aufbauend neue Ideen in seinem schulischen Mathematikunterricht erprobt und ausgefeilt.

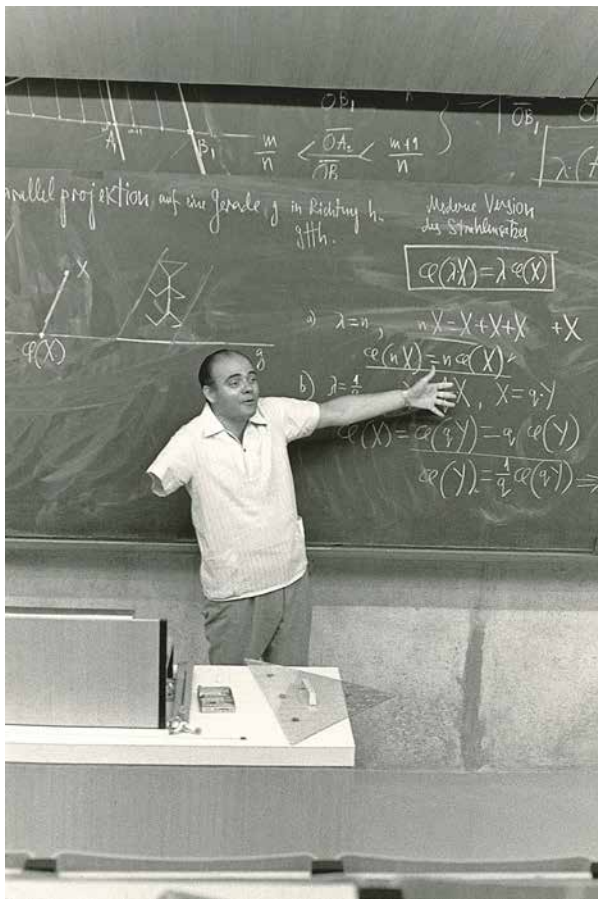


Foto: Nachlass Arthur Engel

Abbildung 2. Geometrie-Vorlesung von Arthur Engel, unbekanntes Jahr

Sein herausragendes Engagement blieb in der sich damals in Entwicklung befindlichen, noch jungen Wissenschaftsdisziplin Mathematikdidaktik nicht unbemerkt und führte ab Mitte der 1960er Jahre dazu, dass Arthur Engel zu Vorträgen auf ICMI-Tagungen eingeladen wurde. So hielt er z. B. auf einem ICMI/CIEM Symposium 1965 in Echternach einen Vortrag über „*Initiation a la théorie des probabilités*“ (Engel, 1966a) der auch in deutscher (Engel, 1965) und englischer Fassung (Engel, 1966b) in einer US-amerikanischen Lehrkräftezeitschrift publiziert wurde. Dort stellt er seinen eigenständigen Ansatz zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab der Jahrgangsstufe 5 anhand selbst erprobter Unterrichtsbeispiele vor. 1967 hielt er einen Vortrag bei einem weiteren ICMI-Kolloquium, das unter Leitung von Hans Freudenthal in Utrecht stattfand, und nahm 1969 an der ersten Tagung der ICME in Lyon zu „*New Trends in Mathematics Teaching*“ teil (Furinghetti, 2023, S. 78)

Arthur Engel war in dieser Zeit des Aufbruchs zu einer modernen Mathematik im Schulunterricht sowohl international vernetzt als auch produktiv beim Verbreiten seiner vom Fach geprägten didaktischen Ansätze. Seine Beiträge zur Anwendungs-

orientierung in einem modernen Mathematikunterricht sowie zur Stochastik im Schulunterricht in der neu gegründeten Zeitschrift *Educational Studies in Mathematics* sowie in deutschsprachigen Veröffentlichungen (Engel, 1966d, 1967, 1968, 1969b, 1973a) belegen das. Es ging ihm darum, zeitgemäße Mathematik für Lehrkräfte zugänglich zu machen und deren Substanz in lebendigen, herausfordernden Aufgaben zu präsentieren, die Schüler zum Denken und Handeln anregen. Ende der 1960er Jahre begann die hohe Zeit der „Neuen Mathematik“, die ja stark davon geprägt war, Konzepte wie Menge, Abbildung, Struktur und Axiomatik in den Unterricht zu bringen. Auch die Verstärkung von Problem- und Anwendungsorientierung waren Teil des Diskurses sowie neue Unterrichtsgebiete wie die Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Algorithmen. Diese wurden von Arthur Engel vertreten, wenn auch eher nicht durch den „Mainstream“ der damaligen Unterrichtsreformer.

Hans-Georg Steiner, der vor seiner Berufung an das IDM der Universität Bielefeld im Jahre 1973 ein nationaler und internationaler Motor der Reformbewegung war, hatte in seiner Karlsruher Zeit – nach Erinnerung von RB – Arthur Engel als herausragenden Lehrer kennen und schätzen gelernt. Steiner arbeitete seit etwa 1960 im Comprehensive School Mathematics Program (CSMP) in Carbonale, Illinois (USA) mit und vermittelte dorthin einen Aufenthalt von Arthur Engel, in dessen Rahmen er auch Unterrichtsmaterial zu Wahrscheinlichkeit und Statistik in englischer Sprache entwickelte (Engel, 1970a, 1970b). Hans-Georg Steiner und andere motivierten einen eher zögerlichen Arthur Engel, sich von der Schule an die Hochschule zu bewerben. Seine stoffdidaktischen und mathematischen Qualitäten und Reputation galten als so herausragend, dass er ohne Dissertation und Habilitation bereits 1970 als Assistenz-Professor an die PH Ludwigsburg berufen wurde. Emmanuel Röhl und Herrmann Dinges waren ebenfalls auf ihn aufmerksam geworden und er wurde dann 1972 an die Goethe-Universität in Frankfurt berufen. Dort wirkte er bis 1993 als Professor am Institut für Didaktik der Mathematik im Fachbereich Mathematik und war für die elementarmathematische Ausbildung der Lehramtsstudiengänge an Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen zuständig.

Arthur Engel hat eine Generation von Mathematik-Lehramtsstudierenden mit seinen lebendigen Vorlesungen und darauf abgestimmten Aufgaben geprägt. Übereinstimmend erinnern sich ehemalige Arbeitskollegen an seinen mitreißenden Vortragsstil: immer spannend und stark an mathematischen Problemen und deren Lösung orientiert.

In seiner Zeit als Universitätsprofessor befasste sich Arthur Engel mit weiteren, zukunftsweisenden

mathematikdidaktischen Herausforderungen, wie der Rekonstruktion der Schulmathematik vom algorithmischen Standpunkt und dem Einsatz von Programmiersprachen und digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht (Engel, 1973a, 1975a, 1977, 1979a). Mit dieser Thematik war er auch in herausragenden Funktionen auf der von Steiner organisierten ICME III in Karlsruhe 1976 (Engel, 1979b) und auf der ICME IV in Berkeley (1980) vertreten (Engel, 1983). In Engel (1991) (englische Fassung Engel (1993)) arbeitet er seine Ideen in Buchform aus.

Bedingt durch eine schwere, lebensgefährliche Erkrankung musste er allerdings ab 1981 deutlich kürzer treten. Inzwischen hatte er auch eine Familie gegründet, die seine Zuwendung und Aufmerksamkeit beanspruchte. Weiterhin widmete sich Arthur Engel seinem besonderen Interesse, dem Problemlösen im Zusammenhang mit dem Bundeswettbewerb Mathematik und der Vorbereitung der deutschen Teams auf die internationale Mathematik-Olympiade. Mit seinen Trainingsprogrammen führte er eine ganze Reihe von hochbegabten Schüler:innen an die internationale Spitze.

Für sein Lebenswerk erhielt er 1990 das Verdienstkreuz der Bundesrepublik Deutschland – nicht nur für sein herausragendes Engagement bei mathematischen Wettbewerben, sondern auch in Hinblick auf die Modernisierung des schulischen Mathematikunterrichts. In der Laudatio zur Überreichung des Bundesverdienstkreuzes wurde das herausgestellt:

Als Gymnasiallehrer baute Herr Prof. Engel aus eigener Initiative eine Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik in seinen Mathematikunterricht ein und hat auf diese Weise einen ausgezeichneten ... Lehrplan dieser Sachgebiete entwickelt. Mit Hilfe dieses Lehrplans entstand ein in hohem Maße problemorientierter Unterricht, der von konkreten, die Schüler interessierenden Fragen ausgeht, so zu mathematischen Problemen führt und auf diese Weise echte Motivation zu mathematischem Denken schafft. (Möllemann, 1991)

Sein mathematisch-mathematikdidaktisches Lebenswerk möchten wir nun hinsichtlich der Stochastik und des Problemlösens genauer vorstellen.

### Stochastik in der Schule

Arthur Engels erste Veröffentlichungen plädieren dafür, früh mit einem propädeutischen Unterricht in Wahrscheinlichkeitstheorie zu beginnen, um Schüler:innen an die besondere Denkweise der Stochastik heranzuführen. In Engel (1965) schlägt er Themen und Aufgaben für die Klassen 5 bis 7 vor,

die er für seinen eigenen Unterricht entwickelt und erprobt hatte. Dieser Artikel erschien in modifizierter Form auch in der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* (Engel, 1966d) und wurde sogar wegen seiner Bedeutung in einer fachwissenschaftlichen Zeitschrift nachgedruckt (Engel, 1969a).

Der Schüler hat keine anschauliche Vorstellung von den Begriffen, die der WT zugrunde liegen. Daher ist ein propädeutischer Kurs unerlässlich. Hier muss der Schüler an einfachen Beispielen und vielen Experimenten die Begriffe und Methoden der WT erleben. So wird ein anschaulicher Hintergrund für die abstrakte Theorie geschaffen, die im 8. Schuljahr einsetzen kann. (Engel 1965, S. 271)

Eine wesentliche Änderung des Stoffplans ist dabei nicht einmal nötig. Die Grundbegriffe der Mengenlehre sind allerdings unentbehrlich. Sonst braucht man nur die Aufgaben zu ändern. Das Aufgabenmaterial für diese Altersstufe zeichnet sich durch grosse Ideenarmut aus. Es stammt zum Teil noch aus altbabylonischen Tempelschulen. Die teilweise Auswechslung dieser Aufgaben durch Probleme kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Inhalts bedeutet einen großen Gewinn (a. a. O., S. 271/2).

Die vorgeschlagenen Themen sind nicht nur aus heutiger Sicht sehr anspruchsvoll. So werden in Klasse 5 und 6 Binomialkoeffizienten (Zahlen im Pascalschen Dreieck), Permutationen und Fakultäten eingeführt. Als Aufgabe wird u. a. gestellt, einen zufälligen Punkt auf der Tafel zu wählen, indem zwei Schüler je eine Münze werfen. Die beiden erzeugten 0-1-Folgen definieren eine zweidimensionale Intervallschachtelung (im Binärsystem) für den zufälligen Punkt. Ab Klasse 7 werden Zufallsziffern und die Monte-Carlo-Methode angewendet:

Die Monte-Carlo-Methode ist experimentelle Mathematik. Wenn ein Problem für eine rechnerische Lösung zu kompliziert ist, dann wird es simuliert. Durch  $n$  Versuche erhält man die Lösung mit einer Genauigkeit von der Größenordnung  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Für die Monte-Carlo-Methode braucht man einen Rechenautomaten und eine Quelle von Zufallsziffern. Der Rechenautomat ist die Klasse selbst. Sie kann oft in 2 bis 3 Minuten 1000 Versuche anstellen. Damit hat man die gesuchte Zahl auf ca. 3 % genau. Leider ist die Auswertung der Versuche zeitraubender. Quellen für Zufallsziffern sind Münze und Würfel, leider im Zweier- und Sechzersystem (a. a. O., S. 280/81).

Wir haben so ausführlich zitiert, um einerseits die Prägung durch die „Neue Mathematik“ (Mengen-



Foto: Andreas Eichler, Universität Kassel

Abbildung 3. Das Mathematische Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

lehre, nicht nur Dezimalsysteme) deutlich zu machen, andererseits auch deswegen, weil Arthur Engel unter Experimenten im Stochastikunterricht eben nicht das Arbeiten mit Zufallsgeräten als Selbstzweck versteht, sondern sie von Anfang an als Mittel für die Simulation interessanter und komplexerer Probleme herausstellt. Bemerkenswerterweise wird auch das „ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz“ angesprochen, das es heute immer noch nicht in den Pflichtstoff der gymnasialen Oberstufe, geschweige denn in den der Sekundarstufe I geschafft hat.

Später begann Arthur Engel mit dem Klett-Verlag zusammenzuarbeiten. Das tat er zunächst als Autor im Schulbuch Lambacher-Schweizer (Schweizer, 1968), für das er das Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik verfasste – ein Thema, das seit dem KMK-Beschluss von 1968, der die auch in der BRD heftig diskutierte Modernisierung des Mathematikunterrichts (Neue Mathematik) in Gang setzte, wieder in Lehrplänen der Oberstufe mitberücksichtigt wurde.

Anfang der 1970er Jahre entwickelt Arthur Engel mit Tamas Varga (einem der Promoter der Neuen Mathematik und der Stochastik in Ungarn) auch Ideen, wie man die Propädeutik zur Wahrscheinlichkeitstheorie bereits in der Grundschule beginnen kann. Das Buch „Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe“ von Engel et al. (1974) richtet sich an Lehrkräfte im Primarbereich. Es wird

flankiert durch das *Mathematische Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*, das auch im Klett-Verlag erschien (Abb. 3) und eine Vielzahl von stochastischen Zufallsgeräten enthält, mit denen man die vorgeschlagenen Spiele praktisch realisieren kann.

In dieser Zeit sind ebenfalls seine beiden wegweisenden Bücher zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Engel, 1973b, 1976a) entstanden, die mit originellen und herausfordernden, auch mathematisch anspruchsvollen Aufgaben und Themen und geringer Formalisierung zur Pflichtlektüre angehender Stochastikdidaktiker:innen in den 1970er und 1980er Jahren wurden und viele gymnasiale Lehrkräfte und Schulbuchautor:innen beeinflusst haben.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sind heute ein unentbehrliches Rüstzeug für alle Natur- und Geisteswissenschaften geworden. Es ist nur noch eine Frage der Zeit, bis sie in den regulären Schulunterricht eindringen. Die Integration der Wahrscheinlichkeit und Statistik in den Unterricht aller Stufen wird den Mathematikstoff entscheidend bereichern, d. h. interessanter und nützlicher machen. (Engel 1973b, S. 5)

Die beiden Bücher wurden mit inhaltlich veränderten Akzentsetzungen später in einem Lehrbuch (Engel, 1987) zusammengeführt, das den Titel „Stochastik“ trägt. Diese Bezeichnung hatte sich mittlerweile in deutschen Lehrplänen durchgesetzt. Im Vorwort zu Engel (1973) werden die einzelnen Kapitel den gymnasialen Schuljahren von Klasse 6 bis 13 zugeordnet. Beruhend auf seinen Unterrichtserfahrungen liefern sie Hintergrundwissen für Lehrkräfte und Ideen für die Unterrichtsgestaltung. Die ersten 4 Kapitel behandeln ein- und mehrstufige Zufallsversuche und Kombinatorik, in Kapitel 5 wird bereits relativ früh die Statistik in Gestalt des Hypothesentestens eingeführt, Kapitel 6 behandelt Zufallszahlen und Monte Carlo Methoden, danach folgen Zufallsvariablen und spezielle Verteilungen in mehreren Kapiteln (Binomial-, Normal-, Poisson- und hypergeometrisch). Auch wird dem  $\chi^2$ -Unabhängigkeits- und Anpassungstest ein eigenes Kapitel gewidmet sowie den bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von Bayes (mit Anwendung auf Gesundheitstests und der Thematisierung von ggf. geringer Infektionswahrscheinlichkeit bei positivem Testresultat). Damit ist ein thematischer Rahmen für die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik gesetzt, aus dem noch heute die Lehrinhalte für den Stochastikunterricht an Schulen ausgewählt werden. Die frühe Thematisierung von (beurteilender) Statistik und Simulation mit Zufallszahlen war für seinerzeitige Hochschul- und Schulbücher ungewöhnlich. Beschreibende Statistik und

Datenanalyse sind allerdings bei Arthur Engel noch kein Thema. Außerdem werden Konfidenzintervalle nicht explizit thematisiert (nur implizit bei der Statistik der Geburten in Kapitel 11.5.)

Hinsichtlich der Elementarisierung ist hervorzuheben, dass Maßtheorie und (Kolmogorov-)Axiome unnötig sind und nicht auftauchen. Die Idee, Wahrscheinlichkeitstheorie auch als ein einfaches Beispiel von axiomatisierter Mathematik auf der Basis der Mengenlehre im Rahmen der Neuen Mathematik einzuführen, spiegelt sich bei Engel nicht wider. Sein Fokus liegt auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen. Wahrscheinlichkeiten werden zunächst für endlich viele Ergebnisse und dann für Ereignisse festgelegt, wie das heute in Schulbüchern üblich ist. Es wird allerdings durchgängig mit Mengensprache und formelmäßigen (algebraischen) Darstellungen gearbeitet, die über das Niveau heutiger Oberstufenschulbücher hinausgehen. Eine wichtige Rolle spielen Graphen: In Band 1 werden Baumdiagramme für die Kombinatorik und mehrstufige Zufallsversuche behandelt und in Band 2 Irrfahrten auf Graphen visualisiert, die Markow-Prozesse repräsentieren.

Zum Aufgabenmaterial schreibt Engel (1973, S. 5) im Vorwort:

Es ist ein Arbeitsbuch. Es enthält eine Fülle ausführlich diskutierter Beispiele und zahlreiche Aufgaben. In den Beispielen und Aufgaben steckt viel Arbeit. Es wurde versucht, diese interessant und originell zu machen.

Hierin besteht eine wesentliche nachhaltige Leistung seines Buches. Seine Aufgaben thematisieren elementare, auch bekannte historische Probleme aus Glücksspielen und beinhalten häufig fiktive Einkleidungen („das Wetter in Sikinien“, „die Heiratschancen der Mädchen aus Anchurien“), die man heute durchaus für problematisch halten kann. Darüber hinaus finden sich auch reale Anwendungsbeispiele, die demonstrieren, wie intensiv sich Arthur Engel mit Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik auseinandergesetzt und diese für die Schule zugänglich gemacht hat. Aus heutiger Sicht eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts ist es allerdings ein Nachteil, dass die Kontexte der Probleme oft nur angedeutet und Originalquellen meist nicht zitiert werden. Auch die Angemessenheit der Modelle wird noch nicht hinterfragt. Gelegentlich weiß man nicht, ob echte Studien benutzt werden oder ob eine fiktive Einkleidung vorliegt, z. B. bei der Hypothesentestfrage „Sind Ratten farbenblind/neugierig/lichtscheu?“ (1973, S. 57f.) oder bei der Modellierung „Warten auf den ersten Fisch“ durch eine Exponentialverteilung (1973, S. 26). Einige der von ihm vorgeschlagenen Beispiele zu statistischen Tests wurden

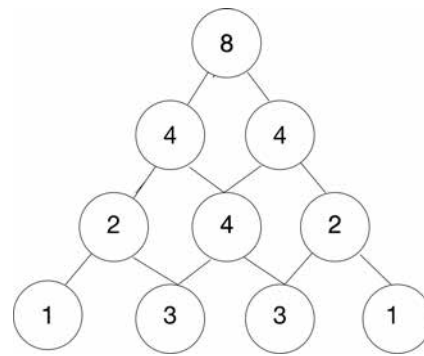


Abbildung 4. Dreistufiger Wurf einer fairen Münze

später vielfach in Schulbüchern aufgegriffen, z. B. Geschmackstests (1973, S. 59), Anwendungen zum Waldschen Sequentialtest sowie Fishers exakter Test in der Anwendung auf die Wirksamkeit von Polioimpfungen in kontrollierten Vergleichsstudien.

Der zweite, 1976 erschienene Band handelt von stochastischen Prozessen, insbesondere Markow-Ketten, die in der Stochastikdidaktik und in der Schule eher seltener aufgegriffen wurden. Bemerkenswert an seinem Zugang zu diesem anspruchsvollen Thema ist die überaus gelungene Elementarisierung als Irrfahrten in Graphen. Für die Berechnungen werden verschiedene Pfadregeln eingeführt, aber das wirklich Revolutionäre ist der von ihm entwickelte Wahrscheinlichkeitsabakus: Man kann Aufgaben zu Markow-Ketten, z. B. mit welcher Wahrscheinlichkeit der Prozess einen bestimmten absorbierenden Zustand erreicht (und wie lange das im Mittel dauert), spielerisch mit Hin- und Herschieben von Chips in einem Graphen lösen. Diese Methode entwickelte er 1974 während eines seiner Forschungsaufenthalte in Carbondale in den USA bei einem Versuch, einer schwachen 4. Klasse etwas „nichttriviale Wahrscheinlichkeit“ näher zu bringen (Engel, 1975b).

Einfache mehrstufige Zufallsversuche, z. B. das Werfen von 3 Münzen, können Kinder bearbeiten, indem sie acht Chips durch den Graphen laufen lassen, und nach den Wahrscheinlichkeiten (je  $\frac{1}{2}$  für Kopf oder Zahl) immer hälftig aufteilen, so dass in der untersten Reihe 1,3,3,1 Chips landen (vgl. Abb. 4). Dabei werden ohne Bruchrechnung anhand der ermittelten günstigen Fälle Wahrscheinlichkeitsvergleiche möglich. Heute würde man von „idealer“ Simulation sprechen, die im Kontext der natürlichen Häufigkeiten seit den 1990er Jahren (Krauss et al., 2020) populär geworden ist. Man könnte, wenn man den Überblick hat, gleich mit 8 Chips starten und diese im Graphen jeweils aufteilen und nach unten schieben. Oder – und das ist eine erste zentrale Einsicht von Arthur Engel – man fängt im Start mit 2 Chips an, die man so lange verschiebt, bis

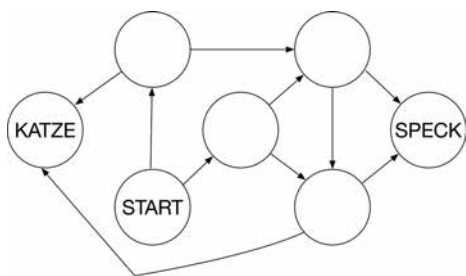


Abbildung 5. Das Mäusespiel ähnlich zu Engel (1975d, S. 77)

man nicht mehr weiter „feuern“ kann. Dann nimmt man immer wieder zwei weitere hinzu und schiebt diese so lange nach unten, bis es nicht mehr geht. Wenn man den siebten und achten Chip auf den Start gelegt hat, kann man schließlich alle Chips in die letzte Reihe schieben.

Der Witz der Methode ist aber, dass sie auch auf komplexere Graphen anwendbar ist, die (auch unendliche) stochastische Prozesse beschreiben. Ein ganz einfaches Beispiel für die Grundschule ist z. B. bei einer stochastischen Irrfahrt einer Maus (Übergangswahrscheinlichkeiten sind jeweils  $1/2$ ) die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Maus den Speck erreicht (Abb. 5). Dies gelingt ihr mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  und einem Erwartungswert von 3 Schritten. Man startet mit zwei Chips und legt später noch zwei weitere hinzu, am Ende landen 2 Chips im Speck und 2 bei der Katze.

Kompliziert wird es z. B. beim „Kühnen Spiel“ (Engel, 1975b, S. 71). Die Spielregel lautet:

*Ich besitze 1 DM und brauche dringend 5 DM. Mein Ziel kann ich durch ein faires Glücksspiel erreichen. Dabei entscheide ich mich für die kühne Strategie: In jeder Runde setze ich soviel von meinem Geld ein, daß ich im Falle eines Gewinns möglichst nahe an mein Ziel komme.*

Das Spiel kann man in den in Abb. 6 dargestellten Graphen übersetzen (was die erste kognitive Herausforderung sein kann), der nun einen Zyklus (1-2-4-3-1) enthält:

Das Durchschieben von Chips (Start ist in 1) nach der eben beschriebenen Methode führt nicht zum Ziel. Der Prozess terminiert nicht, da es unendliche viele Pfade vom Zustand 1 zum Zustand 5 gibt. Eine zweite wesentliche Idee von Arthur Engel führt zum Ziel. Man lädt alle inneren Zustände (2, 3, 4) mit Chips vor, so dass gerade nicht gefeuert werden kann, also in diesem Beispiel überall mit einem Chip. Dann beginnt man mit zwei weiteren Chips im Startzustand „1“ und lädt, wie in unserem Einstiegsbeispiel erläutert, entsprechend immer wieder so lange mit zwei Chips nach, bis sich der Vorladezustand (kritische Ladung) reproduziert. Wir haben es gespielt: Im Zustand „0“ lie-

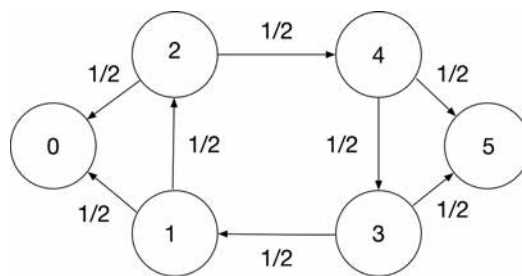


Abbildung 6. „Das kühne Spiel“ ähnlich zu Engel, 1975d, S. 71)

gen schließlich 24 Chips, in „5“ liegen 6 und in den inneren Zuständen „2“, „3“ und „4“ wieder je einer. Die Wahrscheinlichkeit in „5“ zu landen ist also  $\frac{6}{24+6} = \frac{1}{5}$ , was man in diesem Fall eines unendlichen Prozesses auch mit Hilfe geometrischer Reihen ausrechnen kann. Man spiele es selber mal nach! Intuitiv klar sind den Verfasser:innen dieses Nachrufs die Gründe für die Richtigkeit des Verfahrens allerdings noch nicht geworden.

Dieser Algorithmus, den Arthur Engel den „Probabilistic Abacus“ und später „Stochastic Abacus“ taufte (Engel, 1975c, 1976b, 2006), hat viel Staub aufgewirbelt. Arthur Engel (Engel, 2003, 2006) berichtet Interessantes über dessen Geschichte. Für ihn sei die Richtigkeit des Algorithmus intuitiv völlig klar gewesen, als er ihn auf einer Tagung 1975 in Warschau vorstellte. Er wurde auf diesem Kongress dann aber von Georges Papy, dem bekannten belgischen Mathematikdidaktiker und Promoter der Neuen Mathematik, angegriffen, man dürfe nichts Unbewiesenes für die Schule vorschlagen. Dass der Algorithmus mathematisch korrekte Resultate liefert, hat größtenteils Engel dann selber in der nächsten Nacht bewiesen, eine bleibende Beweislücke (die Wiederkehr der kritischen Ladung, das „critical load theorem“, dass nämlich der Vorladezustand nach endlichen Schritten wieder auftaucht und man dann das richtige Ergebnis „ablesen“ kann), hat später ein Mitarbeiter aus Frankfurt, Dr. L. Scheller, geschlossen, ohne ihn zu publizieren. Mittlerweile ist dieser Algorithmus ein Bestandteil der Theorie der *Chip-Firing Games* in der theoretischen Informatik (vgl. Björner & Lovász, 1992 für eine erste umfassende Darstellung), in der die Urheberschaft von Arthur Engel anerkannt wird. Arthur Engel hat zum Thema ein unveröffentlichtes Buchmanuskript mit dem Titel *The Stochastic Abacus: An Alternative Approach to Discrete Probability* (Engel, 2008) verfasst. Da wir aus der persönlichen Korrespondenz aus dem Jahre 2003 von dem Manuskript wussten, sind wir jetzt bei einer Google-Suche überraschend auf den einen Link zu der instruktiven Website des amerikanischen Mathematikers James Propp ([mathenchant.wordpress.com/2017/08/16/prof-engels-marvelously-improbable-machines/](https://mathenchant.wordpress.com/2017/08/16/prof-engels-marvelously-improbable-machines/)) gesto-

ßen, auf der Engels Arbeiten gewürdigt werden und das Buch auch abrufbar ist. Es ist password-geschützt, aber auf der Seite findet man etwas versteckt auch das Password. In dem Buch wird ein Großteil der diskreten Stochastik mit Hilfe dieses Algorithmus behandelt, wieder mit vielen spannenden Beispielen. Schon in Engel (2003) drückt er die Befürchtung aus, dass das Werk möglicherweise erst posthum veröffentlicht würde, was bisher aber noch nicht geschehen ist.

Dass Arthur Engel weiterhin ein Gespür für interessante neuere Entwicklungen in der Statistik besaß, zeigt sich auch in der Herausgabe des MU-Hefts zu neuen Ideen in der Statistik (Engel, 1982), in der Statistiker im Umfeld von John Tukey Ideen der Explorativen Datenanalyse vorstellen, die aber dann in Deutschland von anderen Didaktiker:innen weiter ausgebaut und didaktisch analysiert wurden.

Als in den 1980er Jahre die Stochastikdidaktik auch in Deutschland Fahrt aufnahm, waren die elementarmathematischen Konstruktionen und Vereinfachungen sowie die vielfältigen Aufgaben und Beispiele von Arthur Engel ein ganz wichtiger Fundus. Am fachdidaktischen Diskurs nahm Engel dann nur peripher teil. Er war auch eher ein impliziter und kein expliziter Stoffdidaktiker, in dem Sinne, dass unterschiedliche Zugänge explizit verglichen und bewertet wurden. Zu empirischen Studien, die in dem frühen Buch zur Didaktik der Stochastik von Kütting (1981) aufgearbeitet wurden, oder theoretischen Diskussionen um fundamentale Ideen in der Stochastik (Heitele, 1975, 1976) hat Engel sich in seinen Schriften nicht explizit geäußert. In gewissem Sinne ist er mit seinen Arbeiten „Einzelkämpfer“ geblieben.

### **Bundeswettbewerb Mathematik und Mathematikolympiade**

Bereits während seiner Zeit in Stuttgart begann Arthur Engel sich mit Lehrerkollegen aus ganz Deutschland für die Einrichtung eines Bundeswettbewerbs Mathematik zu engagieren. Er gilt als Mitbegründer dieses Wettbewerbs, der erstmals 1970 stattfand. Einige Jahre zuvor übersetzte er aus dem Russischen mathematische Olympiade-Aufgaben aus der UdSSR, die er mit ausführlichen Lösungen für Lehrkräfte zu Trainingszwecken zugänglich machte (Engel, 1966c).

Im Vorwort findet sich sein Credo:

In der Mathematik kommt es nicht auf Wissen, sondern auf Können an. Deshalb lernt man Mathematik am besten nicht durch Lesen weiterführender Literatur, sondern durch intensive Beschäftigung mit interessanten und anspruchsvollen Problemen von einfachem und elementarem Charakter. Der tagelange, ja wochenlange

Kampf und die schließliche Bezwingung eines Problems ist ein wichtiges Element in der Erziehung eines zukünftigen produktiven Mathematikers.“ (S. 4/5)

und

Der Lehrer kann es als Ergänzung zum eingeführten Lehrbuch verwenden. Er sollte immer wieder anspruchsvolle, aber interessante Aufgaben mit seinen Klassen behandeln. Denn nur so kann er die Freude an der Mathematik wachhalten und die Leistung steigern. So manche ‚schwache‘ Klasse ist erst durch fortgesetzte Unterforderung leistungsschwach geworden. (a. a. O., S. 4)

Von Beginn an war er über 40 Jahre im Aufgabenausschuss des Bundeswettbewerbs aktiv tätig und trug damit zur Förderung mathematisch begabter Schüler:innen bei (Specht et al., 2020). Als wichtigster „Aufgabenlieferant“ schaffte er die Basis für den Wettbewerb. Er selbst soll einmal gesagt haben: „Viele Leute lösen gerne Probleme, wer denkt sie sich aus?“ So gilt er als

schier unerschöpflicher Quell von Aufgabenstellungen. Die Art und Weise dieser Problemstellungen und die möglichen Strategien zu deren Lösungen haben den Bundeswettbewerb Mathematik mitgeprägt. (Dr. Erhardt Quaisser, Aufgabenausschuss BWM, Kondolenzschreiben)

1977 konnte dank seines engagierten Einsatzes zum ersten Mal ein Team der Bundesrepublik Deutschland an einer Internationalen Mathematik-Olympiade teilnehmen.

Damit hat Arthur Engel das Fundament für die seit 1977 regelmäßige Teilnahme Deutschlands an Internationalen Mathematik-Olympiaden gelegt, indem er die entsprechenden Konzepte für die Auswahl und Vorbereitung sowie die Begleitung der deutschen Teams initiiert hat. (Prof. Dr. Jürg Kramer, Kondolenzschreiben)

Günter M. Ziegler (Mathematikprofessor und inzwischen Präsident der Freien Universität Berlin) erinnert sich:

Arthur Engel habe ich in meinem Abiturjahr als Trainer für die Internationale Mathematik-Olympiade 1981 in Washington kennengelernt. Wir wurden damals von ihm nicht nur trainiert, sondern auch motiviert und angefeuert. Das Trainingsmaterial war auch Augenöffner für Muster und Strategien; es war eine Schatztruhe aus jahrzehntelanger Erfahrung. Arthur Engel war unangefochtene Autorität, seine Erklärungen wie auch seine Korrekturen waren mustergültig und klar. Ich bin und bleibe ihm dankbar!

1989 bekleidete Arthur Engel sogar das Amt des Juryvorsitzenden der 30. Internationalen Mathematik-Olympiade und damit das des offiziellen Leiters dieses bedeutenden internationalen Schüler:innenwettbewerbs. Über Jahrzehnte hat er die Vorbereitung des deutschen Teams maßgeblich gestaltet, dabei haben Generationen von Mathematiker:innen von ihm Problemlösestrategien gelernt. Einen umfassenden Eindruck seiner breiten Kenntnis mathematischer Probleme und der Verfahren zu ihrer Lösung vermittelt sein 1998 erschienenes Buch *Problem Solving Strategies*, das unter Kenner:innen als „Bibel“ für die Wettbewerbsvorbereitung gilt (Engel, 1998). Es enthält heuristische Lösungsverfahren und eine umfassende Sammlung von Aufgaben, mit denen er erfolgreich die deutschen Teams für die Internationale Mathematik-Olympiade fit gemacht hat. 1991 erhielt er für seine herausragenden Leistungen im Bereich der Aufgabenerstellung für internationale mathematische Wettbewerbe den *David Hilbert Award* der *World Federation of National Mathematics Competition*.

### Fazit

Es ist bemerkenswert, dass Arthur Engel in der Zeit seines beruflichen Schaffens sehr früh viele nach wie vor hoch aktuelle und heute noch relevante mathematikdidaktische Themen bearbeitet, elementarmathematisch erschlossen und mit außerordentlicher Kreativität interessante Aufgabenstellungen entwickelt hat. Er wurde sehr früh im internationalen Kontext aktiv und beachtet, was für die seinerzeitige deutsche Mathematikdidaktik eine Ausnahmereignis war. Er war ein aktiver Vertreter in der internationalen Community von Promotern der Neuen Mathematik, die er aber mit seinen Themen und problemorientierten Ansätzen schon seinerzeit transzendierte und die im Unterschied zur Leitidee „Menge, Abbildung und Struktur“ die Geschichte überlebt haben, auch wenn er sich selbst nicht mehr so aktiv in den mathematikdidaktischen Diskurs und deren sich vertiefende und verbreiternde theoretische und empirische Orientierung einbringen wollte und konnte.

Neue Entwicklungen in den mathematischen Wissenschaften für Schulunterricht zu erschließen und interessant und problemorientiert aufzubereiten, sehen wir als eine der ständigen Aufgaben der Mathematikdidaktik. Man kann vermuten, dass Arthur Engel heutzutage längst schon einige interessante Beiträge zum Thema Künstliche Intelligenz im Mathematik- und Informatikunterricht veröffentlicht hätte.

### Literatur

- Björner, A. & Lovász, L. (1992). Chip-firing games on directed graphs. *Journal of algebraic combinatorics*, 1, 305–328.
- Engel, A. (1965). Mathematische Forschung und Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: l'Institut Grand-Ducal Section des Sciences Naturelles Physiques et Mathématiques (Ed.), *Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement textes originaux des conférences faites au séminaire organisé par la C.I.E.M. à Echternach (G. D. de Luxembourg)* (pp. 271–288).
- Engel, A. (1966a). Initiation à la théorie des probabilités. In: ICMI/CIEM (Ed.), *New Trends in Mathematics Teaching I* (pp. 159–176). Unesco.
- Engel, A. (1966b). Mathematical research and instruction in probability theory. *The Mathematics Teacher*, 59(8), 771–782.
- Engel, A. (1966c). *Mathematische Olympiadaufgaben aus der UdSSR mit ausführlichen Lösungen*. Klett.
- Engel, A. (1966d). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Der Mathematikunterricht*, 12(4), 5–20.
- Engel, A. (1967). Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Unterricht der Unter- und Mittelstufe der Gymnasien. In: H. Behnke & H. G. Steiner (Eds.), *Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Berichte von Studientagungen für belgische und luxemburgische Mathematiklehrer in Münster* (pp. 189–210). Vandenhoeck und Rupprecht.
- Engel, A. (1968). Systematic use of applications in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 202–221.
- Engel, A. (1969a). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Blätter der DGVFM/Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 9(2), 109–121.
- Engel, A. (1969b). The relevance of modern fields of applied mathematics for mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 257–269.
- Engel, A. (1970a). *A Short Course in Probability*. Central Midwestern Regional Educational Laboratory, Inc. (Cemrel).
- Engel, A. (1970b). Teaching probability in intermediate grades. In: L. Rade (Ed.), *The Teaching of Probability and Statistics* (pp. 87–150). Wiley / Almqvist and Wiksel.
- Engel, A. (1973a). Outline of a problem oriented, computer oriented and applications oriented High School mathematics course. *International Journal of mathematics Education in Science and Technology*, 4, 455–492. DOI:10.1080/0020739730040408
- Engel, A. (1973b). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Bd. 1. Klett.
- Engel, A. (1975a). Computing and probability. In: L. Rade (Ed.), *Statistics at School Level. Proc. of the 3rd ISI Round Table Conference on the Teaching of Statistics* (pp. 95–120). Wiley.
- Engel, A. (1975b). Der Wahrscheinlichkeitsabakus. *Der Mathematikunterricht*, 21(2), 70–94.
- Engel, A. (1975c). The probabilistic abacus. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 1–22.
- Engel, A. (1976a). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Bd. 2. Klett.



- Engel, A. (1976b). Why does the probabilistic abacus work? *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 59–69. DOI:10.1007/BF00144359
- Engel, A. (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. Klett.
- Engel, A. (1979a). Algorithmen (Hrsg. ganzes Heft). *Der Mathematikunterricht*, 25(6).
- Engel, A. (1979b). The role of algorithms and computers in teaching mathematics at school. In: B. Christiansen & H.-G. Steiner (Eds.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 249–272). UNESCO.
- Engel, A. (1982). Neue Ideen in der Statistik (Herausgabe gesamtes Heft). *Der Mathematikunterricht*, 28(1).
- Engel, A. (1983). Algorithms. In: M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 312–330). Birkhäuser.
- Engel, A. (1987). *Stochastik*. Klett.
- Engel, A. (1991). *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*. Klett.
- Engel, A. (1993). *Exploring Mathematics with Your Computer*. Mathematical Association of America.
- Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer Science & Business Media.
- Engel, A. (2003). Remarks on the history of the probabilistic abacus. In: Anhang zu einem Brief an RB, vom 8. 9. 2003; etwas andere Version: [mathenchant.org/engel-remarks.pdf](http://mathenchant.org/engel-remarks.pdf).
- Engel, A. (2006). Der Stochastische Abakus (SA). *Stochastik in der Schule*, 26(2), 28–37.
- Engel, A. (2008). The stochastic abacus: An alternative approach to discrete probability. Unveröffentlichtes Manuskript. [mathenchant.org/engel-abacus.pdf](http://mathenchant.org/engel-abacus.pdf)
- Engel, A., Varga, T., & Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe*. Klett.
- Furinghetti, F. (2023). The Beginning of an Adventure: Glances at the first ICME (Lyon 1969). In: F. Furinghetti & L. Giacardi (Eds.), *The International Commission on Mathematical Instruction, 1908–2008: People, Events, and Challenges in Mathematics Education* (pp. 335–346). Springer.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187–205.
- Heitele, D. (1976). *Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe – Dissertation*. PH Ruhr.
- Krauss, S., Weber, P., Binder, K., & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 485–521. DOI:10.1007/s13138-019-00156-w
- Kütting, H. (1981). *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Herder.
- Möllemann, J. (1991). *Laudatio anlässlich der Verleihung des Bundesverdienstkreuzes*. Nachlass Arthur Engel.
- Schweizer, W. (1968). *Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Lambacher-Schweizer Mathematisches Unterrichtswerk, Ausgabe B, Teildruck aus der Analysis*. Klett.
- Specht, E., Quaisser, E., & Bauermann, P. (2020). *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik: Die schönsten Aufgaben. 2. Auflage*. Springer-Verlag.
- Rolf Biehler, Universität Paderborn  
E-Mail: [biehler@math.upb.de](mailto:biehler@math.upb.de)
- Katja Krüger, Technische Universität Darmstadt  
E-Mail: [krueger@mathematik.tu-darmstadt.de](mailto:krueger@mathematik.tu-darmstadt.de)