Aus: Leuchter, C., Wistuba, F., Czapla, C., & Segerer, C. (Hrsg.). (2017). Erfolgreich studieren mit E-Learning: Online-Kurse für Mathematik und Sprach- und Textverständnis. Aachen: RWTH Aachen University.

Rolf Biehler

DAS VIRTUELLE EINGANGSTUTORIUM MATHEMATIK studiVEMINT – STRUKTUR UND INHALT

Der Online-Brückenkurs »studiVEMINT« (vorheriger Name »VEMINT@NRW«) stellt eine im Auftrag des Ministeriums für Innovation, Wissenschaft und Forschung vorgenommene Neuentwicklung auf der Basis der »VEMINT«-Materialien dar. »studiVEMINT« orientiert sich strukturell an den 13 Wissensbereichen, die auch für die »Studichecks« auf der STUDIFINDER-Plattform (www.studifinder.de) zum Selbsttest mathematischer Kenntnisse zugrunde gelegt werden. Die Orientierung an einem breiten Adressatenkreis wie bei »VEMINT« wurde beibehalten: für Studierende der Wi-INT-Fächer an Fachhochschulen und Universitäten, für Studierende der Mathematik und für Lehramtsstudierende der Mathematik der unterschiedlichen Schulstufen.

Die »VEMINT«-Gruppe wird von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern aus den Bereichen Mathematik und Mathematikdidaktik an den Universitäten Darmstadt, Hannover, Kassel und Paderborn (www.vemint.de) getragen und ist dem »Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik« (www.khdm.de) assoziiert. Das seit 2003 kontinuierlich weiterentwickelte Vorkursmaterial ist an mehr als 15 Universitäten und Fachhochschulen im Einsatz. Das »VEMINT«-Material stellt ein umfassendes Angebot dar, aus dem Kurse für unterschiedliche Adressatinnen und Adressaten zusammengestellt werden können. Es wurden verschiedene Evaluationsstudien zum Einsatz von »VEMINT« durchgeführt, z. B. die Dissertation von Fischer (2014), auf der aktuelle Evaluationen von »studiVEMINT« aufbauen. Um den Austausch über Konzepte, Beispiele, Studien und Erfahrungen zu Vor- und Brückenkursen zu befördern, hat die »VEMINT«-Gruppe mehrere Tagungen mitorganisiert (Bausch et al. 2014; Hoppenbrock et al. 2016). Sie ist ferner an dem TU9-Brückenkurs »ve&mint« (www.ve-und-mint.de) beteiligt.

Grundlagen für die Gestaltung der Lerneinheiten

Orientierungsgrundlagen

Als Orientierungsgrundlage für die Gestaltung der Materialien haben wir verschiedene Quellen benutzt. Die nationalen Bildungsstandards und der Lehrplan Nordrhein-Westfalen zusammen mit den »Studichecks«, die Wissens- und Kompetenzbereiche aus dem Lehrplan abdecken, stellen eine erste wichtige Grundlage dar. Darüber hinaus berücksichtigen wir den Mindestanforderungskatalog der »COSH«-Gruppe und Einsichten aus weiteren Studien und didaktischen Analysen, die themenspezifische Problembereiche im Übergang von Schule zu Hochschule identifizieren.

Verständiger Umgang mit Verfahren und Aufbau von konzeptuellem Verständnis sowie von Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen

Defizite bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern liegen darin, dass mathematische Verfahren oft nicht routinemäßig und fehlerfrei durchgeführt werden können. Zu diesen Verfahren bieten wir zahlreiche Übungsmöglichkeiten an. Da das reine Auswendiglernen kaum verstandener Verfahren keine nachhaltigen Erfolge bringt, legen wir auf den verständigen Umgang Wert. Es werden auch scheinbar einfache Verfahren, wie z. B. die Bruchaddition, noch einmal anschaulich begründet. Einfache, aber interessante innermathematische und außermathematische Anwendungen schaffen motivierende und sinnstiftende Kontexte für das Üben von Verfahren. Für die Anwendbarkeit von Verfahren und Begriffen sind Grundvorstellungen und ein konzeptuelles Verständnis wichtig, welche die mathematische Strukturierung von Situationen unterstützen. Der Vorstellungsaufbau wird durch geeignete interaktive Visualisierungen unterstützt. Dies trägt der Diagnose Rechnung, dass Studienanfängerinnen und -anfänger nicht nur im Kalkülbereich Defizite haben, sondern auch im konzeptuellen Verständnis zentraler mathematischer Begriffe wie z. B. Funktionen, Ableitung und Integral, welches aber in vielen Studienfächern ebenso vorausgesetzt wird wie das Beherrschen von Rechentechniken.

Beispiele zum Thema »Binomische Formeln«

Bei den binomischen Formeln beispielsweise setzen wir interaktive geometrische Visualisierungen ein (siehe Biehler et al. in diesem Band). Des Weiteren werden Erklärungen zur unterschiedlichen Verwendung der Formeln (Faktorisieren und Ausmultiplizieren) herausgestellt, weil bekannt ist, dass Schülerinnen und Schüler oft Gleichheitszeichen nur von links nach rechts lesen und deren wichtige Nutzung zur Faktorisierung neu ins Bewusstsein gerufen werden muss. Von Sätzen zu sprechen und den Wertebereich von Variablen zu benennen, ist ein kleiner Schritt in Richtung hochschultypischer Darstellungsformen.

Inhalte mit Erklärungen

Satz 1
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

Erste binomische Formel:
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Zweite binomische Formel:
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Dritte binomische Formel:
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Die erste Umformungsrichtung nennt man **Ausmultiplizieren**, die zweite **Faktorisieren**. Beide Anwendungen sind legitim und können bei Umformungen eingesetzt werden, um Zeit zu sparen. Die Symbole a und b können auch durch komplexere Terme ersetzt werden.

Abb. 1 Binomische Formeln (anschließend erfolgt eine algebraische Begründung)

Für die Beherrschung von Rechentechniken ist auch die Fähigkeit zur kritischen Überprüfung eigener Rechnungen zentral. Wir bieten dazu speziell Aufgaben-»Lösungen« mit typischen Fehlern zur »Fehlerdiagnose« und zum Aufbau von »negativem Wissen« an (Abb. 2).

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind. Korrigieren Sie gegebenenfalls!

(N) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$

(E) $(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^2 + 80a^2b^2 + 25b^4$

(A) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

(S) $16 + 8a + a^2 = (4a)^2$

Abb. 2 Aufgaben zur Fehlerdiagnose im Umfeld binomischer Formeln

Trotz entsprechender Forderungen nach kumulativem Lernen in den Lehrplänen und in den Bildungsstandards fehlt den Studienanfängerinnen und -anfängern oft systematisch organisiertes Wissen in einzelnen mathematischen Wissensgebieten. Beispielsweise haben sie im Laufe ihrer Schulzeit einen Aufbau der verschiedenen Zahlbereiche erlebt, ohne dass noch einmal systematisch Eigenschaften und die teilweise unterschiedlichen Rechengesetze und die unterschiedliche Lösbarkeit von Gleichungen in den Zahlbereichen reflektiert worden wären. Der Funktionsbegriff wird über viele Schuljahre zunächst auf unterschiedlichen Stufen mathematischer Präzision aufgebaut. Teilweise werden wichtige Funktionstypen wie trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen in der Oberstufe gar nicht mehr systematisch geübt und angewendet, da sich die Analysis oft auf die Untersuchung ganz-rationaler Funktionen beschränkt und eine kumulative reflektierende Rückschau zu kurz kommt. Auch hieraus ergibt sich die Notwendigkeit einer neuen Systematisierung und Vertiefung.

Wir streben deshalb in den 13 Wissensgebieten eine systematische Aufbereitung der Schulmathematik im Hinblick auf die Nutzung an der Hochschule an. Dabei ist es eine große Herausforderung, einen angemessenen Grad der Elementarisierung mathematischer Inhalte zugrunde zu legen, der bekannte Schwächen der Schulmathematik vermeidet und sich zwar noch nicht auf dem Niveau der Mathematik in den Anfängervorlesungen bewegt, aber Brücken in deren Richtung baut. Dabei greifen wir auf Arbeiten zurück, die die Schulmathematik von einem etwas höheren Standpunkt diskutieren, der auch für Studienanfängerinnen und -anfänger geeignet ist. Wir nennen hierzu beispielhaft die Einführung von Kirsch (2004) oder zur (Didaktik der) Analysis die Veröffentlichungen von Büchter/Henn (2010) und von Greefrath et al. (2016).

Unterschiedliche mathematische Begründungsformen und -tiefen

Wir gehen davon aus, dass die Nutzerinnen und Nutzer unserer Materialien unterschiedlich tief an Begründungen und Erklärungen interessiert sind beziehungsweise unterschiedliche Arten von Erklärungen kognitiv unterschiedlich verarbeiten. Deswegen bieten wir Begründungen auf mehreren Ebenen und in diversen Darstellungsformen an: anschaulich, an Beispielen illustriert, formal mit zusätzlichen Erläuterungen etc. Zwischen Begründungsformen, die an der Schule und an der Hochschule verwendet werden, klafft eine große Lücke, die wir überbrücken wollen. Unsere Lösung besteht darin, dass wir bewusst unterschiedliche Begründungen als solche benennen und die Reichweite thematisieren, wie beispielgebundene Begründungen, die aber verallgemeinerungsfähig sind, als solche zu kennzeichnen oder anschauliche von formalen Begründungen zu unterscheiden. Wir machen auch Begründungslücken bewusst, die mit Schulwissen nicht zu füllen sind, und verweisen dann auf die spätere Hochschulmathematik, in der diese geschlossen werden können.

Das Konzept der »Intros«

Grundkonzept

Für alle 13 Wissensgebiete wurden sogenannte Intros entwickelt, die problemorientiert einen kompakten (Wieder-)Einstieg in das jeweilige Gebiet ermöglichen sollen. Wir gehen dafür von etwa 45 Minuten Lernzeit aus. Wir starten mit einem inner- oder außermathematischen motivierenden Einstiegsbeispiel, welches so gewählt wurde, dass verschiedene Aspekte des Wissensbereichs darin angewendet werden müssen. Die Lernenden erarbeiten sich das Beispiel mit gestuften Hilfen; zu Teilaufgaben, bei denen sie nicht weiterkommen, können sie Ideen oder die Lösungen abrufen. Verlinkungen zu kompakt dargestellten ausgewählten Inhalten, z. B. Eigenschaften von linearen Funktionen, die zur Lösung benötigt werden, erlauben ein kurzes problemorientiertes Nachlernen oder Auffrischen von spezifischen Themen.

Ziel der Intros ist es, erste positive Lernerfolge zu vermitteln. Sie vermitteln einen Einblick in den Wissensbereich, motivieren so ggf., sich näher damit zu beschäftigen, z. B. in Form der zugehörigen Lerneinheit. Zugleich lernen die Nutzerinnen und Nutzer auch unser Material exemplarisch kennen und können beurteilen, ob es zu ihrem Lerntyp passt. Resultat der Beschäftigung mit den Intros kann auch sein, dass Lernende durch die Auffrischung erkennen, dass sie das Wissensgebiet vielleicht doch nicht vorrangig wiederholen müssen, sondern für die mathematikbezogene Studienvorbereitung andere Schwerpunkte setzen können.

Das Intro zur Elementaren Geometrie

Im Intro zur Elementaren Geometrie wird als Problem aufgeworfen, wie der Erdumfang geschätzt werden kann. Dabei orientieren wir uns an dem Vorgehen von Eratosthenes (≈276–194 v. Chr.).

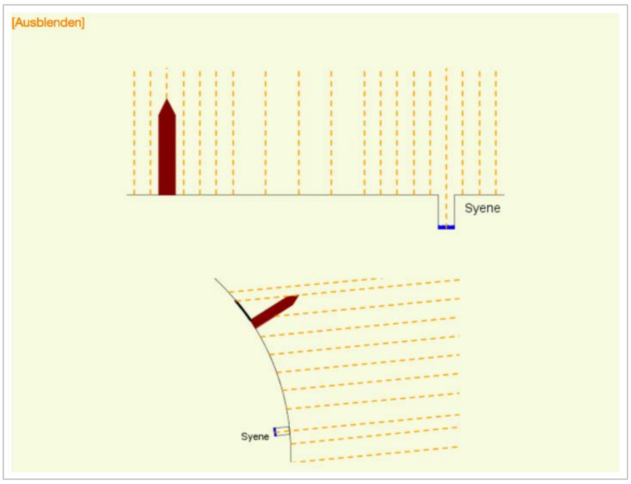

Abb. 3 Schattenwurf eines Obelisken, erklärbar mit Krümmung der Erdoberfläche

Wenn die Sonne in Syene (heute Assuan) zur Mittagszeit am Tag der Sommersonnenwende senkrecht steht, wirft ein Obelisk im entfernten Alexandria einen Schatten (wir nehmen an, dass die Sonnenstrahlen angenähert parallel die Erde erreichen). Auf dem Weg zur Berechnung des Erdumfangs aus der Entfernung des Obelisken zur Stadt Syene und der Länge des Schattens wird den Lernenden eine unterstützende Skizze angeboten (Abb. 3).

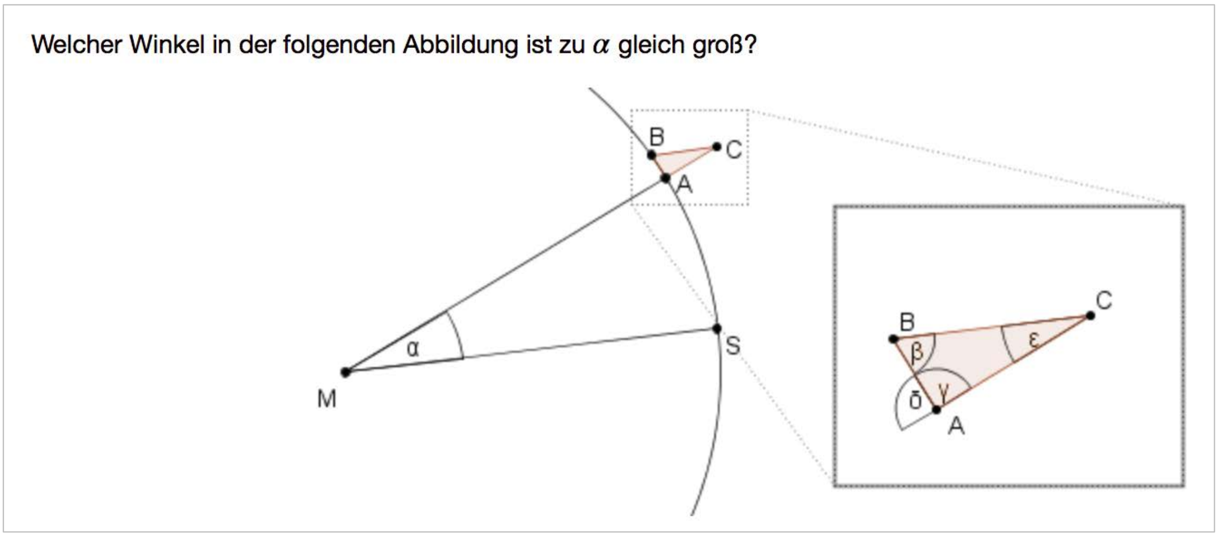

Abb. 4 Winkelverhältnisse beim Obelisken im Intro »Geometrie«

Die Größe des Winkels ε ist durch maßstabsgerechte Konstruktion zu ermitteln. Einfache Argumente über Wechsel- und Stufenwinkel zeigen, dass $\varepsilon=\alpha$ ist. Der Erdumfang ist dann das $360/\alpha$-fache der Entfernung von A bis S. Im Intro findet man dazu Informationen zu einfachen Winkelbeziehungen, zur Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken und Informationen zur Ähnlichkeit und zentrischen Streckung. Umfangreiche Übungsmöglichkeiten und tiefere Erklärungen zu diesen Themen werden in der Lerneinheit »Elementare Geometrie« angeboten.

Elementargeometrische Kenntnisse werden in den höheren Klassen des Gymnasiums in der Regel zu wenig gepflegt, aber viele Studiengänge (z. B. Ingenieurwissenschaften und alle Lehrämter) setzen dieses Wissens voraus, sodass hier ein Wiedereinstieg an einem interessanten Beispiel geboten wird, das nebenbei auch die kulturhistorische Bedeutung der Mathematik demonstriert. Zu den meisten anderen Wissensgebieten, wie Gleichungen und Funktionen, bieten wir wahlweise inner- oder außermathematische Einstiege an, um auch den Lernenden Rechnung zu tragen, die außermathematische Einstiege als Hürde und nicht als motivierende Einführung empfinden und mehr am innermathematischen Üben sowie Anwenden interessiert sind.

Inhaltlicher Aufbau der Lerneinheiten

Wir gehen von einem Umfang von etwa sechs Stunden Lernzeit für eine Lerneinheit für einen Wissensbereich aus, wobei die Lernenden eigene Schwerpunkte setzen und das Lerntempo selber variieren können. Die Struktur einer Lerneinheit folgt immer der folgenden Gliederung:

Übersicht Hinführung Inhalte mit Erklärungen Aufgaben Anwendung
Inhalte kompakt Ergänzungen Symbolerklärung Anleitung: Formeleingabe

Abb. 5 Struktureller Aufbau einer Lerneinheit

Wir illustrieren hier einige Aspekte des Aufbaus am Thema »Gleichungen«. Das Material startet bei der Hinführung mit einem Zahlenrätsel, das sich an der schulischen Einführung orientiert.

Aufgabe 1
(Zahlenrätsel) Eine Zahl x wird mit 2 multipliziert. Anschließend wird 3 addiert und das Ergebnis mit 5 multipliziert. Nach der Subtraktion von 7 erhält man das Ergebnis 28. Bestimmen Sie die Zahl x.

Abb. 6 Einstiegsaufgabe in das Gleichungslösen

Die Musterlösung, mit der die Lernenden ihren eigenen Ansatz vergleichen können, thematisiert bereits einen Aspekt, mit dem Studienanfängerinnen und -anfänger erfahrungsgemäß Schwierigkeiten haben, nämlich welche Umformungen einer Gleichung zulässig sind, ohne ihre Lösungsmenge zu ändern: sogenannte Äquivalenzumformungen.

[Ausblenden]
Wenn wir alle Operationen in einer Gleichung zusammenfassen, erhalten wir:

$$5(2x+3)-7=28.$$

Man kann diese Gleichung folgendermaßen lösen:

$$\begin{array}{rrcll} & 5(2x+3)-7 & = & 28 & \mid \text{ ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 10x+15-7 & = & 28 & \mid \text{ zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow & 10x+8 & = & 28 & \mid\ -8 \\ \Leftrightarrow & 10x & = & 20 & \mid\ :10 \\ \Leftrightarrow & x & = & 2 & \end{array}$$

Also ist die gesuchte Zahl $x=2$.

Das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ kann immer dann gesetzt werden, wenn aus der Gleichung in einer Zeile die Gleichung in der nächsten Zeile gefolgert werden kann **und umgekehrt**, z.B.:

$$\begin{array}{rrcll} & 10x+8 & = & 28 & \mid\ -8 \\ \Rightarrow & 10x & = & 20 & \end{array}$$

und genauso gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & 10x & = & 20 & \mid\ +8 \\ \Rightarrow & 10x+8 & = & 28 & \end{array}$$

Daher gilt insgesamt:

$$10x=20 \Leftrightarrow 10x+8=28$$

Abb. 7 Musterlösung des Einstiegsbeispiels

Beim Durcharbeiten der Übungsaufgaben mit Zahlenbeispielen und Variablen sowie des Abschnitts zu Anwendungen (fakultativ) festigen die Lernenden die Rechentechniken für diese Gleichungstypen. Ferner kann der oder die Lernende eine zusammenfassende Übersicht unter der Rubrik »Inhalte kompakt« aufrufen, welche die drei Fälle, die beim Lösen der Beispielaufgaben auftreten (eindeutige Lösung, keine Lösung und alle reellen Zahlen sind Lösungen), systematisch zusammenstellt.

Regel 1

Wir lösen die Gleichung $ax + b = cx + d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) durch Umformen. Dazu subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung $cx + b$ und erhalten

$$(a - c)x = d - b \quad .$$

Es gibt nun drei Fälle:

1.) Falls $a - c \neq 0$, kann man teilen und erhält die **eindeutige Lösung** $x = \frac{d-b}{a-c}$.

2.) Falls $a = c$ ist, so erhält man die Gleichung $0x = b - d$ und unterscheidet folgende Fälle:

2a.) Ist $b \neq d$, so ist $b - d \neq 0$ und die Gleichung ist für kein x erfüllbar, also nicht lösbar.

2b.) Ist $b = d$, so erhält man die Gleichung $0x = 0$. Diese Gleichung ist für alle x richtig, also allgemeingültig.

Abb. 8 Übersicht über Lösungen bei »linearen Gleichungen«

Diese abschließende »Lösungstheorie« wird hier bereits auf einem etwas höheren Niveau als bei der Erstbegegnung in der Sekundarstufe I angeboten, indem statt mit Zahlenbeispielen mit den Variablen a,b,c,d gearbeitet wird und die unterschiedlichen möglichen Lösungsmengen thematisiert werden. Dieser wichtige Aspekt spielt auch bei allen anderen Gleichungstypen und z. B. bei linearen Gleichungssystemen eine wichtige Rolle. Unsere Aufbereitung der Schulmathematik im Hinblick auf die

Verwendung in der Hochschule trägt diesem Aspekt Rechnung.

Schlussbemerkung

Weitere Informationen zu studiVEMINT finden sich unter go.upb.de/studivemint und in dem Beitrag von Biehler, Fleischmann, Gold, Mai in diesem Band, die auch das Entwicklungsteam an der Universität Paderborn darstellen. Der gesamte Kurs ist frei verfügbar auf www.studiport.de.

Literatur – Links

Bausch, Isabell/Biehler, Rolf/Bruder, Regina/Fischer, Pascal R./Hochmuth, Reinhard/Koepf, Wolfram/Schreiber, Stephan/Wassong, Thomas (Hg.): Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven. Wiesbaden: Springer Spektrum 2014.

Büchter, Andreas/Henn, Hans-Wolfgang: Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum 2010.

Fischer, Pascal Rolf: Mathematische Vorkurse im Blended-Learning-Format. Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation. Heidelberg: Springer Spektrum 2014.

Greefrath, Gilbert/Oldenburg, Reinhard/Siller, Hans-Stefan./Ulm, Volker/Weigand, Hans-Georg: Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Heidelberg: Springer Spektrum 2016.

Hoppenbrock, Axel/Biehler, Rolf/Hochmuth, Reinhard/Rück, Hans-Georg (Hg.): Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze. Wiesbaden: Springer Spektrum 2016.

Kirsch, Arnold: Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen. 4. Aufl. Köln: Aulis-Verl. Deubner 2004.

Mindestanforderungskatalog der »COSH«-Gruppe:
www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen/aktuelle-stellungnahmen/120-s-04-mindestanforderungskatalog-mathematik-der-hochschulen-baden-württembergs.html

»Studiport«-Kurs »studiVEMINT«: www.studiport.de/mathematik

(alle zuletzt aufgerufen am 07.09.2017)