IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Ed.). (2023). Beiträge zum Mathematikunterricht 2022
. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

Tobias MAI, Paderborn & Rolf BIEHLER, Paderborn

Einblicke in ein Referenzmodell zur Analyse der Einführung von Vektoren in Schulbüchern

Vektoren sind aus einer hochschulmathematischen Perspektive als Elemente eines Vektorraumes implizit definiert. Im Kern können also Objektmengen, auf denen den Axiomen genügende Operationen definiert sind, als Mengen von Vektoren aufgefasst werden. In der Schule werden Vektoren üblicherweise nicht axiomatisch eingeführt. Stattdessen wird eine neue Objekt-Art eingeführt und als Vektoren bezeichnet. Anschließend werden sukzessive Eigenschaften der neuen Objekte und (Rechen-)Operationen eingeführt. In der Literatur werden Vektorzugänge mit Hilfe von Tupeln, Pfeilklassen und Verschiebungen unterschieden (Henn & Filler, 2015). Tietze, Klika und Wolpers (1982) nennen zudem Interpretationen als Punkte und Zeiger (Ortspfeile). Außerdem können Vektoren auch als verallgemeinerte Zahlen, z.B. Stücklisten, eingeführt werden (Vohns, 2011).

Forschungsziel

Um Probleme beim Übergang von Schule zu Hochschule am Beispiel von Vektoren besser zu verstehen, streben wir eine Analyse von Vektoreinführungen in deutschen Schulbüchern an. Wir nutzen dazu die Anthropologischen Theorie der Didaktik, die für solche Analysen die Erstellung eines sogenannten epistemologischen Referenzmodells vorschlägt, welches die Perspektive der forschenden Personen expliziert.

Die Anthropologische Theorie der Didaktik

Teil der Anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) ist das Modell der didaktischen Transposition. Dieses beschreibt mit Hilfe eines vierstufigen Prozesses, wie zu lehrendes (mathematisches) Wissen transformiert wird. Die vier Stufen sind „scholarly knowledge“, „knowledge to be taught”, “knowledge taught” und “knowledge actually learned”. Die didaktische Transposition ist auch ein Mittel, um den Übergang von Schule zu Hochschule tiefer zu analysieren. Dabei ist zu beachten, dass die Stufen unterschiedlichen institutionellen Kontexten zugeordnet werden müssen. Bei der Betrachtung von Prozessen didaktischer Transposition nehmen forschende Personen eine Außensicht auf den Prozess der didaktischen Transposition in Form eines weiteren institutionellen Standpunktes ein. In der ATD wird die Ausarbeitung und Explizierung eines solchen Standpunktes zu einem Inhaltsbereich als Referenzmodell bezeichnet (Chevallard & Bosch, 2014). In diesem Sinne kann ein Referenzmodell auch mit einer mathematischen Hintergrundtheorie für Schulmathematik (Becker, 1978) vergleichbar sein.

Der Aufbau des Referenzmodells im Überblick

Wir bauen in der Entwicklung des Referenzmodells auf Arbeiten von Filler (2011) und Henn und Filler (2015) auf. Im Referenzmodell werden die drei Vektorzugänge, die auch für Schulbücher besonders wichtig sind, nämlich Pfeilklassen, 2- bzw. 3-Tupel und Verschiebungen, zunächst unabhängig voneinander aufgebaut und dann in Beziehung gesetzt. Alle drei Zugänge lassen sich, nachdem ein Vektor definiert wurde, mathematisch um Eigenschaften und Operationen erweitern, sodass sie letztlich mit der Struktur eines Vektorraumes kompatibel werden. Noch wichtiger ist aber die herzuleitende stärkere Aussage, dass die drei aufgebauten Strukturen isomorph bezüglich der Addition, der skalaren Multiplikation und der Abstandsmessung sind. Wenn Vektoren zunächst geometrisch koordinatenfrei als Pfeilklassen eingeführt werden, sind ferner Voraussetzungen aus der zwei- und dreidimensionalen Geometrie herauszuarbeiten, die implizit genutzt werden. Das gleiche ist nötig, wenn abstrakte 2- oder 3-Zahlentupel geometrisch interpretiert werden sollen. Insgesamt beinhaltet das Referenzmodell die Ausarbeitung der drei Zugänge sowie die darauf aufbauende Diskussion ihrer Isomorphie, die zusammen einen wichtigen Beurteilungshintergrund dafür abgeben, wie in Schulbüchern Bezüge zwischen den drei Objekten und ihren Operationen hergestellt werden.

Vektoren als Pfeilklassen

Eine Definition von Vektoren als Pfeilklassen auf der Grundlage einer koordinatenfreien euklidischen Geometrie ist komplex und soll hier in Kürze skizziert werden. Ein Pfeil mit einem Anfangs- und Endpunkt stellt eine gerichtete Strecke dar, kann aber auch formal als geordnetes Paar zweier voneinander verschiedener Punkte, die dem Anfangs- und Endpunkt des Pfeiles entsprechen, definiert werden. Nun kann eine Äquivalenzrelation „parallelgleich" zwischen Pfeilen definiert werden (Filler, 2011, S. 89), die zum Bilden einer Äquivalenzklasse von Pfeilen benutzt wird, welche man als Vektor bezeichnet. Zwei Pfeile heißen parallelgleich, wenn sie parallel zueinander, gleich lang und gleich orientiert sind.

In Schulbüchern, wie z. B. in Krämer et al. (1989), wird diese Relation und ihre Eigenschaften als im Grunde intuitiv klar vorausgesetzt. Im Detail erweist sich das allerdings als komplizierter. Die Parallelität von Pfeilen muss mittels der Parallelität der eindeutig definierten Geraden, auf denen sie liegen, neu definiert werden. Die Länge eines Pfeiles kann als Abstand seines Anfangs- und Endpunktes definiert werden. Für die Relation zwischen zwei gleich langen und parallelen Pfeilen, „gleich orientiert zu sein", gibt es keine so einfache Möglichkeit der Rückführung. Liegen die beiden Pfeile nicht auf derselben Geraden, können sie nun als gleich orientiert bezeichnet werden, wenn die Gerade durch ihre beiden Anfangspunkte parallel zu der Geraden durch ihre beiden Endpunkte ist (vgl. auch Abbildung 1).

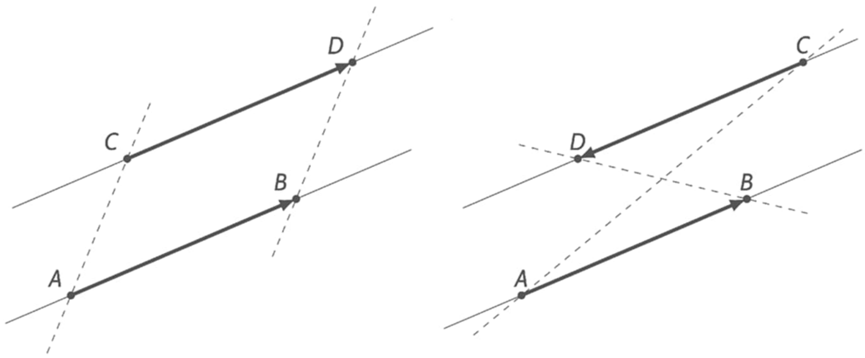

Abb. 1: Zwei gleich orientierte Pfeile (links) und zwei entgegengesetzt orientierte Pfeile (rechts). Abbildung ähnlich zu Filler (2011, S. 88).

Falls zwei nicht identische Pfeile $[A;B]$ und $[C;D]$ auf derselben Geraden liegen, kann bestimmt werden, ob sie gleich orientiert sind, indem geprüft wird, ob die Punkte B und C zwischen den Punkten A und D liegen oder genau andersherum, die Punkte A und D zwischen den Punkten B und C liegen. Im Falle der Identität beider Pfeile gelten sie ebenfalls als gleich orientiert. Entsprechende Fallunterscheidungen sind nötig z. B. beim Nachweis der Transitivität der Relation. Bei den konstruierten Objekten fehlt aber noch der Nullvektor, den man formal als Menge aller „Nullpfeile" $[A;A]$ definieren kann. Beweise unter Einbeziehung des Nullvektors erfordern wieder Fallunterscheidungen. Die formale Erweiterung der Relation „Parallelgleichheit" auch unter Einbeziehung von Nullpfeilen, welche in Filler (2011) fehlt, ist mit weiteren Schwierigkeiten verbunden. Nullvektoren werden im Kontext der Vektoraddition und ihrer Eigenschaften benötigt. Bei der Definition der Addition und skalaren Multiplikation muss die Repräsentantenunabhängigkeit berücksichtigt werden. Begriffe wie Parallelität bzw. Kollinearität und Betrag müssen eigens durch Rückführung auf Pfeileigenschaften definiert werden. Da ein Vektor durch zwei Punkte A, B eindeutig festgelegt ist, ergibt es Sinn, auch vom Vektor $\overrightarrow{AB}$ zu sprechen, dies aber terminologisch vom Pfeil $[A;B]$ zu unterscheiden. Die präzise Definition einer Pfeilklasse basiert also auf einem komplexen Unterbau, der bei den folgenden Beweisführungen später entsprechend zu berücksichtigen ist.

Ausblick auf die Schulbuchanalysen

Im Unterschied zu Krämer et al. (1989), welche das in älteren Ausgaben des Werkes verwendete Pfeilklassenmodell auf den Stand moderner Strukturmathematik bringen, wird das Pfeilklassenmodell in neueren Schulbüchern nicht in purer Form verwendet. Inkohärenzen, problematische Begründungslücken und angelegte Fehlvorstellungen (z. B. Verwechslung von Pfeilen und Vektoren, Problematik von Ortsvektoren, Umgang mit dem Nullvektor) lassen sich aber auf der Basis unseres Referenzmodells besser identifizieren. Teilweise finden sich in Schulbüchern auch „Sedimente" des Pfeilklassenmodells, auch wenn es gar nicht eingeführt wurde, wenn z. B. von Repräsentanten die Rede ist. Ein anderes Sediment ist die Verwendung von koordiantenfreien Vektorzügen, auch wenn Vektoren von vorneherein mit Koordinaten eingeführt wurden. Diese Beispiele werden manchmal ergänzt durch eine Sprache, die auf Vektoren als frei bewegliche Pfeile rekurriert, die überall „angelegt" werden können, ohne dass dieses Konzept vorher eingeführt worden wäre. Die festgestellte isometrische Isomorphie zwischen den drei Vektormodellen schärft den Blick dafür, wie in Schulbüchern die Relationen zischen Tupeln, Pfeilen, Punkten und Verschiebungen eingeführt und begründet werden.

Literatur

Becker, G. (1978). Über Hintergrundtheorien geometrischer Schulkurse. *Mathematica Didactica*, *1*(1), 13–20.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 170–174). Springer Netherlands.

Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra: Linearisieren und Koordinatisieren*. Spektrum, Akademischer Verlag.

Henn, H.-W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer-Verlag.

Krämer, H., Höwelmann, R. & Klemisch, I. (1989). *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*. Verlag Moritz Diesterweg.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1982). *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Friedr. Vieweg & Sohn.

Vohns, A. (2011). Vektoren sind wie Zahlen - nur ganz anders. Eine didaktisch orientierte Sachanalyse zum Vektor(- und Matrizen)begriff in der Oberstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 863–866). WTM.