

ROLF BIEHLER, PADERBORN

Die Schnittstelle Schule - Hochschule – Übersicht und Fokus

1 Einleitung

Die Diskussion der Schnittstelle Schule-Hochschule ist geprägt von unterschiedlichen Aspekten. Was können Studienanfänger wirklich, was sollten sie können? Prüfen Abituraufgaben angemessen das, was aus Sicht der Bildungsstandards vorgegeben ist? Inwieweit ist das, was sie prüfen, auch aus Sicht der Hochschulen angemessen? Welche Möglichkeiten gibt es für Schulen, den Übergang zur Hochschule insbesondere für MINT-Interessierte besser zu unterstützen? Welche Rolle können Vor- und Brückenkurse an der Hochschule spielen? Wie gut erfüllen die Anfängervorlesungen ihre Funktion, in die Hochschulmathematik einzuführen? In manchen aktuellen Stellungnahmen (<http://www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen/aktuelle-stellungnahmen.html>) werden vorrangig Anforderungen an die Schulseite gestellt, aber die Problematik betrifft „beide Seiten“ und auch Maßnahmen für die Periode zwischen Schulabschluss und Hochschulbeginn, die von Hochschulen oder anderen Institutionen angeboten werden.

Die Problematik ist nicht neu, ich habe mein Studium als Diplom-Mathematiker 1971 an der Universität Marburg begonnen und zuvor am „Mathematischen Vorsemester“ an der Universität Bielefeld teilgenommen (Universität Bielefeld Fakultät für Mathematik / Projektgruppe Fernstudium, 1971). Die Abbrecherquote lag seinerzeit auch bei schätzungsweise 40 %. Viel zitiert sind auch die wesentlich früheren Aussagen von Felix Klein (1908) zur doppelten Diskontinuität des Übergangs von Schule zur Hochschule und umgekehrt. Er weist auch auf die Verantwortung und Maßnahmen beider Institutionen (bezogen auf Lehramtsstudierende) hin, was weniger oft zitiert wird:

„Diese doppelte Diskontinuität, die gewiß weder der Schule noch der Universität jemals Nutzen gebracht hat, bemüht man sich neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen, der modernen Entwicklung der Wissenschaft und der allgemeinen Kultur angepaßten Ideen zu durchtränken sucht - wir werden noch vielfach darauf einzugehen haben -, andererseits aber durch geeignete Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht.“ (Klein, 1908, S. 1)

In bemerkenswerter Weise ergreift auch der Mathematiker Heinrich Behnke in den 1960er Jahren die Partei des Gymnasiums in seinem Aufsatz mit dem programmatischen Titel „Die Pflichten der Universität gegenüber dem Gymnasium“ (Behnke, 1965).

„Ich fragte mich dann, woher die Universität ihre Maßstäbe und den Nullpunkt ihrer Lehrtätigkeit nimmt... Die Lehrfreiheit führt (in Deutschland!) dazu, daß der jeweilige Dozent tut, was er will... Der Bruch zwischen Schule und Universität ist mittlerweile so groß geworden, daß er für die jungen Studenten- wenn überhaupt- nur mit Qualen zu überbrücken ist. Hier ist zu erklären: Die Universität (d.h. de facto jeder einzelne Dozent für sich) hat nicht das Recht, für den Übergang zwischen Gymnasien und Universität die Normen allein zu setzen.

... Es gibt nun kein Fach, wo der Anfang des Studiums so schwierig ist wie in der Mathematik. Der Laie findet es begreiflich, denn ihm ist die Aussage vertraut: Das Studium der Mathematik

verlangt eine besondere Veranlagung. Sieht man sich aber die Reifezeugnisse der jungen Studenten an, so ist man erstaunt. Fast alle diese Studenten weisen sich durch gute Zeugnisse aus. Ein Großteil hat besondere Empfehlungen für das Studium bekommen. Und dann beginnt schon die Verzweigung nach drei bis vier Wochen... Falsch sind bei manchen Dozenten nur die Vorstellungen von dem, was ein Student von der Schule mitbringen "müßte" und wie die Mathematik auf der Universität gelehrt werden sollte...

Beim heutigen Zustand folgt durchaus nicht, daß nach dem ersten Jahre noch die Studenten da sind, die eine für das Studium hinreichende mathematische Begabung besitzen. Im Gegenteil! Wer nicht bereit ist, einfach einen vorgesetzten Stoff hinzunehmen, sondern bei allem, was er studiert, vom Sinn und Wert überzeugt sein will, wird nicht so leicht bereit sein, eine ihm unbekannte Theorie axiomatisch zu erlernen.“ (Behnke, 1965, S. 1ff.)

Auch wenn Behnke in einer anderen historischen Situation argumentiert, stellen sich heute vergleichbare Fragen. Felix Klein und Heinrich Behnke denken an das Mathematikstudium für zukünftige Gymnasiallehrkräfte oder Mathematiker, und auch das von mir besuchte Bielefelder Vorsemester bezog sich auf diesen Studiengang. Die aktuelle Diskussion ist im Unterschied dazu stark von Anforderungen geprägt, die von Seiten der Mathematik als Servicefach in den INT-Studiengängen und der Wirtschaftswissenschaft an Universität und Fachhochschule artikuliert werden. Diese Studierenden machen auch numerisch einen viel größeren Anteil aus, und die Anforderungen in den Serviceveranstaltungen zur Mathematik sind andere als im Hauptfach Mathematik. Sie werden tendenziell eher im sicheren Beherrschen von Rechentechniken gesehen als in einer adäquaten Wissenschaftspropädeutik für die Mathematik.

2 Das Spezifizierungsproblem von Anforderungen an Studienanfängerinnen und Studienanfänger

2.1 Verschiedene Anforderungskataloge

Es gibt verschiedene Ansätze dazu, Anforderungen an Studienanfängerinnen und –anfänger zu spezifizieren. Diese werden teilweise mit knappen Listen von Inhalten konkretisiert. So hat die Landesrektorenkonferenz NRW am 10.7.2015 einen Inhaltskatalog für die Wi-INT-Fächer verabschiedet. Jedoch zeigt sich hier die Grenze von alleinigen Inhaltskatalogen. Einerseits bleibt darin ungenau, was z. B. gemeint ist mit „Lösen von einfachen Gleichungen mit Potenzen/Wurzeln/Logarithmen“ oder mit „Ungleichungen, Rechnen mit Beträgen“. Andererseits kommen manche dieser Themen überhaupt nicht mehr in den Lehrplänen und in der Schulpraxis vor, werden hiermit also implizit als neue Forderungen an die Schule gestellt. Der NRW-Wi-INT -Katalog findet eine Konkretisierung und Interpretation durch die Studichecks in NRW (www.studichheck.nrw), die zu 13 mathematischen Wissensgebieten Tests mit jeweils einem guten Dutzend Aufgaben anbieten. Dieses Portal wird genutzt von Seiten der Studiengänge in NRW, die hier Anforderungen an mathematische Vorkenntnisse dadurch spezifizieren können, dass sie zunächst relevante Tests auswählen und dann bestimmte Bestehensquoten dazu festlegen. Eine über die Tests hinausgehende Interpretation und Konkretisierung von Anforderungen wird in den auf die Wissensgebiete des Studichecks zugeschnittenen Lernmaterialien vorgenommen, die die studiVEMINT-Gruppe entwickelt hat (<http://go.upb.de/studivemint>, www.studiport.de) und die im Netz frei verfügbar sind.

Ein einflussreiches Beispiel, das mehr als Inhaltslisten anbietet, ist der cosh-Katalog (cosh cooperation schule:hochschule, 2014). Der cosh-Katalog macht sich zunächst allgemeine

mathematische Kompetenzen in Anlehnung an die Bildungsstandards zu eigen, illustriert diese allerdings nicht an Aufgabenbeispielen. Schwerpunktmäßig formuliert er dann mathematische Tätigkeiten/Fertigkeiten, die an Aufgaben konkretisiert werden. Man findet unter der Überschrift Elementare Algebra/Grundrechenarten u.a. folgende Beispiele (a.a.O., S. 4 und S. 12):

- können Terme zielgerichtet umformen mithilfe von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (23);
- (**) beherrschen die binomischen Formeln mit beliebigen Variablen (24, 25);

23. Vereinfachen Sie den Ausdruck $3ab - (b(a - 2) + 4b)$.

24. (**) Multiplizieren Sie $\left(\frac{b}{3x} - \frac{x^2}{b^3}\right)^2$ mithilfe der binomischen Formeln aus.

25. (**) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{4 - t^2}{4 - 4t + t^2}$.

Diese Beispiele sind generisch gemeint, sie stehen für einen gewissen Aufgabentyp. In Aufgabe 25 geht es offensichtlich um die Verwendung von binomischen Formeln zum Faktorisieren (und anschließendem Kürzen). Diesen Typ genauer zu charakterisieren, ist aber nicht so einfach, so ist z. B. auf der Basis der zitierten Beispiele offen, welche Komplexität von Termen mit welcher Routineleistung beherrscht werden soll. Aus Sicht der Didaktik der Algebra (Malle, 1993) und der Anforderungen für Mathematik als Servicefach fehlen zudem bestimmte Aspekte. Das Aufstellen von Termen zu Sachsituationen und die Interpretation von Termen in Sachsituationen werden nicht erwähnt. Auch wird in mathematischen Anwendungen mit Termen gearbeitet, die Größen (mit Einheiten) darstellen, was besonders fehleranfällig ist. In Anwendungen müssen ferner Formeln (Terme) auch oft funktional interpretiert werden (Bürger, Fischer, & Malle, 1986).

Ein anderer Ansatz ist das von dem MNU entwickelte Konzept (Pinkernell et al., 2017) mit der Überschrift „Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen“. Hier werden andere Akzentuierungen deutlich: Es geht nicht nur um mathematische Verfahren, sondern auch um Begriffe. Neben dem Beherrschen von Rechentechniken wird das Verstehen und das Anwendenkönnen eine explizite Kategorie. Dies wird noch deutlicher, wenn von den Autorinnen und Autoren folgende Kategorien unterschieden werden, die vorwiegend aus der mathematikdidaktischen Diskussion entlehnt werden: Verfahren im operativen Sinne beherrschen, Grundvorstellungen aktivieren und Fehlvorstellungen erkennen, Repräsentationswechsel durchführen, Begriffe und Verfahren in inner- und außermathematischen Kontexten anwenden (a. a. O., S. 5). Bezogen auf die Analysis wird das dann durch folgende Formulierungen präzisiert:

„Ableitungen und bestimmte Integrale deuten und bestimmen:

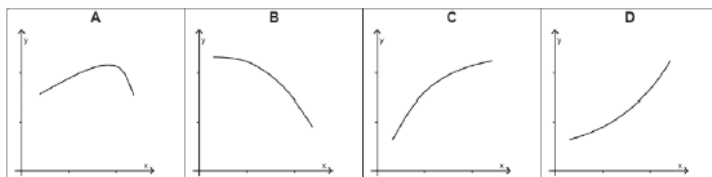
1. die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle als lokale Änderungsrate und als Steigung einer Tangente an G_f deuten
2. das bestimmte Integral über einer Funktion f als (re-) konstruiertem Bestand und als eine durch G_f begrenzte Fläche deuten
3. Änderungsraten und Tangentensteigungen sowie Bestände und Flächeninhalte numerisch, graphisch bzw. algebraisch bestimmen“. (a. a. O., S. 7)

Diese Kategorien werden weiter durch Aufgaben illustriert, die sich von üblichen „Rechenaufgaben“ unterscheiden (Fig. 1).

Betrachte die aufgeführten Aussagen zu Änderungen.

1. Na endlich! Rückgang der Arbeitslosenzahlen beschleunigt sich.	2. Schulentwicklung Dramatischer Rückgang der Schülerzahl	3. Klimakatastrophe Die Durchschnittstemperaturen wachsen immer schneller.	4. Erfreulich! Die Zunahme der Verkehrsunfälle konnte verringert werden.
---	---	--	--

Welcher der folgenden Graphen könnte zu welcher Schlagzeile passen?



(aus: Neue Wege 2010)

Fig. 1 Graphik entnommen aus Pinkernell et al. 2017, S. 8.

Die Bildungsstandards (KMK, 2012) stellen selber einen Beitrag zum Spezifizierungsproblem dar. Mit ihrer Kompetenzorientierung gehen sie über reine Inhaltslisten hinaus, da diese allein nicht geeignet sind, das auszudrücken, was die Abiturienten wirklich können sollen. Abituraufgaben sind aus dieser Perspektive auch Konkretisierungen und Interpretationen dieser Anforderungen. Es ist deshalb natürlich völlig legitim, dass aus Hochschulperspektive eine Auseinandersetzung über die geforderten Kompetenzen, Fertigkeiten und Verständnisse über eine kritische Analyse der Abituraufgaben geführt wird.

2.2 Die MaLeMint-Studie, die Bildungsstandards und die mathematische Bildung

Die Debatte um die Spezifizierung von Anforderungen an Studienanfänger und Studienanfängerinnen hat in jüngster Zeit neue Impulse durch die MaleMint-Studie erhalten (Neumann, Heinze, & Pigge, 2017; Pigge, Neumann, & Heinze, 2017), die im Vergleich zu den anderen Publikationen auf einer umfangreichen Befragung (Delphi-Studie) von Lehrenden an den deutschen Hochschulen beruht. Von der Grundgesamtheit von 2233 Lehrenden wurde in der ersten Runde eine Stichprobe von 952 und in der zweiten Runde eine von 664 erzielt. Die Anforderungen werden in die Bereiche a. *Mathematische Inhalte*, D. *Mathematische Arbeitstätigkeiten*, C. *Wesen der Mathematik* und D. *Persönliche Merkmale* aufgegliedert. Bei den mathematischen Arbeitstätigkeiten werden neben den Grundlagen die folgenden Tätigkeiten unterschieden: Mathematisches Argumentieren und Beweisen (B2), Mathematisches Kommunizieren (B3), Mathematisches Definieren (B4), Problemlösen (B5), Mathematisches Modellieren (B6), Recherche (B7). Es ergeben sich schon auf Bezeichnungsebene der einzelnen Aspekte viele Überschneidungen mit dem, was in den Bildungsstandards (prozessbezogene) allgemeine mathematische Kompetenzen genannt werden. Es ist hier nicht der Platz, detailliert Ergebnisse zu den Inhalten zu referieren, die naturgemäß als Themenliste abgefragt wurden, aber nicht konkretisiert durch Aufgaben werden wie bei cosh oder dem MNU. Es gibt aber einige bemerkenswerte Unterschiede in den grundsätzlichen Akzentuierungen. Während es in den Bildungsstandards nur „Mathematisches Argumentieren“ heißt wird hier von „Mathematischem Argumentieren und Beweisen“ gesprochen und

es werden in der inhaltlichen Auffächerung dieser Tätigkeit sehr differenziert Aspekte des (hochschulmathematisch relevanten) formalen Beweisens thematisiert. Auch wird dem mathematischen Definieren eine eigene Kategorie zugeschrieben, die in den Bildungsstandards gar nicht auftaucht. Da beide Aspekte eine hohe Zustimmung erfahren, könnte man das durchaus so interpretieren, dass dem engeren Bezug zu Charakteristika der Wissenschaft Mathematik ein höherer Stellenwert eingeräumt wird als in den Bildungsstandards. Ein kurzer Blick in Schulbücher der Oberstufe bestätigt, dass dem Definieren und Beweisen eigentlich kein großer Stellenwert zukommt. Bemerkenswert ist aber, dass die Befragten allen mathematischen Tätigkeiten eine wichtige Rolle zuschreiben, so auch dem mathematischen Kommunizieren, Problemlösen und Modellieren. Dies könnte man möglicherweise als eine Zustimmung zu den entsprechenden Kompetenzen der Bildungsstandards werten. MINT-Hochschullehrende fordern eben nicht nur die Beherrschung von Rechentechniken für ihre Studierenden. Bemerkenswert ist auch die hohe konsensuelle Zustimmung zu „Sicherer Umgang mit Taschenrechnern und Computern zur Lösung von Aufgaben (z. B. einfache graphische Lösungsverfahren aber auch kritische Betrachtung von Ergebnissen)“. Hier zeigen sich durchaus andere Anforderungen als sie in manchen aktuellen Stellungnahmen artikuliert werden. Eine wichtige Orientierung liefert bei MaleMint die Unterscheidung von zwei unterschiedlichen Niveaus.

„Niveau 1: Grundlegendes Wissen in Bezug auf die mathematischen Inhalte, Algorithmen oder Routinen. Diese können wiedergegeben bzw. ausgeführt werden. Niveau 1 korrespondiert z. B. mit Aufgabenanforderungen der Arten Ausführen, Erkennen, Nachvollziehen, Umformen, Berechnen oder Kennen.

Niveau 2: Flexibles und stark vernetztes Wissen als Basis für eine kreative Verwendung zur Generierung neuen Wissens oder von Problemlösungen durch heuristische Prozesse, Verknüpfung bzw. Verallgemeinerung. Niveau 2 korrespondiert z. B. mit Aufgabenanforderungen der Arten Übertragen, Interpretieren, Beurteilen, Analysieren, Beweisen und Verallgemeinern.“ (Neumann et al., 2017, S. 24)

Aus der MaleMint-Studie möchte ich weitere Ergebnisse zur Dimension „Wesen der Mathematik“ bzw. „Metawissen zur Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin“ hervorheben. Auch hier werden zwei Niveaus unterschieden: „Niveau 1: Die Vorstellungen über Mathematik liegen zu Studienbeginn als abstraktes Metawissen vor (d. h. die Lernenden haben diese als Information in irgendeiner Form mitgeteilt bekommen), Niveau 2: Die Lernenden haben schon eigene Erfahrungen mit dem jeweiligen Wesenszug der Mathematik gemacht, z. B. indem entsprechendes mathematisches Arbeiten beobachtet und reflektiert oder sogar selbst vollzogen wurde.“ (Neumann et al., 2017, S. 28). Es ist bemerkenswert, dass hier ein großer Konsens herrscht, auch wenn dieser immer nur auf dem Niveau 1 angesiedelt ist. Dazu gehören Punkte wie „Das Beweisen ist eine zentrale Tätigkeit der Mathematik. Die spezielle Art des Beweisens grenzt die Mathematik von vielen anderen Disziplinen ab, „Die für das Beweisen notwendige Präzision erfordert eine Strenge in der Begriffsdefinition und der Argumentation“ und „Mathematik sollte als ein offenes System angesehen werden, das viel mehr und qualitativ Anderes enthält, als in der Schulmathematik thematisiert wird.“ (a. a. O., S. 29).

Man kann natürlich kritisch fragen, wie dieses Metawissen substantiell gelernt werden kann, wenn nicht auch durch eigene Erfahrungen mit Mathematik und deren Reflexion. Dieses Metawissen wird als notwendig für einen Studienerfolg gewertet. Der Aufbau kann aber nur als gemeinsame Aufgabe von Schule, Hochschule und vielleicht Vorkursen angesehen

werden. Welche Rolle spielt das Metawissen in den Bildungsstandards? Die Bildungsstandards zitieren Heinrich Winter (1995, S. 37)

„(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen, (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

Dies kann man insbesondere als Metawissen zur Mathematik im Sinne der Allgemeinbildung interpretieren. Dieser Aspekt wird aber in den Bildungsstandards bei den konkreten Kompetenzen gar nicht aufgegriffen. Man versteht diese Lücke besser, wenn man sich auf das dänische KOM-Projekt bezieht, bei dessen Kompetenzorientierung die deutschen Bildungsstandards Anleihen gemacht haben. Die Autoren des KOM-Projektes drücken folgendermaßen aus, dass es über prozessbezogene Ziele hinausgehende wichtige Ziele gibt, die wir dem Metawissen zuordnen können:

„The above-mentioned competencies are all characterised by being action orientated in that they are directed towards handling different types of challenging mathematical situations. Besides the mathematical mastery we have tried to capture with these competencies, we have also found it desirable to operate with types of “active insights” into the nature and role of mathematics in the world, and which are not directly behavioural in nature.“(Niss & Højgaard, 2011, S. 74)

Sie zählen insbesondere auch Einsichten in die historische Entwicklung sowie in die soziale und kulturelle Bedeutung der Mathematik dazu. Diese Aspekte der Allgemeinbildung sind insbesondere natürlich auch für diejenigen Schülerinnen und Schüler wichtig, die kein MINT-Studium aufnehmen wollen und die in der MaLeMint-Befragung nicht berücksichtigt wurden.

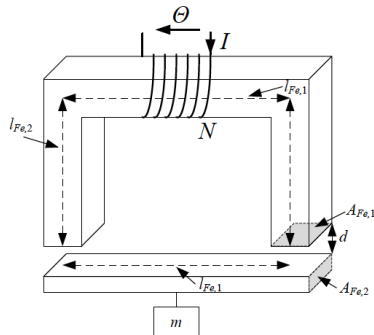
Da die Schul- und Unterrichtszeit endlich ist, werfen die Anforderungskataloge und die MaLeMint-Studie auch die Frage auf, in welchem quantitativen Verhältnis die einzelnen Anforderungen und Anforderungsdimensionen zur Geltung gebracht werden können und sollen.

3 Die Heterogenität der Anforderungen an die Studienanfängerinnen und Studienanfänger

Die Diversität der Anforderungen an Studienanfängerinnen und Studienanfänger möchte ich an drei Beispielen illustrieren, die drei am Kompetenzzentrum für Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) von mit betreuten Dissertationen entnommen sind. Kortemeyer (2018) hat mathematische Anforderungen aus der Elektrotechnik im ersten Studienjahr analysiert und dabei einige Bereiche identifiziert, die weder in der Schule noch in den Mathematikvorlesungen im ersten Studienjahr explizit adressiert werden. Eine der untersuchten Klausuraufgaben thematisierte Elektromagneten (Fig. 2).

Hieran lassen sich einige Besonderheiten verdeutlichen. Für die Aufstellung der Formel $L(d)$ sind eigentlich etwas andere Denkprozesse notwendig als die, die in der Mathematikdidaktik als Modellierungsprozesse konzeptualisiert werden (Blum, 2010; Greefrath, Kaiser, Blum, & Borromeo Ferri, 2013). Das Realmodell ist im Wesentlichen vorgegeben und die Studierenden sind sich der Idealisierungen und Annahmen nicht unbedingt bewusst, und das ist auch nicht zwingend notwendig. Beim Lösungsprozess verlassen die Studierenden i.d.R.

nicht den Kontext und bewegen sich dann eben nicht in einer kontextfreien „Welt der Mathematik“, sondern die Lösungsprozesse finden im Kontext elektromagnetischer Bedeutungen statt.



4.1.3 (A3) GEBEN SIE DIE INDUKTIVITÄT L DER ANORDNUNG IN ABHÄNGIGKEIT DER LUFTSPALTBREITE d AN UND BESTIMMEN SIE: (3 PUNKTE)

LÖSUNG

$$L(d) = \frac{N^2}{R_M(d)} = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_{Fe,1} + 2l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \right) + \frac{2}{A_{Fe,1} \mu_0} \cdot d}$$

(A) DIE LUFTSPALTBREITE d , BEI DER DIE INDUKTIVITÄT MAXIMAL WIRD

LÖSUNG

$$\Rightarrow d = 0$$

Fig. 2 Auszüge aus der Klausuraufgabe zum Elektromagneten, entnommen aus Kortemeyer 2018, S. 126.

Validierungsprozesse lassen sich bei den Studierenden auch beobachten, haben aber einen anderen Charakter als in den Konzepten zur Modellierung spezifiziert. Da die Aufgaben authentisch gestellt sind, können die Studierenden ihr qualitatives elektrotechnisches Wissen heranziehen, um die errechnete Lösung auf elektrotechnische Plausibilität überprüfen zu können. Falls das nicht der Fall ist, werden Rechnungen und Lösungsansätze in Frage gestellt, aber nicht die implizit gebliebenen Modellannahmen. Das wäre bei vielen schulischen „Modellierungsproblemen“ gar nicht zweckmäßig, da man sich auf die Authentizität in der Regel nicht verlassen kann. Das mathematische Arbeiten muss hier eher als „elektrotechnisch-mathematisches Arbeiten“ gekennzeichnet werden, da immer mit Größen und ihren Einheiten gerechnet werden muss. Es ist notwendig, geschickt mit einem System von Gleichungen und Formeln zu arbeiten. Kortemeyer (2018) nennt das „Gleichungs- und Einheitenmanagement“. Das ist eine Praxis, die so weder in der Schule noch in den Mathematikvorlesungen für Ingenieure explizit vermittelt wird. Zudem haben die Terme eine aus der

Schule nicht bekannte Komplexität und Struktur. Die notwendigen „Umformungen“ haben andere Ziele als die, die im traditionellen Algebraunterricht geübt werden.

Die zweite Teilaufgabe verlangt, dass die Formel als Funktion von d interpretiert und qualitativ auf Monotonie und Extrema analysiert wird. Das illustriert das, was weiter oben als die funktionale Interpretation von Formeln bezeichnet wurde. Viele Grundkurschüler/innen könnten schnell aufgeben, weil der Funktionstyp von $L(d)$ im Curriculum nicht mehr vorkommt.

Bei den Lösungen konnten zwei interessante Vorgehensweisen beobachtet werden. Manche Studierende argumentierten physikalisch, dass das Maximum bei 0 (kein Luftspalt) liegen muss. In diesem speziellen Fall hätten Schüler/innen das physikalische Fachwissen nicht, um so argumentieren zu können. Aber es wären schülergerechte Anwendungsbeispiele denkbar, die eine solche Herangehensweise vermitteln könnten. Nicht überraschend ist, dass es selbst bei Studierenden vorkommt, dass man schematisch beim Stichwort „Maximum“ damit anfängt abzuleiten. Das führt hier nicht weiter, selbst wenn die Ableitungsregeln beherrscht werden. Das schematische Training von Verfahren, ohne die Anwendungsbedingungen zu beachten, ist hierauf keine adäquate schulische Vorbereitung.

Ein zweites Beispiel möchte ich der Dissertation von Frank Feudel (in Vorbereitung) entnehmen. Frank Feudel hat zum einen Vorkenntnisse zum Ableitungsbegriff von Studienanfängern untersucht. Zum anderen hat er Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften sowie Lehrwerke zur Wirtschaftswissenschaft im Hinblick auf die Kompetenzen analysiert, die implizit und explizit erwartet werden. Erwartungsgemäß haben die untersuchten Studienanfänger deutlich Schwächen bei den Ableitungsregeln (Fig.3).

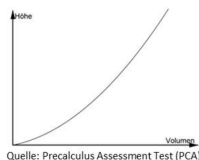
Abzuleitende Funktion	% richtig Gesamtstichprobe	% richtig GK	% richtig LK
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$	77,6%	73,7%	93,1%
$f(x) = \sqrt{x} + 3x$	39,2%	36,8%	48,3%
$f(x) = e^{2x}$	38,5%	33,3%	58,6%
$f(x) = e^{x^2}$	32,2%	27,2%	51,7%
$f(x) = xe^x$	11,2%	8,8%	20,7%
$f(x) = \frac{1}{x}$	31,5%	27,2%	48,3%

Fig. 3 Ergebnisse eines Tests mit Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften in Paderborn, entnommen Feudel (in Vorbereitung).

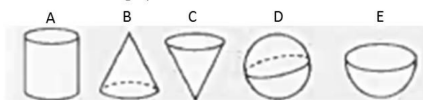
Aber auch ihr konzeptuelles Verständnis wies erhebliche Mängel auf. Die Aufgabe aus Fig. 4 weist Ähnlichkeiten zu der weiter oben zitierten Aufgabe aus der MNU Veröffentlichung auf (Fig. 1). Es ist bemerkenswert, dass der in der Didaktik als „Graph-als-Bild-Fehler“ (Wahl von Gefäß C oder E) auch unter den untersuchten Abiturientinnen und Abiturienten sehr häufig auftritt.

Kompetenzen im qualitativen Umgang mit Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung sind notwendig, wie beispielsweise die folgende Graphik in Fig. 5 zeigt, die zugleich auch einige Spezifitäten der Wirtschaftswissenschaften illustriert: Die Funktion e stellt die Durchschnittsertragsfunktion dar, es müssen verschiedene Wachstumsphasen unterschieden werden.

7) Der folgende Funktionsgraph zeigt die Wasserhöhe beim Füllen eines Gefäßes in Abhängigkeit von der hinzugegebenen Wassermenge:



Welches Gefäß gehört zu diesem Füllgraphen?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Abbildung 4: Aufgabe 7 des Vortests

Gefäß A	Gefäß B	Gefäß C	Gefäß D	Gefäß E	keine Antwort
4,9%	37,8%	28,7%	3,5%	23,8%	1,4%

Fig. 4 Ergebnisse eines Tests mit Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften in Paderborn entnommen aus Feudel (in Vorbereitung).

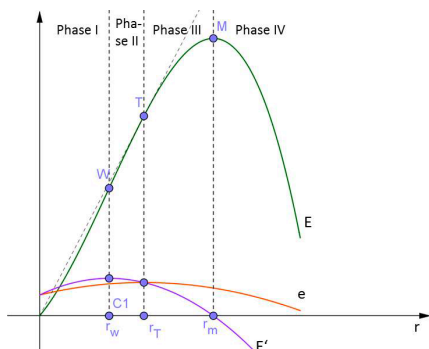


Fig. 5 Graphik einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion mit ihren 4 Phasen entnommen Feudel (in Vorbereitung) in Analogie zu einer passenden Graphik aus Wöhe and Döring (2013, S. 306).

In ganz andere Richtungen gehen Anforderungen aus den Mathematikstudiengängen, bei denen das Beweisen naturgemäß eine größere Rolle spielt. Ich greife dazu ein Testitem und empirische Ergebnisse auf, die Leander Kempen (2018) in seiner Dissertation vorstellt, um schulisch entwickelte Vorverständnisse zum Beweisen bei Studienanfängern im Lehramt Haupt-, Real- und Gesamtschulen zu ermitteln.

Aufgabe 1: Die Summe $11 + 17$ ist eine gerade Zahl.

Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen?

- Begründen Sie überzeugend!

Fig. 6 Item aus Eingangstest zur Vorlesung „Einführung in die Kultur der Mathematik“

Die Qualität der Antworten wurde kodiert und bei den Erstsemestern ergab sich die folgende Häufigkeitsverteilung.

	Nicht be- arbeitet	Keine Ar- gumen- tation	Empirisch	Pseudo	Korrekt mit Män- geln	Korrekt
%	5	22	13	22	35	4

Fig. 7 Bewertung der Begründungen, Item von Fig. 6

Unter „empirisch“ werden Argumente verstanden, die die Aussage nur für einige Beispiele verifizieren. Während dieser Begründungstyp deutlich seltener auftritt als in anderen vergleichbaren Studien, ist insgesamt die Leistung der Studienanfänger bei dieser relativ einfachen Begründungsaufgabe ernüchternd. Noch bemerkenswerter ist die Auswertung, wie oft Variablen zur Begründung eingesetzt wurden: Unter den Erstsemestern nur 16 % (!) überhaupt mit Variablen argumentieren, so dass ein wichtiges Ziel des Algebraunterrichts, Variablen auch zu nutzen, um Zusammenhänge allgemeingültig zu begründen (Malle, 1993) anscheinend von den Befragten nur unzureichend erreicht worden ist. Kempens Ergebnisse bestätigen Zweifel daran, ob das Thema Argumentieren, das auch in den Bildungsstandards eine wichtige Rolle besitzt, im Unterricht nachhaltig behandelt wird.

Diese Beispiele können nur Schlaglichter auf die Problemsituation werfen. Die zitierten Dissertationen beschäftigen sich in ihren verschiedenen Domänen mit der Frage, wie man Anforderungen an und Kenntnisse von Studienanfängern in den verschiedenen Domänen theoretisch beschreiben und empirisch untersuchen kann. Sie stützen die These, dass eine einseitige Forderung nach besserer Beherrschung von „Rechentechniken“ zu kurz greift. Die genannten Beispiele entstammen den Wi-MINT-Fächern, die für den allgemeinbildenden Schulunterricht eine wichtige Rolle spielen. Der Schulunterricht kann sich aber nicht ausschließlich an den Anforderungen dieser Fächergruppe orientieren. Beispielhaft sind hier Anforderungen für Stochastik zu nennen, zu der die MaleMint-Befragung der Hochschullehrenden keinen Konsens erbracht hat. Das verwundert nicht, da Kenntnisse zum Thema Daten und Statistik derzeit in den Anfängervorlesungen der MINT-Fächer keine bedeutende Rolle spielen. Die anderen sozial- und humanwissenschaftlichen Fächer wurden von MaleMint nicht untersucht und es wurde auch nicht explizit der Allgemeinbildungsauftrag der Sekundarstufe 2 reflektiert. Unter dieser Perspektive würde man der Stochastik einen wesentlich höheren Stellenwert zuschreiben (Biehler & Eichler, 2015) (www.pro civicstat.org). Die rapide wachsende wissenschaftliche und gesellschaftliche Bedeutung von Data Science, Big Data und datengetriebenen Algorithmen der künstlichen Intelligenz wirft neue Fragen sowohl für die schulische Allgemeinbildung als auch die universitäre Bildung im Sinne eines *studium generale* auf (Ridsdale et al., 2015; Weigend, 2017; www.prodabi.de), wobei viele Wissenschaften bereits zunehmend Elemente der Data Science aufnehmen und grundständige Studiengänge dazu entstehen. Diese Aspekte sollten bei den Diskussionen zur Gestaltung des Übergangs von Schule zu Hochschule in Zukunft noch stärker beachtet werden.

4 Maßnahmen an der Schnittstelle Schule Hochschule

Die Frage, wie gut Studienanfängerinnen und Studienanfänger auf die universitären Studien vorbereitet sind und welche Seite welche Maßnahmen ergreifen kann und sollte, ist ein internationales Problem und betrifft nicht nur das Fach Mathematik. Damit verknüpft ist die Frage nach der Arbeitsteilung zwischen Schule und Hochschule: Was kann die Schule leisten – was fällt in den Aufgabenbereich der Universitäten? Jansen und van der Meer (2012) kommen zu folgender Schlussfolgerung in ihrer länderübergreifenden Studie:

“Alternatively, the question can be asked whether the onus of preparing students for academic work should be on the universities rather than high schools. Rather than reforming secondary education, it could be suggested that the first year in higher education should be reformed. “ (a.a.O., S. 11)

Sie argumentieren dann für eine “transition pedagogy” für die universitäre Eingangsphase, in der das Einführen in die Fachkulturen expliziter und bewusster unternommen werden sollte. An den Universitäten gibt es in jüngster Zeit eine Vielzahl von Maßnahmen in diese Richtung. Diese werden sich vermutlich auch dann nicht erübrigen, wenn die Schule sich in Richtung von Hochschulanforderungen ändern würde. Der begrenzte Spielraum der Schule, insbesondere des Gymnasiums, ergibt sich auch daraus, dass ein wesentlich größerer Anteil an einer Alterskohorte Abitur macht als das noch vor 30 oder 40 Jahren der Fall war. Das BMBF hat mehrere Programme aufgelegt, um praktische Maßnahmen zu fördern (Qualitätspakt Lehre I und II, Qualitätsoffensive Lehrerbildung) oder auch die Hochschulforschung. Private Stiftungen fördern Fellowships in der Hochschullehre, einzelne Projekte sowie Zentren zur Hochschuldidaktik, wie z. B. das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm), das jetzt an den Universitäten Hannover, Kassel und Paderborn angesiedelt ist (www.kdhm.de). Darüber hinaus hat sich der Arbeitskreis Hochschulmathematikdidaktik der GDM etabliert. Das khdm hat mehrere Tagungen veranstaltet um den wissenschaftlichen Austausch und die Vernetzung in der Hochschuldidaktik zu fördern (Bausch et al., 2014; Biehler, Hochmuth, Hoyles, & Thompson, 2014; Göller, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2017; Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2016). Darin werden verschiedene Maßnahmetypen diskutiert und analysiert, wie mathematische Vorkurse (z.B. www.vemint.de, <http://go.upb.de/studivemint>, www.ombplus.de), „Nullte Semester“, spezielle Brückenvorlesungen, die neue eingerichtet wurden, um den Übergang zu erleichtern (Grieser, 2013; Hilgert, Hoffmann, & Panse, 2015) und unterschiedlichste semesterbegleitende Maßnahmen wie Tutorenschulungen, die Einrichtung von Lernzentren für Mathematikstudierende und das Angebot zusätzlicher multimedialer Lernmaterialien und diagnostischer Tests mit denen Studierende ihre mathematischen Kenntnisse selbst einschätzen können (<https://studicheck.nrw/>). Weniger verbreitet sind Konzepte, wie man Anfängervorlesungen in Mathematik wie Analysis und Lineare Algebra im Hinblick auf eine Transitionsdidaktik umgestalten könnte. Ein Ansatz, der sich in übliche Lehrveranstaltungen relativ leicht integrieren lässt, sind „Schnittstellenaufgaben“, die Verbindungen zur Schulmathematik oder zu den jeweiligen Berufen und anderen Studiengängen herstellen. Bauer hat hier für die gymnasiale Lehrerbildung Konzepte und Beispiele vorlegt (Bauer, 2013; Bauer & Partheil, 2009) ebenso wie Hoffmann (2018) und Eichler und Isaav (2016). Für die Anfängervorlesungen „Mathematik für Maschinenbauer“ sind solche Schnittstellenaufgaben von Paul Wolf entwickelt und empirisch hinsichtlich ihrer Wirksamkeit untersucht worden (Wolf, 2017; Wolf &

Biehler, 2016). Ein übergreifendes theoriebasiertes Konzept zur Evaluation dieser verschiedenen Maßnahmen der Studieneingangsphase wird derzeit im BMBF-geförderten WiGeMath-Projekt entwickelt (Colberg et al., 2016; Liebendörfer et al., 2017).

5 Schlussbemerkung

Die Schnittstelle Schule-Hochschule stellt ein Problem dar, dass immer wieder neu analysiert und gestaltet werden muss. In jüngster Zeit arbeiten viele neue Initiativen an Lösungsansätzen. An mehreren Stellen sind fruchtbare Dialoge zwischen Schule und Hochschule angestrebt worden. Ferner stellt die neu entstandene Hochschuldidaktik Mathematik Konzeptualisierungen und Lösungsansätze bereit, die die Bearbeitung der Schnittstelle unterstützen können. Die Bedingungen für substantielle Fortschritte im Übergang Schule/Hochschule sind jetzt vielleicht deshalb wesentlicher günstiger als in den Epochen, in denen sich die Mathematiker Felix Klein und Heinrich Behnke mahnend zu Wort gemeldet haben.

Danksagung

Ich danke Bärbel Barzel und Gilbert Greefrath für wertvolle Anregungen zu einer ersten Fassung des Manuskripts.

6 Literatur

- Bauer, T. (2013). *Analysis-Arbeitsbuch*. Heidelberg: Springer.
- Bauer, T., & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, 56, 85-103.
- Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. Wassong, T. (2014). *Mathematische Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Behnke, H. (1965). Die Pflichten der Universität gegenüber dem Gymnasium. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte*, XI, 1-19.
- Biehler, R., & Eichler, A. (2015). Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik für die Sekundarstufe II* (pp. 70-80). Braunschweig: Diesterweg.
- Biehler, R., Hochmuth, R., Hoyles, D. C., & Thompson, P. W. (2014). Mathematics in Undergraduate Study Programs: Challenges for Research and for the Dialogue between Mathematics and Didactics of Mathematics. *Oberwolfach Reports*, 11(4), 3103-3175. doi:10.4171/OWR/2014/56
- Blum, W. (2010). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. Herausforderung für Schüler und Lehrer. *Praxis der Mathematik*, 34(52), 42-48.
- Bürger, H., Fischer, R., & Malle, G. (1986). Formeln als Funktionen. *Mathematik lehren*, 15, 41-45.
- Colberg, C., Schürmann, M., Biehler, R., Hochmuth, R., Schaper, N., & Liebendörfer, M. (2016). Verbundprojekt WiGeMath: Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase. In A. Hanft, F. Bischoff, & B. Prang (Hrsg.), *Working Paper Studieneingangsphase - Perspektiven aus der Begleitforschung zum Qualitätspakt Lehre* (pp. 19-23). Oldenburg: Carl-von-Ossietzky Universität.
- cosh cooperation schule:hochschule. (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0)*. <http://www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen/aktuelle-stellungnahmen/120-s-04-mindestanforderungskatalog-mathematik-der-hochschulen-baden-wuerttembergs.html>
- Eichler, A. & Isaev, V. (2016). Disagreements between mathematics at university level and school mathematics in secondary teacher education. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth &

-
- H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Conference Proceedings (S. 52-59). Kassel: khdm
- Feudel, F. (in Vorbereitung). *Verständnis des Ableitungsbegriffs und dessen Anwendung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. (Dissertation), Universität Paderborn, Paderborn.
- Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2017). *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121>.
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe* (pp. 11-37). Heidelberg: SpringerSpektrum.
- Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Heidelberg: Springer.
- Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten – tutoriell und transparent*. Heidelberg: Springer.
- Hoffmann, M. (2018). *Konzeption von fachmathematischen Schnittstellenmodulen für Lehramtsstudierende am Beispiel ausgewählter Themen der höheren Analysis* (khdm report 18-06). <http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2017110153692>
- Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Eds.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase - Herausforderungen und Lösungsansätze*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Jansen, E. P. W. A., & van der Meer, J. (2012). Ready for university? A cross-national study of students' perceived preparedness for university. *Australian Educational Researcher*, 39, 1-16.
- Kempen, L. (2018). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. <https://katalog.ub.uni-paderborn.de/local/records/001963666>
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I: Arithmetik-Algebra-Analysis* (Vol. 1). Berlin: Julius Springer.
- KMK. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- Kortemeyer, J. (2018). *Mathematische Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenveranstaltungen – Normative und empirische Analysen zu exemplarischen Klausuraufgaben aus dem ersten Studienjahr in der Elektrotechnik*. (Dissertation), Universität Paderborn, Paderborn. <http://digital.ub.uni-paderborn.de/hs/content/titleinfo/2855023>
- Liebindörfer, M., Hochmuth, R., Biehler, R., Schaper, N., Kuklinski, C., Khellaf, S., Colberg, C., Schürmann, M., Rothe, L. (2017). A framework for goal dimensions of mathematics learning support in universities. In T. Dooley & G. Guedet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017)* (pp. 2177-2184). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Neumann, I., Heinze, A., & Pigge, C. (2017). Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für ein MINT-Studium? Eine Delphi-Studie. <http://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/malemint-studie>
- Niss, M., & Højgaard, T. (Hrsg.). (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde University, IMFUFA.
- Pigge, C., Neumann, I., & Heinze, A. (2017). *Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge – Eine Delphi-Studie mit Hochschullehrenden – Ergebnisüberblick*.

-
- <https://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-und-projekte/malemint/onlineveroeffentlichung>
- Pinkernell, G., Elschenbroich, H.-J., Heintz, G., Körner, H., Langlotz, H., & Pallack, A. (2017). Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen. https://www.mnu.de/images/publikationen/Mathematik/MNU-BaKo-Papier_korr3.pdf
- Ridsdale, C., Rothwell, J., Smit, M., Ali-Hassan, H., Bliemel, M., Irvine, D., Kelley, D., Matwin, S., Wuetherick, B. (2015). *Strategies and best practices for data literacy education: knowledge synthesis report*. <http://hdl.handle.net/10222/64578>
- Universität Bielefeld Fakultät für Mathematik / Projektgruppe Fernstudium. (1971). *Mathematisches Vorsemester: Texte*. Berlin: Springer.
- Weigend, A. (2017). *Data for the people. Wie wir die Macht über unsere Daten zurückerobern*. Hamburg: Murmann Publ.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37-46.
- Wöhe, G., & Döring, U. (2013). *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. 25. Auflage. München: F. Vahlen.
- Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge - Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Wolf, P., & Biehler, R. (2016). *Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium (V.2)*. khdm-Report: Nr. 04-16. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016010549550>