

Eine einfache Formel für den Flächeninhalt von Polygonen

Peter Bender

Seit einigen Jahren hat in der Mathematikdidaktik die sogenannte empirische Unterrichtsforschung mit quantitativen und qualitativen Methoden Konjunktur, während stoffdidaktische Arbeiten fast schon verpönt sind. Es bleibt abzuwarten, wie sich der Trend in der deutschsprachigen Kommunität fortsetzt. Ich hoffe (und bin zuversichtlich), dass LUTZ FÜHRER Gefallen findet an der vorliegenden didaktisch orientierten Sachanalyse der Gaußschen Dreiecksformel für den Flächeninhalt von einfachen Polygonen.

1. Motivation

Auf einer seiner zahlreichen Reisen in die Ägäis hat der Münsteraner Mathematiker WINFRIED SCHARLAU von einem griechischen Landvermesser folgende, von diesem rein mechanisch, aber durchaus erfolgreich benutzte Formel für den Flächeninhalt eines Polygons mit den Eckpunkten $A_1=(x_1;y_1)$, $A_2=(x_2;y_2)$, ..., $A_n=(x_n;y_n)$ kennen gelernt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (1)$$

(wobei noch $A_0=(x_0;y_0) \equiv A_n$ und $A_{n+1}=(x_{n+1};y_{n+1}) \equiv A_1$ gesetzt ist). Diese Begebenheit hat er in seinem Roman *I megalli istoria – die große Geschichte* (1999, 324-336) beschrieben. Wegen ihrer bestechenden Einfachheit war ich sofort von dieser Formel fasziniert. Vor allem aber beschäftigte sie mich, weil sie meines Wissens kein Gegenstand unserer Schulmathematik und der in der mathematikdidaktischen Kommunität geläufigen Elementargeometrie ist und mir persönlich unbekannt war. Bis dahin hatte ich den Flächeninhalt eines Polygons immer als Summe der Flächeninhalte von Zerlegungs-dreiecken dargestellt, dabei regelmäßig das Polygon hinzeichnen müssen, um eine passende Triangulierung zu ermitteln, und dann aufwändig für jedes Dreieck eine Seitenlänge und die entsprechende Höhe berechnen müssen.

Einen Grund für die Abwesenheit dieser Formel in unserer Schulgeometrie vermute ich darin, dass Koordinaten nicht so recht zu einem bei uns typischen Lehrgang in Elementargeometrie passen, sei er kongruenz-, sei er abbildungsgeometrischer Natur.

Es liegt auf der Hand, sie durch vollständige Induktion zu beweisen, und der Beweis, insbesondere der Schluss von n auf $n+1$, ist – arithmetisch betrachtet – nicht schwer. Nach einiger Zeit fand ich den Satz dann auch – mit einem

Induktionsbeweis – in ERICH WITTMANN'S *Elementargeometrie und Wirklichkeit* (1987, 435 ff.). Doch mir fehlte noch eine anschauliche Deutung der Terme und ihres Zusammenspiels, mit der man die Formel „wirklich“ durchschauen kann. Außerdem wollte ich prüfen, welches begriffliche Niveau dabei erforderlich ist, und so die Eignung dieser Formel für die allgemeinbildende Schule und gegebenenfalls ihren curricularen Ort dort feststellen.

Durch eine kurze Internetrecherche stellte ich fest, dass (1) in der Geodäsie als *Gaußsche Dreiecksformel* Folklore ist. Dort fand ich auch deren Gegenüberstellung mit der sogenannten *Gaußschen Trapezformel*:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1}). \quad (2)$$

In dieser erkennt man direkt einen Zusammenhang mit Trapezen. Lässt man auch negative Flächeninhalte zu, ist (2) anschaulich klar, und zusammen mit einer einfachen arithmetischen Umformung kann man diese anschauliche Klarheit unmittelbar auf (1) übertragen, wie ich weiter unten bei der Sachanalyse zeigen werde. Ebenfalls klar ist die prinzipielle Gleichberechtigung der beiden Koordinaten. Der Flächeninhalt beträgt nach der *Gaußschen Dreiecksformel* auch

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (3)$$

Allerdings fällt beim Vergleich der Terme (3) und (1) auf, dass die Differenzen umgekehrt gebildet sind: hier $y_{i+1} - y_{i-1}$, dort $x_i - x_{i+1}$. In der Tat spielt bei diesem Thema die Orientierung von Strecken bzw. Streckenzügen (anschaulich: eine der beiden Richtungen beim Durchlaufen) und von einfachen Polygonen bzw. Polygonflächen (anschaulich: eine der beiden Richtungen beim Durchlaufen ihres Randes) eine wesentliche Rolle. Je nach Orientierung sind Streckenlänge und Flächeninhalt positiv oder negativ, bei jeweils gleichem Betrag.

Hier tut sich möglicherweise ein weiterer Grund für die Nichtbehandlung dieses Themas im allgemeinbildenden Geometrieunterricht auf. Der Begriff des negativen Flächeninhalts ist mental besonders sperrig. In der Oberstufe kommt man zwar nicht um ihn herum, aber dort wird er durch die noch tiefer gehenden Probleme der Infinitesimalrechnung untergepflegt. Man braucht ihn nur als Rechengröße zwecks Stimmigkeit der Integralrechnung und verbindet keine geometrischen Vorstellungen mit ihm, außer dass die negativen Flächen unterhalb und die positiven oberhalb der x-Achse liegen – jedenfalls wenn man von links nach rechts integriert. Da steckt dann sogar doch ein bisschen Geometrie drin, wenn man sich die Flächen wie bei der Bildung des Riemann-Darboux-Integrals angenähert zusammengesetzt denkt aus lauter Trapezen mit positiven „Breiten“ auf der x-Achse und positiven bzw. negativen „Höhen“ parallel zur y-Achse.

2. Grundsätzliches zur Didaktik

Wieder einmal hatte ich, diesmal durch Beobachtung meiner eigenen Lernprozesse, feststellen müssen, wie unabdingbar weitgehende Anregungen bzw. Vorgaben zur Initiierung zielgerichteter mathematischer Lernprozesse sind – und das bei meinen günstigen Voraussetzungen an Motivation, Zeit, Erfahrung, Strategienverfügbarkeit, Wissen usw. Es bleibt mir ein Rätsel – und ist mir noch nie durch langfristige stabile Lernerfolge belegt untergekommen –, wie „gewöhnliche“ Lernende ohne massive Intervention durch Lehrende (sowohl direkt persönlich, als auch indirekt durch Bücher, Internet o.ä.) ein solches Gebiet wie die Gaußschen Flächenformeln oder gar die Integralrechnung in sogenannten konstruktivistischen Lernumgebungen sich selbstständig erarbeiten können sollen.

Die Formel ist nützlich. Um den Flächeninhalt eines (durchaus realen) Polygons zu bestimmen, braucht man nur ein kartesisches Koordinatensystem darüber zu legen (eventuell noch in günstiger Ausrichtung; in der praktischen Geodäsie sind die Koordinaten allerdings i.A. vorgegeben) und dann nach der Formel zu rechnen, ganz wie es der griechische Landvermesser in SCHARLAUS Erzählung getan hat. Die Rechnung kann man sich noch von Excel abnehmen lassen: In die beiden ersten Spalten die Koordinaten der Eckpunkte A_0 bis A_{n+1} , in die dritte Spalte von der zweiten bis zur vorletzten Zeile die Terme $y_1 \cdot (x_0 - x_2)$ bis $y_n \cdot (x_{n-1} - x_{n+1})$, und direkt darunter die halbierte Summe aller Einträge der dritten Spalte.

Die Formel ist schön einfach und einfach schön. Ob „gewöhnliche“ Lernende sich auf die Ästhetik eines mathematischen Terms einlassen, sei dahingestellt. Aber die Einfachheit könnte eine überzeugende Wirkung entfalten, jedenfalls bei einem Mindestmaß an mathematischer Kultur im Unterricht, besonders wenn man dagegen das Verfahren stellt, das Polygon in Dreiecke zu zerlegen und deren Flächeninhalt à la synthetischer Geometrie auszurechnen. Die Dreiecksformel (1) ist ersichtlich noch etwas sparsamer als die Trapezformel (2), bei Verwendung von Excel spielt dies aber keine Rolle.

Siedelt man den Inhalt im 10. oder 11. Schuljahr an, so liegen bei den Schülern Erfahrungen vor zu negativen Zahlen, negativen Winkelmaßen, negativen Funktionswerten, negativem Drehsinn, natürlich zu Flächeninhalten von Polygonen, speziell von Trapezen, sowie hoffentlich eine gewisse Geläufigkeit in der Arithmetik, möglichst in Verbindung mit der geometrischen Veranschaulichung arithmetischer Sachverhalte und umgekehrt. Die Begrifflichkeit dieser negativen „Größen“ kann bei der Explorierung der Formel wiederum intensiv gefördert und nun auf negativen Umlaufsinn und negative Flächeninhalte ausgedehnt werden. Der besondere Vorzug hierbei liegt darin, dass negative Flächeninhalte losgelöst vom infinitesimalen Denken behandelt werden können und dass die Förderung der arithmetischen Souveränität vor der Linearen Algebra mit ihrem dezidiert formalen Stil und höherdimensionalen Kalkül erfolgt. Im neunjährigen Gymnasium hätte besonders dem 11. Schuljahr eine solche Bereicherung durchaus gut getan. Nach dem Zusammen-

pressen der gymnasialen Schulzeit fast überall auf acht Schuljahre fehlt es allerdings noch mehr an einer für das Lernen eigentlich unverzichtbaren Muße, und für einen zusätzlichen Inhalt wie die Gaußschen Formeln ist wohl kein Raum.

3. Didaktisch orientierte Sachanalyse

Ich beginne die Sachanalyse mit einem „Paradebeispiel“ zur Herleitung der Trapezformel, bevor ich auf den Zusammenhang von Trapez- und Dreiecksformel näher eingehe. Es folgen die Klärung einiger Feinheiten der bis dahin verwendeten Begriffe und Vorschläge zur Erarbeitung des Themas. Danach werde ich das Paradebeispiel verallgemeinern und mit einer Darstellung des Verhaltens der Flächenformeln unter geometrischen Abbildungen schließen.

3.1 Paradebeispiel

Wir betrachten ein Polygon $\mathbf{P} = A_1A_2\dots A_nA_1$ (wir verwenden den Begriff *Polygon* sowohl für den Streckenzug als auch für die Fläche, benutzen aber auch manchmal die Wörter *Rand* und *Fläche*) mit folgenden Eigenschaften:

- Es befindet sich komplett in der oberen Halbebene mit der Ecke A_1 ganz links und einer Ecke A_m ganz rechts.
- Sein Rand ist die Summe der beiden orientierten Streckenzüge $A_1A_2\dots A_{m-1}A_m$ und $A_mA_{m+1}\dots A_nA_1$, die komplett innerhalb des lotrechten Streifens zwischen A_1 und A_m liegen, und zwar (außer in A_1 und A_m) $A_mA_{m+1}\dots A_nA_1$ vollständig oberhalb von $A_1A_2\dots A_{m-1}A_m$.
- $A_1A_2\dots A_{m-1}A_m$ verläuft durchweg von links nach rechts, $A_mA_{m+1}\dots A_nA_1$ durchweg von rechts nach links, d.h. für die x -Koordinaten gilt $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq x_m$ und $x_1 \leq x_n \leq \dots \leq x_{m+1} \leq x_m$.

(Das Polygon muss nicht konvex sein.)

Wir brauchen noch die Projektionen $X_i = (x_i; 0)$ der Punkte A_i . Damit ist das Polygon \mathbf{P} die Differenz“ der beiden auf der x -Achse „stehenden“ (weswegen man die x -Achse auch als *Standlinie* bezeichnet) *verallgemeinerten* Trapeze:

$$\mathbf{S}_1 \equiv X_1X_mA_mA_{m+1}\dots A_nA_1X_1 \text{ und } \mathbf{S}_0 \equiv X_1X_mA_mA_{m-1}\dots A_2A_1X_1.$$

Diese wiederum sind jeweils Summen von auf der x -Achse „stehenden“ Trapezsäulen: \mathbf{S}_1 ergibt sich aus $\mathbf{S}_{n1} \equiv X_1X_nA_nA_1X_1$, $\mathbf{S}_{n-1,n} \equiv X_nX_{n-1}A_{n-1}A_nX_n$, \dots , $\mathbf{S}_{m,m+1} \equiv X_{m+1}X_mA_mA_{m+1}X_{m+1}$; \mathbf{S}_0 ergibt sich entsprechend aus $\mathbf{S}_{21} \equiv X_1X_2A_2A_1X_1$, $\mathbf{S}_{32} \equiv X_2X_3A_3A_2X_2$, \dots , $\mathbf{S}_{m,m-1} \equiv X_{m-1}X_mA_mA_{m-1}X_{m-1}$.

(Wir bezeichnen auch dann noch Trapeze als *Trapeze*, wenn sie zu *Dreiecken* entartet sind; siehe z. B. in Abb. 1 die beiden Dreiecke \mathbf{S}_{21} und \mathbf{S}_{32} .)

Unschön, aber unvermeidlich ist hierbei ein kleiner Konflikt zwischen der Zählung der Ecken um das Polygon \mathbf{P} herum und dem üblichen Arbeiten von links nach rechts: Bei den Ecken ab A_m läuft man ja von rechts nach links, und bei den

zugehörigen Trapezsäulen befinden sich die Ecken mit den kleineren Nummern rechts, und dies, obwohl genau sie zum positiven Flächeninhalt beitragen.

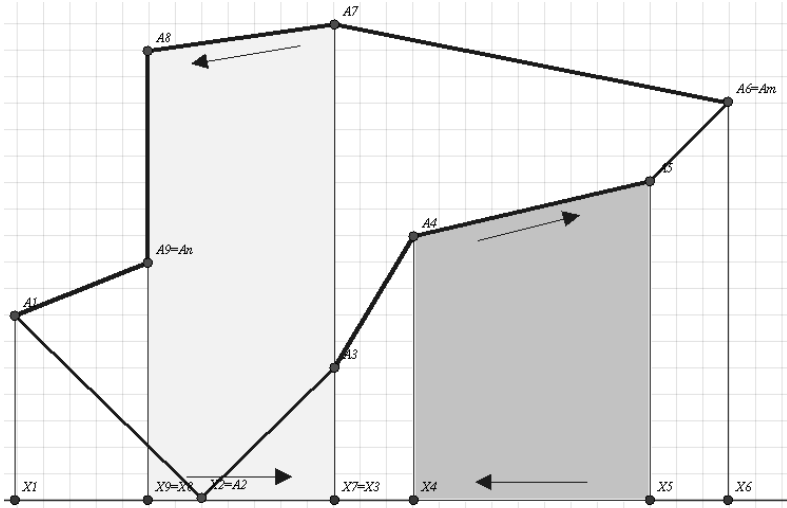


Abb. 1: Das Polygon P und die Trapezsäule S_{78} haben positiven, S_{54} hat negativen Flächeninhalt.

Mit den Bezeichnungen des ersten Abschnitts ergibt sich schließlich als Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 F(P) &= F(S_1) - F(S_0) = \sum_{i=m}^n F(S_{i,i+1}) - \sum_{i=1}^{m-1} F(S_{i+1,i}) \\
 &= \sum_{i=m}^n \frac{1}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} \cdot (y_{i+1} + y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=m}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{m-1} (y_{i+1} + y_i) \cdot (x_i - x_{i+1}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Dabei ist die Umschreibung der zweiten Summe (die von 1 bis $m-1$) zunächst rein arithmetisch vorgenommen worden. Dies könnte man auch so interpretieren: Statt positive Flächeninhalte zu subtrahieren, addiert man negative Flächeninhalte. Sie sind (im Term) deswegen negativ, weil die Grundseiten negativ genommen werden und dadurch der Umlaufsinn der Trapezsäulen ins Negative (*mit dem Uhrzeigersinn*) verkehrt wird. Dies passt dazu, dass der Weg $A_1A_2 \dots A_m A_{m+1} \dots A_n A_1$ bei den Trapezen mit den Nummern 1 bis $m-1$ einen Umlauf *mit dem Uhrzeigersinn* und bei den mit den Nummern m bis n *gegen den Uhrzeigersinn* induziert.

3.2 Zusammenhang von Gaußscher Trapez- und Gaußscher Dreiecksformel

Der Streckenzug $A_{k-1}A_kA_{k+1}A_{k+2}$ (als Teil eines Polygons) verlaufe in der oberen Halbebene von links nach rechts, es sei also $x_{k-1} \leq x_k \leq x_{k+1} \leq x_{k+2}$ (Abb. 2). Der Flächeninhalt der mittleren der drei Trapezsäulen beträgt dann $\frac{1}{2} \cdot (y_k + y_{k+1}) \cdot (x_k - x_{k+1})$, und dies ist ein Summand aus der Trapezformel (2).

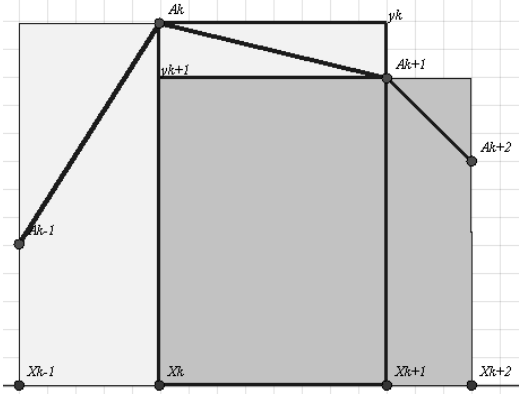


Abb. 2: Zusammenhang zwischen Dreiecksformel (1) und Trapezformel (2)

Die beiden hier auftretenden Rechtecke mit der gemeinsamen Grundseite $x_k x_{k+1}$ und den beiden Höhen y_k bzw. y_{k+1} ergeben – multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ – gerade die mittlere Trapezsäule mit Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot (y_k + y_{k+1}) \cdot (x_k - x_{k+1})$. Setzt man die Eckpunkte mit A_{k-2}, \dots bzw. mit A_{k+3}, \dots fort, erhält man auf diese Weise die Flächeninhalte sämtlicher Trapezsäulen genau einmal, und zwar mit Vorzeichen.

Die arithmetische Umrechnung zwischen der Dreiecksformel (1) und der Trapezformel (2) wiederum ist einfach:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_i + x_i - x_{i+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_i - x_{i+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \cdot (x_i - x_{i+1}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_i - x_{i+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i - x_{i+1}).
 \end{aligned}$$

In der Dreiecksformel (1) müssen wir für die Ermittlung dieses Flächeninhalts zwei Summanden betrachten:

$y_k \cdot (x_{k-1} - x_{k+1})$ liefert den Flächeninhalt für die beiden Rechtecke mit Grundseiten $x_{k-1}x_k$ bzw. x_kx_{k+1} und der gemeinsamen Höhe y_k zusammen, während $y_{k+1} \cdot (x_k - x_{k+2})$ den Flächeninhalt für die beiden Rechtecke mit Grundseiten x_kx_{k+1} bzw. $x_{k+1}x_{k+2}$ und der gemeinsamen Höhe y_{k+1} zusammen liefert. Die beiden hier auftretenden Rechtecke mit der gemeinsamen Grund-

(Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, weil wegen der Setzung $A_0=A_n$ die Summierung von 0 bis $n-1$ identisch mit der von 1 bis n ist.)

3.3 Einige begriffliche Grundlagen

- Ein *einfaches Polygon* $A_1A_2\dots A_n$ ist durch einen ebenen einfachen geschlossenen Streckenzug $A_1A_2\dots A_nA_1$ (Jordankurve) gegeben; gemeint ist damit auch die dadurch bestimmte (endliche) Fläche im Inneren. Diese Fläche ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend. Die Rede vom „einfachen Streckenzug“ bezieht sich auf den Streckenzug als Punktmenge und beinhaltet folgende Entartung: Ecken können zusammenfallen; wenn aber zwei Ecken A_k und A_m ($1 \leq k < m \leq n$) zusammenfallen, dann gilt entweder $A_k=A_{k+1}=\dots=A_{m-1}=A_m$ oder $A_m=A_{m+1}=\dots=A_n=A_1=\dots=A_{k-1}=A_k$. Es lohnt hier nicht, eine wasserdichte Definition aufzustellen; der Flächenbegriff wird ganz naiv verwendet; es kommen nur endliche Bereiche vor, und es werden immer nur endlich viele verknüpft.
- Polygone werden als *Summen* und *Differenzen* von anderen Polygonen dargestellt. Als Flächen werden sie zwar als abgeschlossene Mengen betrachtet, die Mengenvereinigung bzw. der Durchschnitt einer Fläche mit dem Komplement einer anderen sind aber ungeeignete Operationen; vielmehr geht man auch hier naiv-anschaulich vor und lässt Ränder entstehen bzw. wegfallen, wie man es braucht.
- *Trapezsäulen* sind Trapeze, die folgendermaßen auf der x -Achse (Standlinie) stehen: zwei Seiten parallel zur y -Achse, eine Seite (Grundseite) ist Teil der x -Achse, und die vierte Seite liegt beliebig (vgl. die gefärbten Flächen in Abb. 1). Man hat also ein Viereck mit den Ecken $X_1=(x_1;0)$, $X_2=(x_2;0)$, $A_3=(x_2;y_3)$ und $A_4=(x_1;y_4)$. Für jede der vier Seiten, speziell für die beiden Lotrechten, besteht die Möglichkeit, dass sie die Länge 0 haben, wodurch Ecken zusammenfallen und die Trapezsäule zu einem Dreieck (oder gar zu einer Strecke oder gar zu einem Punkt) entartet (z.B. die Flächen $X_1X_2A_1X_1$ und $X_2X_3A_3X_2$ in Abb. 1). Liegen die beiden Lotrechten in verschiedenen Halbebenen bezüglich der x -Achse, tritt der Fall der überschlagenen Trapezsäule auf (vgl. Abb. 8).
- Ersetzt man bei der Trapezsäule die Strecke, die die vierte Seite bildet, durch einen einfachen Streckenzug, der zwischen den beiden lotrechten Parallelen verläuft und Mehrfachpunkte enthalten kann, so hat man die in dieser Arbeit so bezeichnete *verallgemeinerte Trapezsäule* (z.B. in Abb. 1 die Fläche $X_1X_6A_6A_7A_8A_9A_1X_1$).

- Jedem Polygon ist sein *Flächeninhalt* als *nichtnegative* reelle Zahl zugeordnet. Existenz (über Triangulierung) und Eindeutigkeit sollen jetzt nicht problematisiert werden. Mit $x_1 \leq x_2$, $y_1 \geq 0$ und $y_2 \geq 0$ lautet der Flächeninhalt einer Trapezsäule $\frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1)$ (Mittellinie mal Grundseite) und einer verallgemeinerten Trapezsäule $\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i+1} + y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$.

Sind die Nichtnegativitätsbedingungen nicht alle erfüllt, muss man entsprechend mit Beträgen arbeiten bzw. *negative Flächeninhalte* zulassen. Diese Terme sind verträglich mit der *Orientierung* einer Fläche, die der Orientierung ihres Randes, hier des geschlossenen Streckenzugs $A_1A_2 \dots A_nA_1$, entspricht. Legt diese Folge von Ecken ein Durchlaufen gegen den (bzw. im) Uhrzeigersinn fest, dann ist der geschlossene Streckenzug und damit die Polygonfläche positiv (bzw. negativ) orientiert, und der Flächeninhaltsbetrag wird mit einem Plus- (bzw. Minus-) Zeichen versehen. Durchläuft man ihn rückwärts, also in der Folge $A_1A_n \dots A_2A_1$, so haben alle diese Merkmale (Durchlaufungssinn bzw. Orientierung des Streckenzugs, Orientierung der Fläche, Vorzeichen des Flächeninhalts) die jeweils umgekehrte Ausprägung.

Dem gesunden Menschenverstand widerstrebt besonders, dass der Flächeninhalt ein und derselben Fläche sich allein dadurch ändert, dass man sie in unterschiedlichen Richtungen umwandert. Dieser Umstand ist aber konstituierend für das Durchschauen der Trapez- und der Dreiecksformel, und er ist auch leichter zu verstehen, wenn man dann tatsächlich Flächen addiert und subtrahiert: der Erfolg befördert die Akzeptanz. Eine gute kognitive Grundlage liefert das eindimensionale Pendant von orientierten Strecken auf einer Geraden. Je nach dem, in welche Richtung man sie durchläuft, versieht man ihre Länge mit unterschiedlichen Vorzeichen. Es ist weniger das Durchlaufen, das das Vorzeichen bestimmt, sondern die Sichtweise, im übertragenen und direkten Sinn: Wenn man beim Umwandern einer Fläche diese immer zur Linken (bzw. Rechten) hat, wird ihr Inhalt positiv (bzw. negativ) genommen. Diese Manifestation von Orientierung erweist sich bei komplizierter geformten Polygonen als besonders nützlich, wenn nämlich jeweils zu entscheiden ist, ob eine Trapezsäule zu subtrahieren oder zu addieren ist (vgl. Abb. 5).

3.4 Vorbereitungen für die Erarbeitung der Gaußschen Dreiecksformel

Die Trapezformel ist leichter zugänglich als die Dreiecksformel, und es ist sinnvoll, zunächst sie zu explorieren und von ihr aus zu dieser überzugehen. Die Formeln sollten nicht am Ende stehen, sozusagen als Ziel der Bemühungen, mit der Suggestion, „die“ Schüler hätten sie, mit mehr oder weniger Hilfe, „selbst“ gefunden. Vielmehr bietet sich die Präsentation der fertigen Gaußschen Dreiecksformel (1) zum Einstieg an, eingebettet in eine Vermessungsaufgabe – etwa wie in SCHARLAUS

Erzählung – und kontrastiert mit dem aufwändigen und fehleranfälligen Triangulierungsverfahren. Die Schüler sollten die Formeln an einigen Beispielen verifizieren, großenteils als Hausaufgabe. Günstigerweise behält der Lehrer die Auswahl der Beispiele in der Hand, weil sie Folgendes enthalten sollte:

- Polygone, die durch Verschiebung auseinander hervorgehen, darunter einige (weit) ober- bzw. unterhalb der x -Achse, andere, die von der x -Achse geschnitten werden, wieder andere, die weiter links bzw. rechts liegen,
- konvexe und nicht-konvexe Polygone,
- zwei kongruente Rechtecke, die durch Drehung auseinander hervorgehen, eines in kanonischer, eines in schiefer Lage, deren Kongruenz etwa mit Hilfe des Pythagorassatzes nachzuweisen ist,

- in Fortführung des Rechtecksbeispiels zwei etwas komplexere Polygone: z. B. das Viereck mit den Ecken $(2;4)$, $(6;2)$, $(8;10)$, $(4;10)$ und sein Bild unter einer 90° -Drehung um den Ursprung mit den Ecken $(-4;2)$, $(-2;6)$, $(-10;8)$, $(-10;4)$, wo man mit der Dreiecksformel (1) leicht die Flächeninhalte erhält, nämlich beides Mal 30.

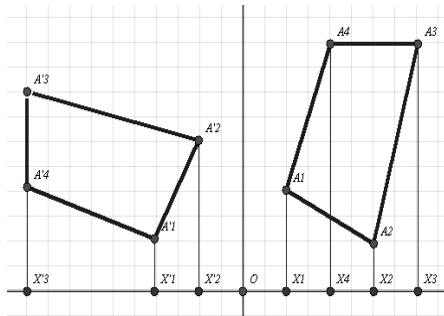


Abb.3: Zwei kongruente Vierecke

- „Fingerübungen“ zu negativen Flächeninhalten im Zusammenhang mit dem Umlaufsinn: Trapezsäulen oberhalb und unterhalb der x -Achse, d. h. mit entweder positiven oder negativen Lotrechten, und Mitführen von deren Vorzeichen bei der Flächeninhaltsformel; auf Umlaufsinn von $X_1X_2A_3A_4X_1$ aufmerksam machen; zunehmend verallgemeinern: umgekehrter Umlaufsinn $X_1A_4A_3X_2X_1$, verallgemeinerte Trapezsäulen, diese von der x -Achse ablösen, dabei Erfordernis der Addition und Subtraktion von Säulen suggerieren usw., bis hin zu dem oben behandelten Paradebeispiel, mit dem die Vorbereitungsphase verlassen würde.

Zweckmäßigerweise gibt man die Koordinaten der Polygonecken vor, lässt die Polygone zeichnen und ihren Flächeninhalt nach der Dreiecksformel (1), zum Kontrast auch einmal nach dem Triangulierungsverfahren, berechnen. Es empfiehlt sich, einfaches Zahlenmaterial zu verwenden; dabei wird die Struktur leichter durchsichtig. Trotzdem ist der Einsatz von Excel auch hierbei hilfreich.

Dem Anwendungsgedanken kann man frönen, indem man die dann nicht mehr ganzzahligen Koordinaten aus Zeichnungen (bis hin zu realen Landkarten) ablesen bzw. noch das Koordinatensystem aufprägen lässt oder sogar mit den Schülern ins Gelände geht und dort entsprechende Aufgaben stellt.

3.5 Verallgemeinerung des Paradebeispiels

Mit dem Paradebeispiel und dem Vergleich der Dreiecks- mit der Trapezformel ist das Wesentliche erfasst, und eine Unterrichtseinheit könnte hier enden. Im Folgenden möchte ich aber noch nacheinander zwei Einschränkungen aufheben, die oben gemacht wurden, nämlich dass

- der Rand in zwei Teile zerlegbar sein soll, von denen der eine vollständig von links nach rechts und der andere vollständig von rechts nach links verläuft;
- das Polygon in der oberen Halbebene liegt.

Beliebige einfache Polygone in der oberen Halbebene

Wenn man mit der Materie genügend vertraut ist, kann man sich die beiden Verallgemeinerungen an einem entsprechend komplexen Polygon prinzipiell in

der o. a. Weise klar machen, indem man bei dem Term $\frac{1}{2} \cdot (y_{i+1} + y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$

und dem zugehörigen Trapez verschiedene Vorzeichenkombinationen und in der Trapezformel (2) verschiedene Abfolgen von Vorzeichenkombinationen betrachtet. Im Folgenden wird ein etwas anschaulicherer Weg beschritten, der allerdings auf diesem Grundgedanken basiert.

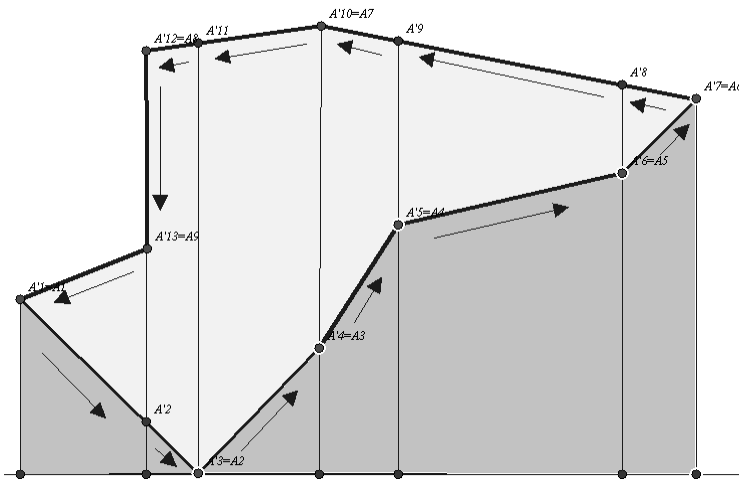


Abb. 4: Filetierung des Polygons

Das einfache Polygon $A_1A_2 \dots A_nA_1$ wird parallel zur y -Achse *filetiert* (Abb. 4). Durch jeden Eckpunkt A_i wird die Gerade parallel zur y -Achse gezeichnet. Auf jeder dieser Geraden werden sämtliche Schnittpunkte mit denjenigen Seiten des Polygons, die nicht schon einen Eckpunkt auf ihr haben, als weitere Eckpunkte eingeführt. Durch entsprechende Nummerierung entsteht ein Polygon $A'_1A'_2 \dots A'_pA'_1$,

das als Punktmenge, und damit mit seinem Flächeninhalt, mit dem Ausgangspolygon übereinstimmt. Diese Konstruktion liefert eine Zerlegung des Ausgangspolygons in Trapeze, die parallel zur y-Achse liegen, und man braucht jetzt nur noch solche Trapeze zu analysieren.

Wenn man das Polygon gegen den Uhrzeigersinn umwandert, so hat man die Fläche immer zu seiner Linken, und der Flächeninhalt ist positiv. Auf dieser Wanderung kommt man nacheinander zu jedem Trapez. Bei einem solchen zum ersten Mal angekommen, durchläuft man automatisch eine seiner Seiten, kann es dann auf einem kleinen Umweg in Form einer Schleife ganz umwandern und ist schließlich wieder auf dem Hauptweg. Bei allen diesen Schleifen liegt die jeweilige Trapezfläche auf der linken Seite, ihr Inhalt ist daher positiv.

Ist das Polygon kompliziert genug aufgebaut, gibt es Parallelstreifen mit mehreren Trapezen, bzw. in einem solchen Parallelstreifen befinden sich j (j gerade) quer laufende Seiten des Polygons. Ohne Kenntnis des gesamten Polygons weiß man zwar nicht notwendig, wie diese Seiten bei der Wanderung „zeitlich“ aufeinander folgen. Aber man weiß, dass der Weg auf ihnen abwechselnd nach rechts und nach links verläuft, und zwar sowohl, wenn man sie in ihrer zeitlichen Abfolge beim Durchwandern betrachtet, als auch, wenn man sie in ihrer räumlichen Abfolge im Streifen betrachtet. Immer zwei Seiten begrenzen ein Trapez, und von den $j-1$ Trapezen gehört immer abwechselnd eins zum Polygon (ganz oben oder ganz unten angefangen, insgesamt $\frac{j}{2}$) und

eins nicht (insgesamt $\frac{j}{2} - 1$) – in Abb.5 jeweils gefärbt bzw. nicht gefärbt.

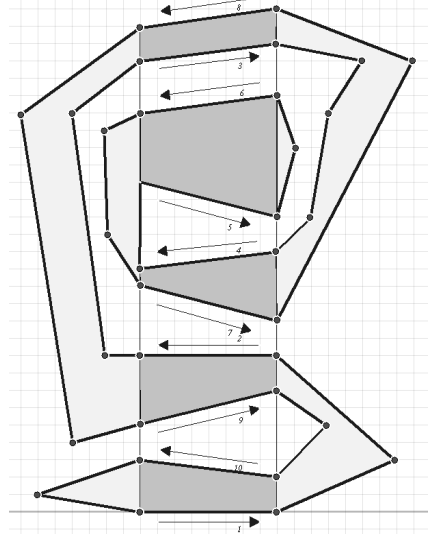


Abb. 5: Polygon mit $j=10$

Dies alles funktioniert, weil die Ebene als Mannigfaltigkeit orientierbar ist (anders als z.B. das Möbiusband) und wir nur einfache Polygone mit endlich vielen Seiten betrachten. Nimmt man die Wanderung anders herum vor, so ergeben sich bei allen Strecken(längen) und Flächen(inhalten) die gegenseitige Orientierung bzw. das umgekehrte Vorzeichen.

Einfache Polygone mit Ecken ober- und unterhalb der x-Achse (Standlinie)

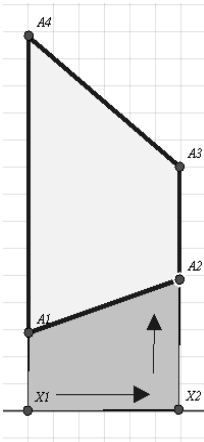


Abb. 6.1

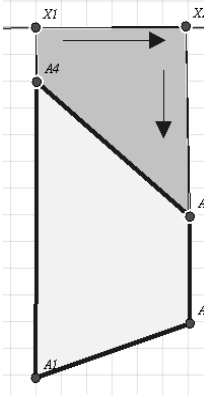


Abb. 6.2

Ein solches Polygon in der oberen Halbebene kann also noch so kompliziert aufgebaut sein – es lässt sich immer aus Trapezen mit Grundseiten lotrecht zur x-Achse zusammensetzen. Wir betrachten nun ein solches Trapez $A_1A_2A_3A_4A_1$ mit $x_4=x_1 < x_2=x_3$. Wenn es die Voraussetzungen des Paradebeispiels erfüllt, d. h. wenn $0 \leq y_1 \leq y_4$ und $0 \leq y_2 \leq y_3$ gilt (Abb. 6.1), dann wissen wir, dass wir seinen Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot ((y_3 - y_2) + (y_4 - y_1)) \cdot (x_2 - x_1) \quad (4)$$

als Differenz der Flächeninhalte zweier Trapezsäulen $X_1X_2A_3A_4X_1$ und $X_1X_2A_2A_1X_1$ darstellen können:

$$\frac{1}{2} \cdot (y_3 + y_4) \cdot (x_3 - x_4) - \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1);$$

womit wir ihn auf die Trapezformel (2) zurückgeführt haben: $\frac{1}{2} \cdot ((y_3 + y_4) \cdot (x_3 - x_4) + (y_1 + y_2) \cdot (x_1 - x_2))$.

Befindet sich nun das Trapez, nach wie vor mit positivem Umlaufsinn, in der unteren Halbebene, d. h. gilt $y_1 \leq y_4 \leq 0$ und $y_2 \leq y_3 \leq 0$ (Abb. 6.2), dann hat es wieder den Flächeninhalt gemäß Term (4). Die beiden Trapezsäulen $X_1X_2A_3A_4X_1$ und $X_1X_2A_2A_1X_1$ haben jetzt negativen Umlaufsinn. Nach wie vor liefert die (positive) Differenz ihrer (negativen) Flächeninhalte

$$\frac{1}{2} (y_3 + y_4) \cdot (x_3 - x_4) - \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

den Flächeninhalt des Trapezes, und man hat wieder genau die Nummerierung der Trapezformel (2) für den Term (4).

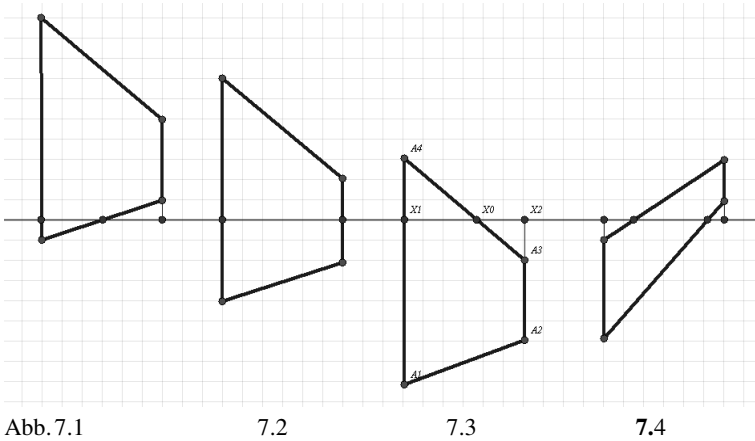
Wenn man sich ein solches Trapez in der oberen Halbebene positioniert und dann kongruent stetig nach unten verschoben denkt und dabei fortwährend die Flächeninhalte der beiden Trapezsäulen und des Trapezes notiert, günstigerweise mit Hilfe einer Software für Dynamische Geometrie (DGS), dann wird die Konstanz der Differenz bei gleichartiger Veränderung von Minuend und Subtrahend (in Form von Flächen) illustriert.

Möchte man, in der unteren Halbebene, die beiden Trapezsäulen mit positivem Umlaufsinn haben, muss man sie $X_2X_1A_4A_3X_2$ und $X_2X_1A_1A_2X_2$ schreiben. Ihre x-Achsenabschnitte werden dann von X_2 nach X_1 , also im

negativen Sinn, durchlaufen. Der Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich erneut als (positive) Differenz der (nun positiven) Flächeninhalte der beiden Trapezsäulen zu

$$\frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \cdot (x_1 - x_2) - \frac{1}{2} \cdot (y_4 + y_3) \cdot (x_4 - x_3).$$

Überschlagene Trapezsäulen



Durch die Betrachtung solcher Trapeze anstelle eines komplexen Polygons hat man die Orientierungs- und Vorzeichenproblematik im Zweidimensionalen fast auf eine Dimension reduziert – tatsächlich nur fast; denn es gibt noch den Fall, dass die x-Achse durch das Trapez geht (vgl. Abb. 7 mit mehreren Unterfällen).

Bei der (o. a.) stetigen Bewegung des Trapezes von oben nach unten haben wir diesen Fall scheinbar unbemerkt mit „erledigt“. Er ist aber nicht erledigt, weil wir dann auf einmal „überschlagene“ Trapezsäulen erhalten (das Wort wird, unter Hintanstellung der Begriffsproblematik, nur zur Beschreibung der Situation verwendet). Als geschlossene Streckenzüge sind überschlagene Polygone wohl leicht zugänglich, nicht aber als Flächen. Wegen dieser begrifflichen Problematik und Anwendungsferne sollen allgemeine überschlagene Polygone im Folgenden nicht weiter in Betracht gezogen werden.

Nennt man z. B. bei einer überschlagenen Trapezsäule $X_1X_2A_3A_4X_1$ (wie in Abb. 7.3) den Schnittpunkt der Seite A_3A_4 mit der x-Achse noch X_0 , dann kann man die Trapezsäule als Vereinigung der beiden Dreiecke $X_1X_0A_4X_1$ und $X_0X_2A_3X_0$ auffassen, deren Flächeninhalte wegen ihrer unterschiedlichen Orientierung unterschiedliches Vorzeichen haben. Deren Summe wird als der *Flächeninhalt der überschlagenen Trapezsäule* genommen:

$$\frac{1}{2} \cdot y_4 \cdot (x_0 - x_1) + \frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot (x_2 - x_0). \quad (5)$$

Wenn wir beachten, dass X_0 auf der Seite A_3A_4 liegt, ergibt sich die Verhältnisgleichung $y_4 : (x_0 - x_1) = y_3 : (x_0 - x_2)$ (Strahlensatz oder Steigungsdreieck, mit Beachtung der Vorzeichen), und daraus $y_4 \cdot (x_0 - x_2) = y_3 \cdot (x_0 - x_1)$ und weiter $y_4 \cdot x_0 - y_3 \cdot x_0 = y_4 \cdot x_2 - y_3 \cdot x_1$. Dies in (5) eingesetzt, führt zu dem Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (y_3 + y_4) \cdot (x_2 - x_1)$, und das ist gerade Term (4) mit $y_1 = y_2 = 0$, also die Flächeninhaltsformel für die Trapezsäule (als spezielles Trapez), wo y_3 und y_4 nun *beliebige Vorzeichen* haben können.

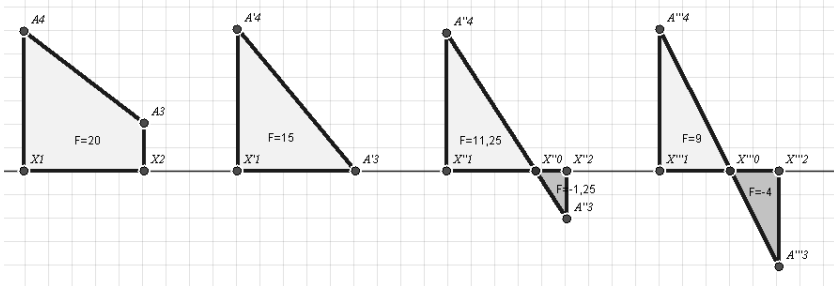


Abb. 8: Überschlagene Trapezsäulen

Die hier vorgenommene Festlegung des Flächeninhalts einer überschlagenen Trapezsäule ist verträglich mit dem Flächeninhaltsbegriff einfacher Polygone. Es sei allerdings noch einmal betont, dass diese Erweiterung den Begriff der orientierten Fläche und des mit einem Vorzeichen versehenen Flächeninhalts voraussetzt. Diese Verträglichkeit kann man z.B. veranschaulichen, indem man, mit Hilfe einer DGS, bei einer Trapezsäule $X_1X_2A_3A_4X_1$ etwa den Eckpunkt A_3 von oberhalb der x -Achse nach unten laufen lässt und den Flächeninhalt in Abhängigkeit von y_3 beobachtet. Wenn y_3 negativ wird, lässt man sich zusätzlich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ausgeben (Abb. 8).

Bei einem Trapez mit z.B. $y_1 \leq 0 < y_4$ und $y_2 \leq y_3 < 0$ (Abb. 7.3) hat man dann nach wie vor die beiden Trapezsäulen $X_1X_2A_3A_4X_1$ und $X_1X_2A_2A_1X_1$, wobei erstere überschlagen ist. Es ergibt sich wieder genau die o.a. Flächeninhaltsdifferenz $\frac{1}{2} \cdot (y_3 + y_4) \cdot (x_3 - x_4) - \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1)$ und damit erneut genau die Nummerierung der Trapezformel (2) für den Term (4).

Während der Übergang von der oberen zur unteren Halbebene durchaus einiger zusätzlicher Überlegungen bedarf, macht der entsprechende Übergang von der rechten zur linken Halbebene keinerlei Probleme, weil die x -Werte

immer nur in Differenzen vorkommen. Deswegen durfte das Paradebeispiel von vorneherein auch negative x -Werte haben.

Wenn nun der Rand des Polygons nicht in zwei Teile zerlegbar ist, so dass der eine vollständig von links nach rechts und der andere vollständig von rechts nach links verläuft, dann treten auch Parallelstreifen auf, die mehr als ein Trapez enthalten (vgl. Abb.5). Nach wie vor kann jedes Trapez als Differenz zweier Trapezsäulen dargestellt werden, und jeder solchen Trapezsäule entspricht genau ein Summand in der Trapezformel (2).

Invarianz des Flächeninhalts beim Hinzufügen von Ecken

Dass sich durch das Hinzufügen neuer Eckpunkte auf vorhandenen Seiten eines Polygons der Flächeninhalt nicht ändert, ist geometrisch klar, muss aber an der Trapezformel (2) noch verifiziert werden.

Für drei aufeinander folgende Eckpunkte A_1, A_0, A_2 eines einfachen Polygons, die auf einer Geraden liegen, mit $x_1 < x_0 < x_2$ (Abb.9) oder $x_2 < x_0 < x_1$, ergibt sich analog zu den Berechnungen im Anschluss an (5) in der Tat

$$\frac{1}{2} \cdot ((y_1+y_0) \cdot (x_1-x_0) + (y_0+y_2) \cdot (x_0-x_2)) = \frac{1}{2} \cdot (y_1+y_2) \cdot (x_1-x_2).$$

Wenn man also durch Wegnehmen der Zusatzpunkte vom Polygon $A'_1 A'_2 \dots A'_p A'_1$ wieder zum Polygon $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ zurückkehrt, geht der Term

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^p (y'_i + y'_{i+1}) \cdot (x'_i - x'_{i+1})$$

wieder in die genaue Form der Trapezformel (2) über.

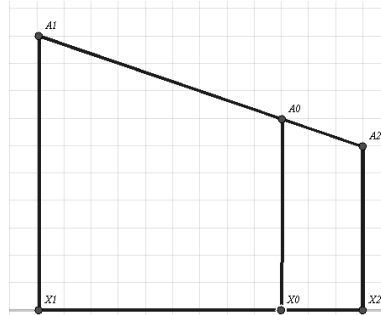


Abb.9

3.6 Verhalten der Gaußschen Formeln unter geometrischen Abbildungen

In der Dreiecks- wie auch in der Trapezformel werden die x - und die y -Koordinate ersichtlich jeweils unterschiedlich verwendet. Die Trapezsäulen, die für das Verständnis konstituierend sind, werden auf der x -Achse als Standlinie errichtet. Ihre Breiten sind x -Differenzen, ihre mittleren Höhen y -Werte. Natürlich kann man das alles auch auf die y -Achse beziehen: Bei einem gegebenen einfachen Polygon errichtet man die Trapezsäulen auf der y -Achse als Standlinie, und wenn man in der Dreiecksformel (1) bzw. in der Trapezformel die Koordinaten vertauscht, hat man den Flächeninhalt des Polygons – allerdings, wie bereits ausgeführt, mit umgekehrtem Vorzeichen, bzw. man zieht das Minuszeichen in

die x -Differenzen und erhält die Dreiecksformel (3) mit der y -Achse als Standlinie. Diese Operation veranschaulicht man am einfachsten mit Hilfe eines konvexen Polygons im 1. Quadranten. Wenn man es gegen den Uhrzeigersinn umwandert, so werden auf dem Stück, das der x -Achse näher ist (also dort, wo sich die zu *subtrahierenden* Trapezsäulen befinden), die x -Werte *größer* usw. Auf dem Stück, das der y -Achse näher ist, werden die y -Werte aber *kleiner* usw.

Mit der Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden wird ein Polygon $A_1A_2\dots A_nA_1$ auf das Bildpolygon $A'_1A'_2\dots A'_nA'_1$ mit $A'_k=(y_k;x_k)$ und dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1}) \text{ gemäß Dreiecksformel (1) mit der } x\text{-Achse als Standlinie}$$

abgebildet. Wegen der Orientierungsverkehrung der Spiegelung hat dieser Flächeninhalt das umgekehrte Vorzeichen wie der des Ausgangspolygons gemäß Dreiecksformel (3) mit der y -Achse als Standlinie.

Bei Spiegelungen an der x -Achse oder der y -Achse sieht man die Erhaltung des Betrags und die Umkehrung des Vorzeichens beim Flächeninhalt noch klarer, weil lediglich jeweils das Vorzeichen einer der beiden Koordinaten verkehrt wird.

Ebenso offensichtlich ändert sich bei einer Translation parallel zur x -Achse nichts am Wert der Dreiecksformel (1), weil die x -Werte nur in Differenzen vorkommen und diese unter gleichmäßigen gleichsinnigen Veränderung invariant sind.

Analog kann man auf der Basis der Dreiecksformel (3) direkt begründen, dass auch bei Translationen parallel zur y -Achse der Flächeninhalt gleich bleibt.

Nun soll allerdings noch eine direkte Begründung nur unter Verwendung der Dreiecksformel (1) geliefert werden: Bei einem kompletten Umlauf um das Polygon ist man insgesamt gleichweit nach links wie nach rechts gegangen, d. h.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) = 0. \text{ Bei einer Translation parallel zur } y\text{-Achse (um die Zahl } c) \text{ hat}$$

das Bildpolygon den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i + c) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) + c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}). \end{aligned}$$

Beim Umlauf (gegen den Uhrzeigersinn) um das Polygon durchläuft man nämlich Seiten, wo der x -Wert größer wird: von links nach rechts, im Term $x_i - x_{i+1} < 0$; Seiten, wo er kleiner wird: von rechts nach links, im Term $x_i - x_{i+1} > 0$; und Seiten, wo er gleich bleibt: lotrecht, im Term $x_i - x_{i+1} = 0$.

Die Trapezsäulen, die zur ersten Sorte von Seiten gehören nennen wir U_i , die, die zur zweiten Sorte von Seiten gehören, V_i , und die, die zur dritten Sorte von

Seiten gehören, haben die Breite 0 und können weggelassen werden. Bei der Translation parallel zur y-Achse um c werden die U_i zusammen um ein Rechteck größer, dessen Breite die aufsummierte Breite aller U_i und dessen Höhe c ist. Entsprechend werden die V_i zusammen um ein Rechteck größer, dessen Breite die aufsummierte Breite aller V_i ist, mit derselben Höhe c . Da die Gesamtbreite aller U_i gleich der negativen Gesamtbreite aller V_i ist, annullieren sich die beiden Rechtecke.

Bei der Drehung um den Ursprung um einen Winkel α wird der Punkt $(x; y)$ bekanntlich auf den Punkt $(\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y; \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)$ abgebildet, und bei einem Polygon mit Flächeninhalt in Form der Dreiecksformel (1) hat das Bildpolygon den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y) \cdot (\cos\alpha \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) - \sin\alpha \cdot (y_{i-1} - y_{i+1})).$$

Selbstverständlich stimmt dieser Flächeninhalt mit dem des Ausgangspolygons überein, weil das Bildpolygon ja kongruent zu diesem ist. In dieser scheinbar banalen Begründung stecken aber einige tiefer liegende Sätze der Abbildungsgeometrie. Dagegen macht die folgende längliche Kette von algebraischen Umformungen einen recht aufwändigen Eindruck – ganz im Gegensatz zum einfachen Charakter der Gaußschen Dreiecksformel. Wohl setzt diese Rechnung einen souveränen Umgang mit Formelstrukturen voraus – insbesondere wird mehrfach die zyklische Nummerierung der Punktkoordinaten ausgenutzt –, aber im Prinzip könnte die Verifizierung der Übereinstimmung auch maschinell erfolgen. – Hier haben wir ein typisches Beispiel für das Verhältnis von analytischer und synthetischer Geometrie. Die analytische Geometrie trivialisiert viele geometrische Beweise, bringt diese aber in eine geradezu unästhetische Form. Zugleich liefert sie *einfach schöne* Formeln wie die Gaußsche Dreiecksformel, mit denen *schön einfach* gerechnet werden kann.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (\cos^2\alpha \cdot y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) - \sin^2\alpha \cdot x_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1}) + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot x_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) \\ & - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot y_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1})) \\ = & \cos^2\alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) - \sin^2\alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1}) + \sin^2\alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{i+1} \\ & + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i-1} - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i+1} - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot y_{i-1} \\ & + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) - \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \cdot y_i + \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} \cdot y_i \\
&\quad + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \cdot x_i - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i+1} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \cdot y_i \\
&\quad + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot y_{i+1} \\
&= \cos^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) - \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_{i+1} \cdot y_i + \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_{i-1} \cdot y_i \\
&\quad + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_{i+1} \cdot x_i - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{i+1} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_{i+1} \cdot y_i \\
&\quad + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot y_{i+1} \\
&= \cos^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) + \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1}) .
\end{aligned}$$

Für $\alpha=90^\circ$ ist $\cos \alpha=0$ und $\sin \alpha=1$, und es ergibt sich ohne Weiteres die Dreiecksformel (3). Weiterhin sieht man direkt, dass unter einer zentrischen Streckung am Ursprung mit dem Streckfaktor $c \neq 0$ der Flächeninhalt eines Polygons c^2 -facht wird.

Literatur

- SCHARLAU, W. (1999): *I megalli istoria – die große Geschichte*. Roman. Havixbeck: Selbstverlag
- WITTMANN, E. CH. (1987): *Elementargeometrie und Wirklichkeit*. Einführung in geometrisches Denken, Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg