

SEKUNDARSTUFE I/II
 ■ 9.–13. Schuljahr

Holen Frauen auf?

Prognosen zu Weltrekorden im Sport

Der „Spiegel“ hat 1992 gemeldet, dass die schnellste Frau im Jahr 1998 den Marathon in derselben Zeit läuft wie der schnellste Mann. Wie kommt diese Prognose zustande? Zeigt dies, dass man in der Statistik jede beliebige Aussage bekommen kann, wenn man die Daten nur ins entsprechende Licht rückt?

Rolf Biehler

geb. 1953, Studium der Fächer Mathematik und Physik 1971–1977, Privatdozent am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld
 E-Mail: rolf.biehler@uni-bielefeld.de

Stefan Schweynoch

geb. 1972, Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Universität Bielefeld 1991–1996, wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld
 E-Mail: stefan.schweynoch@uni-bielefeld.de

Zeitungsmeldungen sind ein guter Aufhänger für den Mathematikunterricht. Man erhält hierdurch eine stärkere Nähe zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sowie einen größeren Aktualitätsbezug.

Wilfried Hergert und Dietmar Scholz haben 1998 eine große Sammlung von Aufgaben zu Zeitungsmeldungen veröffentlicht. Unter dem Titel „Chance and Data in the News“ hat Jane Watson zusammen mit Jonathan Moritz und Sue Anderson zahlreiche Zeitungsmeldungen zur Statistik und zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zusammengestellt und im Internet veröffentlicht (<http://www.ni.com.au/mercury/mathguys/mercindx.htm>).

Die Statistik bietet gute Möglichkeiten, den Mathematikunterricht mit Zeitungsmeldungen zu verknüpfen. Dieses Vorhaben wird besonders dadurch interessant, dass in der Öffentlichkeit die Meinung weit verbreitet ist, dass man mit Statistiken alles zeigen kann, was man zeigen möchte, wenn man sich die Zahlen nur richtig zurechtlegt.

Ein Ziel des Statistikerunterrichts sollte es sein, die Schülerinnen und Schüler dafür zu sensibilisieren, ob in einer Zeitungsmeldung statistische

Daten seriös verarbeitet wurden. Wichtig ist aber nicht nur, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, unseriöse Ergebnisse zu identifizieren, sondern dass sie auch in der Lage sind, bessere Analysen zu der gegebenen Fragestellung durchzuführen. So wird deutlich, dass man mit Hilfe von Statistik nicht jedes beliebige Ergebnis zeigen kann. Es ist deshalb besonders günstig, wenn man sich eigene Daten besorgen kann, um eine Analyse durchzuführen, sonst muss man bei allgemeinen kritischen Fragen stehen bleiben. Dies haben wir für eine spektakuläre Meldung des „Spiegel“ gemacht.

Weltrekordentwicklung im Marathon

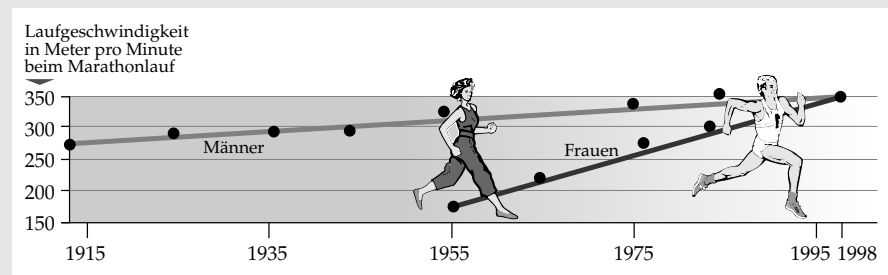
Einen wunderbaren Artikel zum Vergleich von Zeitreihen findet man im Spiegel 3/92 unter dem Titel „Rekorde auf der Aschenbahn: Frauen holen auf“, der auch bei Noll und Schmidt (1994, S. 59–61) aufgegriffen wird.

Es wurde damals die Prognose aufgestellt, dass Frauen im Jahre 1998 die Marathondistanz genauso

Rekorde auf der Aschenbahn: Frauen holen auf

Keine der derzeitigen Weltrekordhalterinnen in den Laufdisziplinen könnte bei den Olympischen Spielen im Sommer bei der männlichen Konkurrenz mitmachen: Die Frauen würden die Qualifikationsnormen nicht erreichen. Das wird sich, so jedenfalls spekulieren die amerikanischen Physiologen Brian J. Whipp und seine Kollegin Susan A. Ward von der University of California, im Laufe der kommenden Jahrzehnte ändern. Schon 1998 wird nach Ansicht der Wissenschaftler eine Frau in der Lage sein, die Marathonstrecke von 42,195 Kilometer ebenso schnell zu laufen wie der dann schnellste Mann ... in zwei Stunden und zwei Minuten. Die Gleichheit der Geschlechter auf der 200-

Meter-Strecke soll, bei einer Zeit von 18,6 Sekunden, spätestens im Jahre 2050 erreicht sein. Zu dieser kühnen Hochrechnung gelangten die Physiologen bei einem Vergleich der Durchschnittsgeschwindigkeiten, die auf den verschiedenen Laufstrecken gemessen wurden. Dabei ergab sich über die Jahrzehnte ein gleichmäßiger Tempozuwachs – mit nur einem Unterschied: Bei den Frauen stieg die Beschleunigungskurve doppelt so schnell. So steigerten die männlichen Weltrekordler ihre Durchschnittsleistung seit 1908 von 241 Meter je Minute auf 332 Meter. Die Frauen hingegen schafften allein seit 1963 etwa 105 Meter mehr – ihre Minutenleistung stieg von 194 auf 299 Meter.



Spiegel 3/1992

Jahr	Männer (min)	Geschwindigkeit (m/min)	Jahr	Frauen (min)	Geschwindigkeit (m/min)
1908	175,31	240,69	1963	217,12	194,34
1909	160,57	262,78	1964	199,55	211,45
1913	156,11	270,29	1967	195,37	225,12
1920	152,6	240,69	1970	182,88	230,73
1925	149,03	283,13	1974	163,9	257,44
1935	146,7	287,63	1975	158,32	266,52
1947	145,65	289,70	1977	154,8	272,58
1952	140,7	299,89	1978	152,5	276,69
1953	138,58	304,48	1979	147,55	285,97
1954	137,66	306,52	1980	145,68	289,64
1958	135,28	311,91	1981	145,48	290,04
1960	135,27	311,93	1983	142,72	295,65
1963	134,47	313,79	1985	141,1	299,04
1964	132,19	319,20	(1998)	140,8	(299,71)
1965	132	319,66			
1967	129,61	325,55			
1969	128,56	328,21			
1984	128,08	329,44			
1985	127,2	331,72			
1988	126,93	332,43			
(1998)	(126,04)	(324,66)			

Tab. 1: Entwicklung der Weltrekorde im Marathon

schnell zurücklegen können wie die Männer. Auf der 200-m-Strecke erwartete man, dass im Jahre 2050 Frauen und Männer das Ziel gleichzeitig erreichen.

Es stellt sich natürlich die Frage, wie diese Hypothese entstanden ist und wieso die Folgerungen der Autoren falsch waren, denn bis zum heutigen Zeitpunkt, also nach 1998, sind

die Männer im Marathon immer noch deutlich schneller als die Frauen.

Als Grundlage für die folgenden Untersuchungen haben wir uns die vollständigen Weltrekordzeiten der Männer und Frauen über die Marathondistanz (Tab. 1) besorgt. Man findet die Daten bis 1990 in der Chronik des Sports (1990), aktuellere Daten gibt es im Internet, zum Beispiel findet man unter <http://www.algonet.se/~pela2/> ewige Bestenlisten oder bei http://www.geocities.com/Colosseum/Arena/3170/index_s.html Weltrekorde vieler Disziplinen. Wir untersuchen die Zeiten erst ab 1908, da vorher die Marathonstrecke etwas kürzer war. Wenn in einem Jahr die Zeit mehrmals verbessert wurde, haben wir nur die beste Zeit in der Tabelle aufgenommen.

Die Entwicklung bei den Männern und bei den Frauen ist anhand der Tabelle nur schwer miteinander zu vergleichen, da die Weltrekorde natürlich nicht unbedingt zur selben Zeit von den Frauen und den Männern verbessert wurden. Um einen besseren Überblick zu erhalten, zeichnet man ein Streudiagramm (Abb. 1).

Betrachtet man die Grafik, so muss man den Autoren des Spiegel-Artikels auf jeden Fall in einem Punkt Recht geben: Die Frauen konnten die Durchschnittsgeschwindigkeit in den letzten 30 Jahren erheblich verbessern, die Steigerung bei den Männern verlief viel langsamer. Von den Autoren blieb allerdings unberücksichtigt, dass die Frauen auf einem viel niedrigeren Niveau begonnen haben. Die Aussage, dass sich „über Jahrzehnte ein

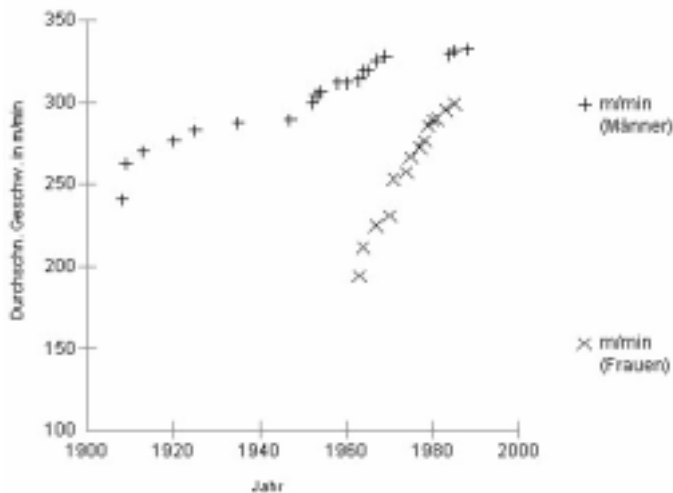


Abb. 1: Weltrekorde im Marathon 1908–1992

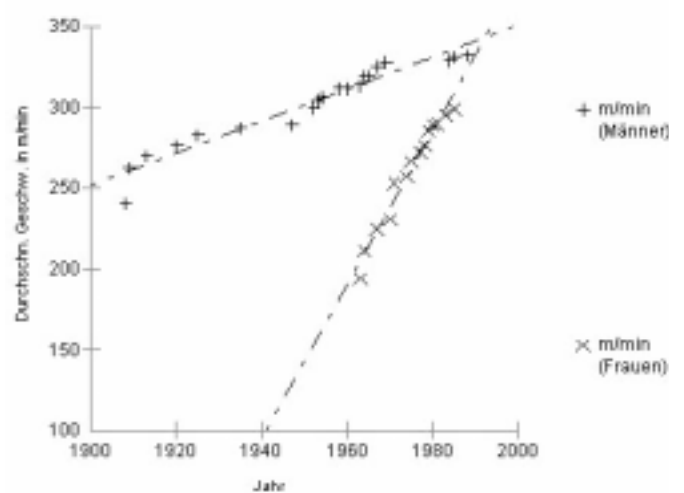


Abb. 2: KQ-Ausgleichsgeraden für die Weltrekorde im Marathon 1908–1992

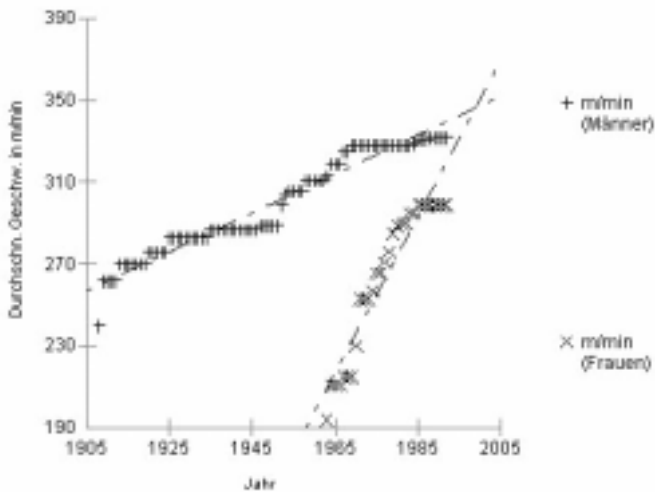


Abb. 3: Weltrekorde im Marathon – jährlich

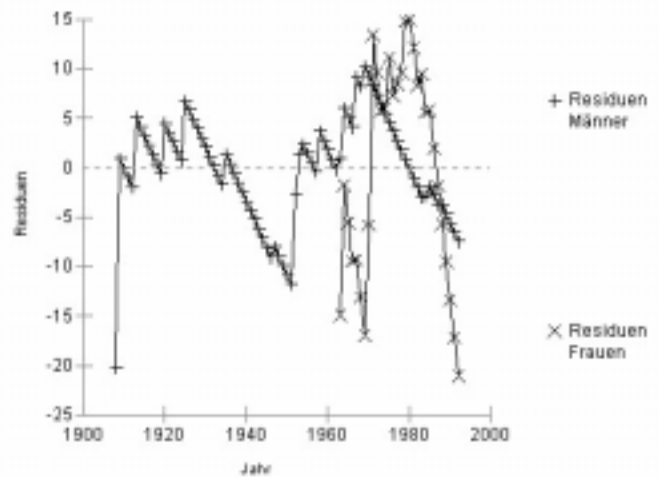


Abb. 4: Residuen Männer und Frauen

gleichmäßiger Tempozuwachs“ ergab, ist auf jeden Fall bei den Männern nicht zu bestätigen. In dieser Kurve lassen sich eher Phasen entdecken, wo der Weltrekord stark verbessert wurde (zum Beispiel Mitte der 50er und Mitte der 60er Jahre), aber auch Phasen, in denen er fast konstant blieb (zum Beispiel 1925 bis 1935). Passt man dennoch je eine kQ-Ausgleichsgerade (Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate) an, so ergibt sich **Abbildung 2**. Wenn man diese Gerade für die wesentliche Zusammenfassung hält, so kann man in der Tat, wie es im Spiegel-Artikel der Fall ist, von „gleichmäßigem Tempozuwachs“ bei Männern und Frauen sprechen.

Man sollte mit den Schülerinnen und Schülern diskutieren, dass mit eingezeichneten Geraden die Wahrnehmung leicht überformt werden kann. Der sensibilisierte Betrachter sieht in **Abbildung 2** bereits die systematischen Abweichungen von der Linearität. Es empfiehlt sich, immer erst auch die Daten ohne Kurve (**Abb. 1**) anzusehen. Auch **Abbildung 1** hat ihre Tücken. Auf den ersten Blick erscheint es so, dass die Frauen einen gleichmäßigeren (eher linear zu beschreibenden) Anstieg haben als die Männer. Das aber ist zum Teil ein Artefakt der gewählten Skalierung. Würde man die Frauen in einem eigenen Diagramm darstellen, so sähe man auch hier deutlich nicht-lineare Strukturen.

Die Funktionsgleichungen $f_F(x) = 4,7429 \cdot x - 9105,5$ für die Frauen bzw. $f_M(x) = 0,9927 \cdot x - 1634,4$ für die Männer in **Abbildung 2** liefern nur ein sehr grob vereinfachtes Modell. Sie zeigen aber schon überaus deutlich, dass die durchschnittliche jährliche Geschwindigkeitssteigerung der

Frauen etwa 4,8-mal so groß ist wie bei den Männern.

Wir wollen jetzt versuchen, die Magazinmeldung mathematisch zu rekonstruieren. Verwendet man die Geraden als Trendextrapolation, so würden sich die Kurven der Männer und Frauen bei $x = 1992,2$ schneiden – die Frauen und Männer könnten im Jahre 1992 beide die Marathonstrecke in 2 h 3 min zurücklegen.

Auf diese Weise sind die Autoren nicht vorgegangen, da sie einen anderen Schnittpunkt (in 1998) angeben.

Wie könnten die Autoren aber dann zu ihrem Ergebnis gekommen sein? Wir haben verschiedene Möglichkeiten durchprobiert, bis wir auf das Folgende kamen. Als Daten haben wir den jeweils in jedem Jahr gültigen Weltrekord genommen, so dass wir jetzt lückenlos für jedes Jahr einen Datenwert haben.

Wir passen daran kQ-Geraden an (**Abb. 3**) und erhalten als Funktionsgleichungen $f_F(x) = 3,8303 \cdot x - 7309,9$ bzw. $f_M(x) = 0,9437 \cdot x - 1540,5$. (Tipp: Die Koeffizienten sollte man übrigens mit vielen signifikanten Stellen aus der Software entnehmen. Bei der Berechnung des Schnittpunkts und der Residuen (vertikaler Abstand der Daten von der Ausgleichsgeraden) kann man sonst extrem große Rundungsfehler erhalten!) Auf der Basis dieser Gleichungen ergibt sich die Prognose, dass Männer und Frauen im Jahre 1998 (genauer $x = 1998,68$) gleich schnell wären und für 42195 m eine Zeit von 2 h 2 min benötigen würden. Dieses sind exakt die Werte, die vom Spiegel vorausgesagt wurden.

Schülerinnen und Schüler können leicht erkennen, dass die oben gewählte Methode nicht sehr sinnvoll ist. Als erstes fällt auf, dass sowohl die Kurve der Männer als auch die

der Frauen in den letzten Jahren stark abflacht, dass also mit einem so starken Ansteigen, wie durch die Regressionsgeraden vorausgesagt wird, kaum zu rechnen ist.

Im Residuendiagramm (**Abb. 4**) ist noch deutlicher zu erkennen, dass das gewählte Modell nicht passend ist. Im Residuendiagramm werden die Abweichungen der Daten von der angepassten Kurve dargestellt, das heißt in das Streudiagramm werden Wertepaare (x_i, r_i) gezeichnet. Die Residuen r_i werden durch die Differenz Originalwert–Ausgleichswert berechnet. (Detailliert ist die Residuenanalyse im Artikel von Biehler und Schweynoch 1999 dargestellt).

Im Residuendiagramm (**Abb. 4**) ergibt sich eine interessante Struktur. Wir haben die Punkte durch Linien verbunden, um so bestimmte Strukturen sichtbar zu machen (Wechseln zwischen Streu- und Liniendiagramm lohnt sich häufig!).

Wodurch erklärt sich die Sägezahnstruktur? Die linearen Teilstücke sind aus den konstanten Teilstücken der Daten entstanden (die Weltrekorde wurden von Jahr zu Jahr kopiert, falls sie nicht verbessert wurden). Subtrahiert man von einer konstanten Funktion eine Gerade, so entsteht wieder eine Gerade mit der ins Negative verkehrten Steigung. Die linearen Stücke bei den Männern haben alle dieselbe Steigung, die der Frauen auch – die Steigung bei Männern und Frauen ist jedoch verschieden, da die Ausgleichsgeraden verschiedene Steigungen haben.

Sieht man von dieser Struktur ab, so bleibt für die Männer als Struktur ein schräggestelltes „M“ (2 Spitzen), für die Frauen im Wesentlichen nur eine Spitze. Dies sind systematische

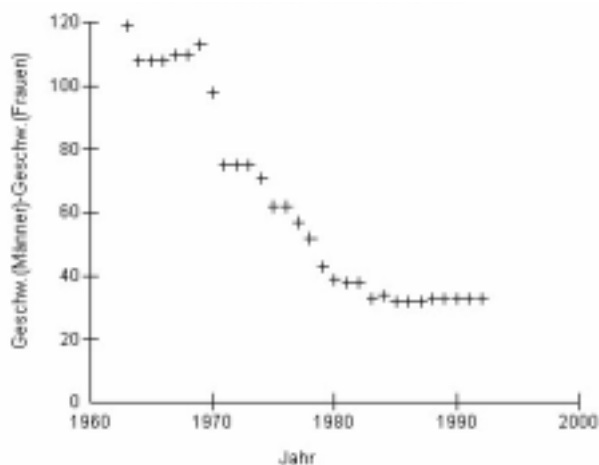


Abb. 5: Differenz zwischen Frauen und Männern

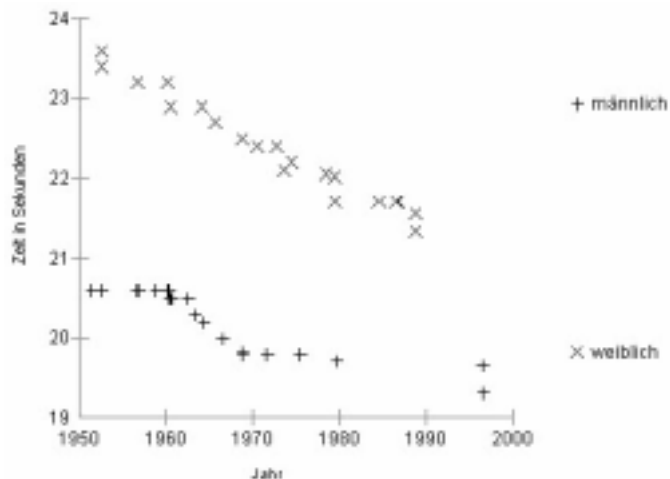


Abb. 6: Weltrekorde 200-m-Lauf

Abweichungen von dem linearen Modell, die man – jetzt sensibilisiert – auch sehr deutlich in Abbildung 3 wiedererkennen kann. Spätestens bei der Residuenanalyse sieht man, wie unangemessen das lineare Modell ist. Wir hoffen für die Zukunft auf einen besseren Statistikerunterricht, von dem auch zukünftige Journalisten profitieren!

Dass eine Beschreibung durch lineare Funktionen nicht gut ist, wird an dieser Stelle jeder Schülerin und jedem Schüler deutlich geworden sein. Es bleibt aber die Frage, ob die Frauen wirklich irgendwann schneller sind als die Männer bzw. ob diese Frage mit Hilfe der Daten überhaupt zu beantworten ist. Da wir uns für die Veränderung des Unterschieds zwischen den Zeiten der Männer und den Zeiten der Frauen interessieren, erscheint es sinnvoll, diese zu berechnen und grafisch darzustellen. **Abbildung 5** zeigt die Differenz zwischen den gültigen Weltrekorden der Frauen und der Männer in jedem Jahr von 1963 bis 1992.

Diese Grafik zeigt sehr deutlich, dass die Differenz bis ca. 1980 stark abgenommen hat, die Abnahme sich danach aber verlangsamte und der Unterschied seit 1988 (bis 1992) konstant geblieben ist. Zu beachten ist, dass die Männer den Weltrekord von 1988, die Frauen von 1985 bis zum Erscheinen des Artikels im Spiegel nicht mehr verbessern konnten. Im Jahre 1998 hat sich schließlich die Differenz wieder etwas vergrößert, wie man anhand der **Tabelle 1** leicht errechnen kann. Hieraus zu schließen, dass der Abstand ungefähr konstant bleibt, wäre sehr mutig, allerdings liegt die Vermutung nahe, dass in den nächsten Jahren mit keiner sehr großen Annäherung zwi-

schen Männern und Frauen zu rechnen ist. Die Daten können somit die Frage, ob Frauen irgendwann einmal genauso schnell sind wie Männer, nicht sicher beantworten. Sie sprechen aber eher dagegen – ebenso wie natürlich anatomische Unterschiede zwischen den Geschlechtern. Dass man mit solchen Aussagen allerdings vorsichtig sein muss, zeigen auch unsere Daten. Vermutlich hätte kaum jemand vor 50 Jahren die Aufholjagd der Frauen für möglich gehalten.

Analog zu den Überlegungen beim Marathonlauf können die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass die Prognose für den 200-m-Lauf wahrscheinlich auch falsch ist. Die Untersuchung der 200-m-Weltrekorde (**Abb. 6**) ist besonders lohnenswert, da die Zeiten der Männer nach dem Zweiten Weltkrieg ein Musterbeispiel für einen S-förmigen Verlauf sind (eigentlich ein gespiegeltes S).

Fuchs und Lames (1989) gingen bei ihrer Untersuchung der 20 Jahresbestzeiten von einem S-förmigen funktionalen Modell aus und haben dies auch sportwissenschaftlich begründet. Die von ihnen gewählten Mittel der 20 Jahresbestzeiten haben gegenüber den Weltrekorden oder Olympiadaten den Vorteil, dass es sich nicht um singuläre Ereignisse handelt, die stark von äußeren Einflüssen beeinträchtigt werden.

Zu beachten ist bei den Männern, dass die Weltrekordzeiten von 1968 bis 1996 kaum noch gesteigert wurden. Die extrem sprunghafte Steigerung im Jahre 1996 erscheint einem Datendetektiv sehr verdächtig. Falls Sie mögliche Erklärungen haben, teilen Sie uns diese bitte mit!

Literatur

Biehler, R./Schweynoch, S.: Trends und Abweichungen von Trends. – In: *mathematik lehren* 97 (1999), S. 17–22.
 Fuchs, P./Lames, M.: *Mathematische Modellierung der Leistungsentwicklung und Leistungsprognosen in der Leichtathletik.* – In: *Sportwissenschaft* 19 (1989) 4, S. 420–435.
 Herget, W./Scholz, D.: *Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung.* – Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998.
 Noll, G./Schmidt, G.: *Trends und statistische Zusammenhänge. Materialien zur Explorativen Datenanalyse und Statistik in der Schule.* – Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest 1994.
 Ummiger, W.: *Chronik des Sports.* – Chronik Verlag, Dortmund 1990.